全国高等职业教育“十二五”规划教材
甘肃畜牧工程职业技术学院
甘肃省示范性高职学院课程改革项目建设成果

高等数学基础教程

吴志强 主编

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

全国高等职业教育"十二五"规划教材
甘 … 业技术学院
甘肃 … 程改革项目建设成果

高等数学基础教程

吴志强 主编

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础教程 / 吴志强主编．— 武汉 ：湖北科学技术出版社，2014.8

ISBN 978-7-5352-6790-0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①吴… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第122438号

策　　划：汤春庆

责任编辑：梁　琼　　封面设计：王　梅

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027-87679468

地　　址：武汉市雄楚大街268号（湖北出版文化城B座13-14层）　　邮编：430070

网　　址：http: //www.hbstp.com.cn

印　　刷：荆州市翔羚印刷有限公司　　邮编：434000

787×1092　1/16　　16.25 印张　　380 千字

2014年8月第1版　　2014年8月第1次印刷

定价：34.00元

内容简介

本教材是依据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，参考《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并按照当前高职高专数学课程改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写的. 可作为高职高专院校各专业通用的高等数学教材. 本教材共12章，包括函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、拉普拉斯变换、行列式与矩阵、微分方程、数据处理、随机事件与概率、随机变量与数字特征、公考行测数学基础等内容. 本教材每节后附有习题，每章后附有阅读材料与复习题，书后有部分习题参考答案.

前　言

本教材是依据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，参考《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并按照当前高职高专数学课程改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写的，可作为高职高专院校各专业通用的高等数学教材．本教材具有以下特色：

(1) 遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则；

(2) 做到由易到难、循序渐进、通俗易懂；

(3) 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，注重计算能力和解决实际问题能力的培养；

(4) 兼顾理工农医类各专业的特点；

(5) 重视数学思想的熏陶．

本教材共 12 章，包括函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、拉普拉斯变换、行列式与矩阵、微分方程、数据处理、随机事件与概率、随机变量与数字特征、公考行测数学基础等内容．本教材每节后附有习题，每章后附有阅读材料与复习题．书末附有习题参考答案．

本教材由甘肃省畜牧工程职业技术学院的吴志强担任主编，由甘肃省畜牧工程职业技术学院的张治俊担任主审，甘肃省畜牧工程职业技术学院的杨国华和甘肃省理工中等专业学校的杨海成担任副主编．具体编写分工如下：第一、二、四、六章由杨国华编写；第五章由李淑梅编写；第三、九、十、十一章及前言、附录、部分习题答案由吴志强编写；第七章由康彩萍编写；第八章由王秀明编写；第十二章由张发荣和杨万俊编写．由吴志强负责全书框架结构的安排以及统稿、定稿．

由于时间仓促，编者水平有限，书中有不妥之处，恳请师生读者批评指正．

编者

2014 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

【学习目标】理解函数的极限与函数的连续的概念，掌握函数的极限运算法则，会求函数的极限，能判断函数的连续性.

【学习重点】求函数的极限.

【学习难点】判断函数的连续性.

高等数学以函数为研究对象，以极限方法为研究手段，连续则是函数的一个重要形态. 本章将在中学数学基础上进一步介绍函数、极限与连续的知识，为以后的学习奠定必要的基础.

§1-1　函　　数

一、函数概念

1. 函数的定义及表示法

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

这里 x 称为自变量，y 称为因变量或函数，集合 D 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合称为函数的值域，f 是函数符号，表示 y 与 x 的对应规则，有时函数符号也可用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.

函数的表示法通常有三种：公式法、表格法和图形法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫公式法，如 $y=x^2$，$y=\cos x$，公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫表格法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表等，表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫图形法或图像法，这种方法在工程技术上应用很普遍，其优点是直观形象，可看到函数的变化趋势.

2. 函数的定义域及其求法

定义 2　函数的定义域就是指使函数有意义的自变量的全体.

确定函数定义域的常用方法：

(1) 函数式为整式时，函数定义域为全体实数；

(2) 函数式含有分式时，分式的分母不等于零；

(3) 函数式含有二次根式时，被开方式大于等于零；

(4) 函数式中含有对数式时，真数必须大于零；

(5) 函数式是由几个部分的数学式子构成的，则函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数集合；

(6) 实际问题中，函数定义域还要和实际情况相符合，使之有意义.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义，必须使 $\begin{cases}x-1\neq 0\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 成立，

即 $\begin{cases}x\neq 1\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

故所求函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

3. 分段函数

在实际应用中经常会遇到一类函数，在定义域的不同区间用不同的式子来表达，这类函数称为分段函数. 例如

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x,\ x\geqslant 0\\-x,\ x<0\end{cases}$.

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,\ x>0\\0,\ x=0\\-1,\ x<0\end{cases}$.

(3) 取整函数 $y=[x]=n$（当 $n\leqslant x<n+1, n\in\mathbf{Z}$）.

根据取整函数的定义可以看出，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[4.8]=4$，$[0.6]=0$，$[-7.3]=-8$，$[-5]=-5$ 等.

上述三个函数的图像如图 1-1-1 所示.

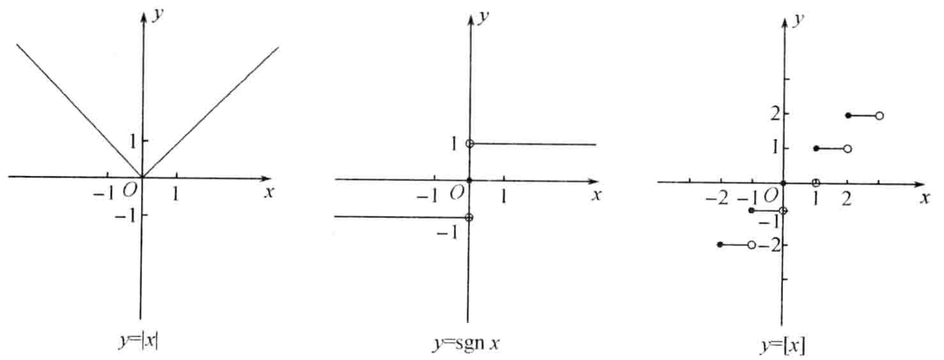


图 1-1-1

对于分段函数我们要能够正确求其定义域及自变量为 x_0 时对应的函数值，下面举例说明.

例 2　设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x,\ 0\leqslant x<1\\ x,\ 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\frac{19}{2},2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$. 求

(1) 函数的定义域；(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$；$f(1)$；$f(3)$；$f(4)$.

解　(1) 因为分段函数的定义域为各段定义域的并集，所以此函数的定义域为$[0,4]$.

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

$f(1)=1$；

$f(3)=3^2-6\times 3+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}$；

$f(4)=4^2-6\times 4+\frac{19}{2}=\frac{3}{2}$.

二、函数的几种特性

1. 单调性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升，单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降，如图 1-1-2 所示.

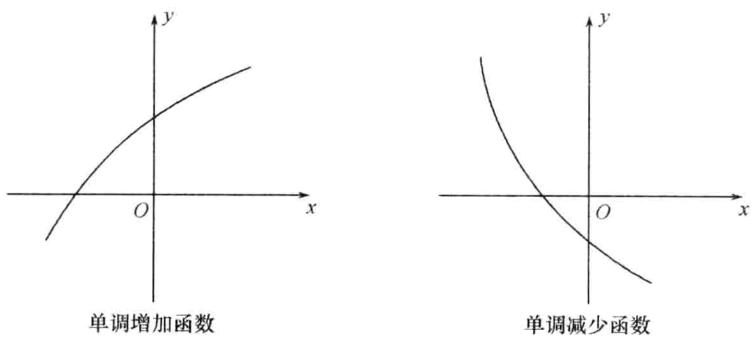


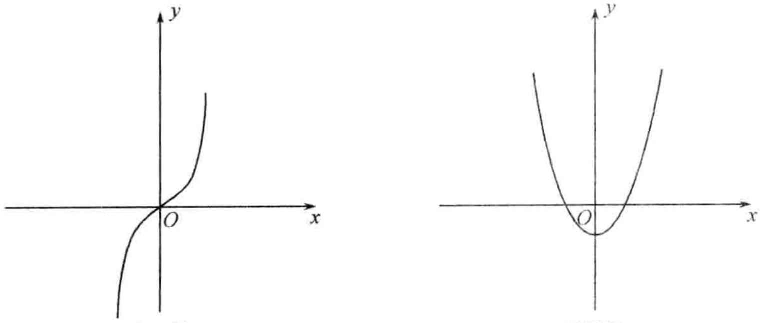
图 1-1-2

例如，函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的；在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的. 又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

2. 奇偶性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-1-3 所示.



奇函数　　　　偶函数

图 1-1-3

例如，$y = x^3$，$y = \sin x$ 等都为奇函数；$y = x^2$，$y = \cos x$ 等都为偶函数.

3. 周期性

定义 5　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的实数 T，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为周期函数，T 称为它的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4. 有界性

定义 6　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上无界.

例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，都有 $|\sin x| \leqslant 1$.

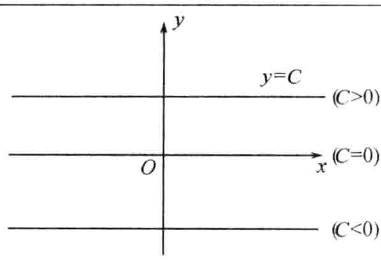
又例如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

三、初等函数

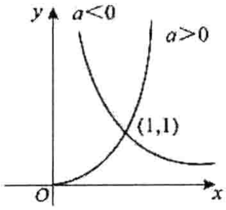
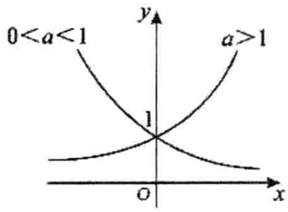
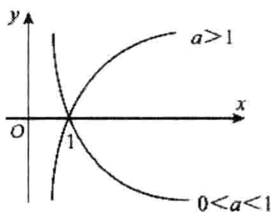
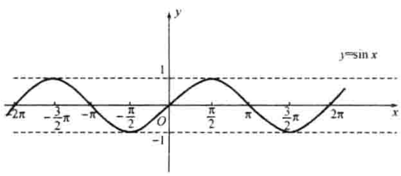
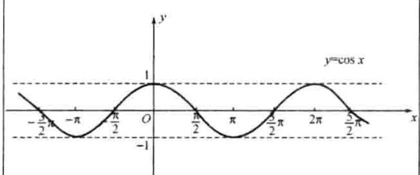
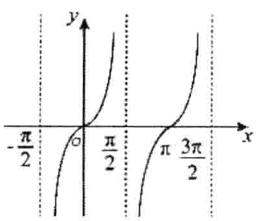
1. 基本初等函数

我们在中学学习过的六大类函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，其图像和基本性质列表归纳如下.

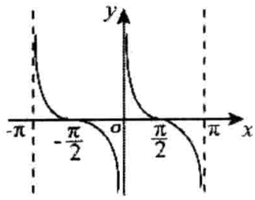
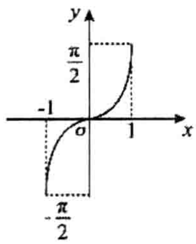
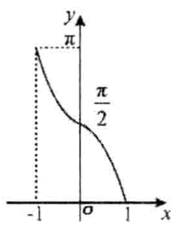
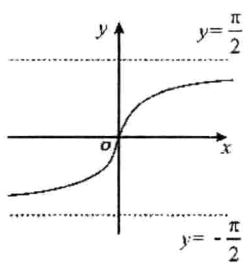
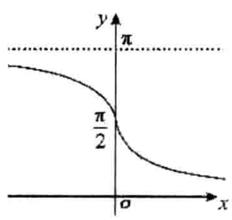
表 1-1-1　基本初等函数的图像和性质

函数	图像	性质
常数函数 $y = C$		一条平行于 x 轴且截距为 C 的直线，偶函数.

续表

<table>
<tr><th colspan="2">函数</th><th>图像</th><th>性质</th></tr>
<tr><td colspan="2">幂函数
$y=x^a$</td><td>
</td><td>在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，当 $a>0$ 时函数图像过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界；
当 $a<0$ 时函数图像过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界.</td></tr>
<tr><td colspan="2">指数函数
$y=a^x$
$(a>0$ 且 $a\neq 1)$</td><td>
</td><td>单调性：
当 $0<a<1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 单调减少；
当 $a>1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加.
奇偶性：非奇非偶函数.
周期性：非周期函数.
有界性：无界函数.</td></tr>
<tr><td colspan="2">对数函数
$y=\log_a x$
$(a>0$ 且 $a\neq 1)$</td><td>
</td><td>单调性：
当 $0<a<1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 单调减少，
当 $a>1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 单调增加.
奇偶性：非奇非偶函数.
周期性：非周期函数.
有界性：无界函数.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>
</td><td>单调性：
在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上单调增加；
在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上单调减少.
奇偶性：奇函数.
周期性：周期函数 $T=2\pi$.
有界性：有界函数.</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>
</td><td>单调性：
在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加；
在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少.
奇偶性：偶函数.
周期性：周期函数 $T=2\pi$.
有界性：有界函数.</td></tr>
<tr><td>正切函数
$y=\tan x$</td><td>
</td><td>单调性：
在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 内单调增加.
奇偶性：奇函数.
周期性：周期函数 $T=\pi$.
有界性：无界函数.</td></tr>
</table>

续表

函数		图像	性质
三角函数	余切函数 $y = \cot x$		单调性：在$[k\pi,(k+1)\pi]$内单调减少. 奇偶性：奇函数. 周期性：周期函数 $T=\pi$. 有界性：无界函数.
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$		单调性：在$[-1,1]$上单调递增. 奇偶性：奇函数. 周期性：非周期函数. 有界性：有界函数.
	反余弦函数 $y = \arccos x$		单调性：在$[-1,1]$上单调减少. 奇偶性：非奇非偶函数. 周期性：非周期函数. 有界性：有界函数.
	反正切函数 $y = \arctan x$		单调性：在$(-\infty,+\infty)$内单调增加. 奇偶性：奇函数. 周期性：非周期函数. 有界性：有界函数.
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$		单调性：在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 奇偶性：非奇非偶函数. 周期性：非周期函数. 有界性：有界函数.

2. 复合函数

定义 7　已知函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$，其中 $f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，$g(x)$ 的值域为 $R(g)$，如果 $g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，则称函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 构成的复合函数，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

例如，$y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 构成复合函数 $y=\sin^2 x$；$y=\ln u$，$u=v^2$ 与 $v=7x+8$ 构成复合函数 $y=\ln(7x+8)^2$ 等.

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数"分解"成几个简单函数的复合，这样更便于对函数进行研究.

例 3　讨论下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 5x$；　(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$.

解　(1) $y=\sin 5x$ 可以看成是由 $y=\sin u$，$u=5x$ 两个函数复合而成.

(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的能用一个式子表达的函数，称为初等函数.

例如 $y=e^{\cos x}+7x^2$，$y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$，$y=3^{\tan\frac{1}{x}}$ 等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，例如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 不是初等函数，绝对值函数 $y=|x|$ 虽可分段表示，但由于 $|x|=\sqrt{x^2}$，故仍是初等函数. 在今后的学习过程中，我们所讨论的函数大多是初等函数.

习题 1-1

1. 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

2. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(1) $x+\sin^3 x$；(2) $x^2\cos x$；(3) $\sin x^2$；(4) $\dfrac{\sin x}{x}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$，求：(1) $f(1)$；(2) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$；(3) $f(\pi)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<2\\ (x-2)2, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，求

(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(1)$；$f(3)$；$f(4)$.

5. 在以下各题中，将 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=u^2$，$u=\lg t$，$t=\dfrac{x}{2}$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\cos t$，$t=2^x$.

6. 讨论下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^5 x$；　(2) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y=\arctan[\lg(x-1)]$；　(4) $y=2^{\cos(x^2-5)}$.

§1-2 函数的极限

一、函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限定义

定义 1 如果当 $x\to x_0$(x 无限趋近于 x_0)时,函数 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\text{或者 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

例如,$\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11.$

我们指出,在定义中并没有说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义,这就是说函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义没有关系. 例如,$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 在点 $x_0=-1$ 处无定义,但是极限 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-2$ 存在.

定义 2 如果当 $x\to x_0^+$(x 大于 x_0 而无限趋近于 x_0)时,函数 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或者 } f(x_0+0)=A.$$

定义 3 如果当 $x\to x_0^-$(x 小于 x_0 而无限趋近于 x_0)时,函数 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{或者 } f(x_0-0)=A.$$

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x>0\\ 3,\ x=0\\ x-1,\ x<0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1.$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x,\ x\geqslant 0\\ -x,\ x<0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0,$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0.$

定理 1 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是函数 $f(x)$ 的左极限与右极限存在并且相等,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

显然在例 1 中 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,在例 2 中 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-3,\ x\leqslant 3\\ 2x-1,\ x>3\end{cases}$,讨论 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)=6,$

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-1)=5,$

所以$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$不存在.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}\cos x+a,\ x\leqslant 0\\ 2x-3,\ x>0\end{cases}$,且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,求 a 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x+a)=1+a$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-3)=-3$,

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 即 $1+a=-3$,

所以 $a=-4$.

二、函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限定义

定义 4　如果当 $x\to\infty$(x 绝对值无限增大)时,函数值 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或者 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}=0$.

定义 5　如果当 $x\to+\infty$(x 大于零而无限增大)时,函数 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限,记作

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或者 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

例如,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

定义 6　如果 $x\to-\infty$(x 小于零而绝对值无限增大)时,函数值 $f(x)$ 能够无限趋近于某个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A,\text{或者 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

例如,$\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$.

定理 2　函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 同时存在且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

例 5　设 $f(x)=\arctan x$,讨论$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$是否存在.

解　因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}2^x,\ x<0\\ \dfrac{1}{x+1},\ x\geqslant 0\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$,