国内外部分数学竞赛
题解参考资料

吉林市数学学会选编

吉林市科学技术协会

一九七八年八月

前　　言

为了响应英明领袖华主席提出的“提高整个中华民族的科学文化水平”的伟大号召，活跃我市科学研究气氛，树立爱科学　学科学、用科学的优良风尚，激发数学学习兴趣，为加速实现我国四个现代化服务，我们组织吉林市数学学会选编了《国内外部分数学竞赛题解参考资料》，供广大青少年和数学爱好者参考。

《国内外部分数学竞赛题解参考资料》包括两个部分：第一部分选自一九七八年六月二十一日《光明日报》发表的北京、上海、天津、辽宁、安徽、广东、四川、陕西等八个省市的比赛试题和参考答案；第二部分选自美国《数学月刊》刊载的1972—1975年美国数学竞赛题，由吉林市数学会付理事长严[illegible]同志以

及市一中老师作了参考答案。付印前，贾万里同志又将竞赛题的译文与原文进行了核对。

由于刊印时间比较仓促，美国数学竞赛题可能还有多种更好答案，我们这里只选一种，请同志们在讨论或研究时，提出意见。

吉林市科学技术协会

一九七八年七月

（一）

一九七八年全国部分省、市中学数学竞赛第一、二试试题参考答案

第一试试题参考答案

1．已知$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当x为何值时

(i)$y>0$；(ii)$y<0$ ？

解：$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$的定义域为$x+3>0$，

即$x>-3$……(1)

又$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$

(i) 若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$，则$\frac{1}{x+3}<1$，

$x+3>1$，$x>-2$。

结合(1)得$x>-2$。

(ii)若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，则$\frac{1}{x+3}>1$，

$x+3<1$，$x<-2$。

结合(1)得$-3<x<-2$。

所以当$x>-2$时$y>0$；当$-3<x<-2$时$y<0$。

2．已知$\operatorname{tg}x=2\sqrt{2}$ ($180°<x<270°$)，求$\cos 2x$，

$\cos\frac{x}{2}$的值。

解：$\because 180°<x<270°$，

$\therefore \sec x=-\sqrt{1+tg^2 x}=-\sqrt{1+8}=-3$，

$\therefore \cos x=-\frac{1}{3}$，

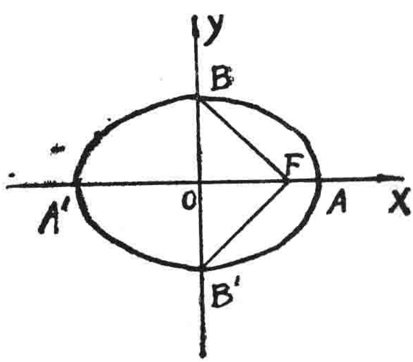
$\therefore \cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$.

由$180°<x<270°$，得$90°<\frac{x}{2}<135°$，

$\therefore \cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3．设椭圆的中心为原点，它在X轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点和长轴上较近的端点距离是$\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程。

解：如图，设所求椭园方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，



F是它的右焦点。

$\because FB\perp FB'$，

$\therefore \triangle BB'F$为等腰直角三角形

$\therefore OB=OF=OB'$，

即$b=c$，

但$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=2c^2$，

$\therefore a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b$，即$a-c=(\sqrt{2}-1)b$.

又$a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，

即$b=\sqrt{5}$

$\therefore a=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$。

故所求椭园方程是$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$。

4．已知方程$2X^2-9X+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

解：设x_1，x_2为方程$2x^2-9x+8=0$的两个根，

$$则\begin{cases}x_1+x_2=\frac{9}{2}\\x_1+x_2=4\end{cases}.$$

设所求方程为$x^2+px+q=0$，它的两个根为x_1'，x_2'据题意：$x_1'=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9}$，

$$x_2'=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}.$$

$$p=-(x_1'+x_2')=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)$$

$$=-\frac{161}{36}.$$

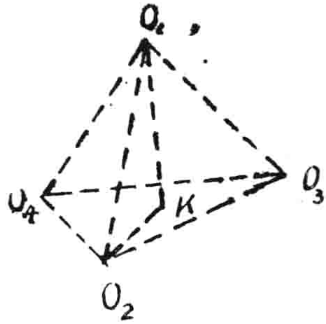
$$q=x_1'\cdot x_2'=\frac{2}{9}\times\frac{17}{4}=\frac{34}{36}.$$

所以求作的方程是：$36x^2-161x+34=0$。

5．把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度。

解：设上层小球的球心为O_1，下层三个小球球心

为O_2, O_3, O_4。连接O_1O_2、O_1O_3、O_1O_4、O_2O_3、O_3O_4、O_2O_4、因为这四个球两两相切，所以$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$，因此$O_1-O_2O_3O_4$可以看作一个棱长是2的正四面体（如图）。



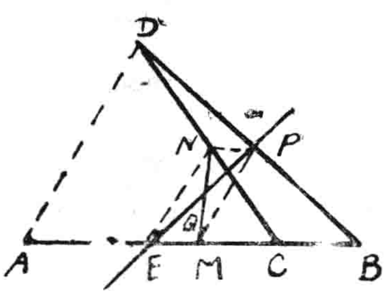
过O_1作正四面体的高O_1K，那么K应是正$\triangle O_2O_3O_4$的中心，连O_2K，则$O_2K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。

$$\therefore O_1K=\sqrt{O_1O_2^2-O_2K^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

因为O_2, O_3, O_4到桌面的距离都等于1，所以面$O_2O_3O_4$平行于桌面，则球O_1上最高点到桌面的距离应是：

$$1+\frac{2\sqrt{6}}{3}+1=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

6. 设线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD；令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q。求证：直线PQ平分线段AC。



证明：设直线PQ交AC于E，连NP，∵N、P分别是DC、DB中点，∴NP∥CB。在△QNP

与△QME中，NP∥EM，QN = QM，∴△QNP≌△QME，∴QP = QE。连PM、NE，则EMPN为平行四边形，∴EN∥MP。连AD，在△BAD中，M、P分别为BA、BD中点，∴MP∥AD，又∵EN∥MP，∴EN∥AD，∴在△ACD中，E为AC中点。所以直线PQ平分线段AC。

7. 证明：当n、k都是给定的正整数，且$n>2$，$k>2$时，$n(n-1)^{k-1}$可以写成n个连续偶数的和。

证：设n个连续偶数为$2a$，$2a+2$，$2a+4$，……，$2a+2(n-1)$。

则$S_n = \dfrac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n = [2a+(n-1)]\cdot n$

令$[2a+(n-1)]n = n(n-1)^{k-1}$，

则$2a+(n-1) = (n-1)^{k-1}$，

$$\therefore a = \frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$$

由上式可知，只要n为大于2，K为大于2的整数，那么a一定是正整数。

∴a取$\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$时，$n(n-1)^{k-1}$等于n个连续偶数的和。

8. 证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半。

证：如图，在单位圆O内，任作一锐角三角形ABC，命A、B、C各角所对的边长分别为a、b、c，其和的一半为s。

∵△ABC为一锐角三角形，

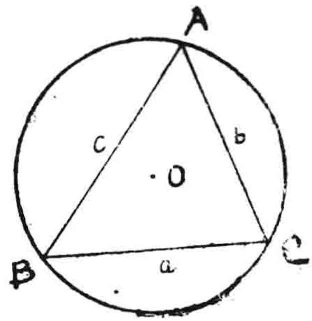
∴$A+B>90°$，即$A>90°-B$，

从而 $\cos A < \cos(90° - B)$

$= \sin B \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

同理 $\cos A < \sin C \cdots\cdots (2)$

$\cos C < \sin A \cdots\cdots (3)$



$(1)+(2)+(3)$：

$\cos A + \cos B + \cos C$

$< \sin A + \sin B + \sin C \cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

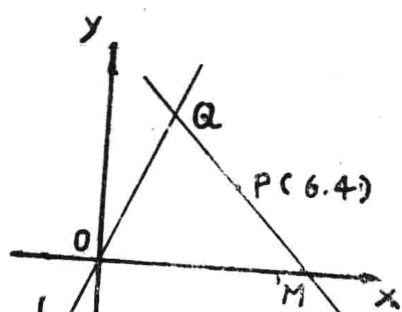
又根据正弦定理有：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$。

$\therefore \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2$。即 $\sin A + \sin B + \sin C$

$= \frac{a+b+c}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由(4)、(5)可得：$\cos A + \cos B + \cos C < S$。

9. 已知直线 l_1：$y = 4x$ 和点 $P(6,4)$，在直线 l_1 上求一点Q，使过PQ的直线与直线 l_1，以及x轴在第Ⅰ象限内围成的三角形的面积最小。



解：设Q点座标为 (x_1, y_1)，则 $y_1 = 4x_1$，那末直线PQ的方程为

$$\frac{y-4}{4x_1-4} = \frac{x-6}{x_1-6}$$

又设直PQ交x轴于 $(Mx_2, 0)$，

$$\therefore \frac{-4}{4(x_1-1)} = \frac{x_2-6}{x_1-6}，\quad x_2 = \frac{5x_1}{x_1-1}$$

则点M的座标为$\left(\frac{5x_1}{x_1-1},\ 0\right)$。

△OMQ的面积 $S=\frac{1}{2}y_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}$，而$y_1=4x_1$，

$$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 4x_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}=\frac{10x_1^2}{x_1-1}$$

从而得到$10x_1^2-Sx_1+S=0$ ……………………………(1)

要使方程(1)式中x_1有实根，则$S^2-40S\geqslant 0$，

$S(S-40)\geqslant 0$。

由于$S>0$，$\therefore S-40\geqslant 0$，即$S\geqslant 40$。

把$S=40$代入(1)得：$x_1^2-4x_1+4=0$，$\therefore x_1=2$。

这就是说当$x_1=2$时，使S达到极小。

由$y_1=4x_1$得$y_1=8$，故所求点Q的座标为（2，8）。

10． 求方程组$\begin{cases}x+y+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^3+y^3+z^3=-18\cdots\cdots(2)\end{cases}$的整数解。

解：由(1)$z=-(x+y)$ ………………(3)

(3)代入(2)：$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$，

化简：$xy(x+y)=6$，即$xyz=-6$……(4)

由(4)可知，x、y、z必须是6的约数±1、±2、±3且要满足(1)、(2)，所以其中有且只有一个取负数，而这个负数的绝对值应该最大。

如令$x=-3$时，则得$\begin{cases}y=1,\ 2\\ z=2,\ 1;\end{cases}$

同理如令$y=-3$时，$\begin{cases}x=1,\ 2\\ z=2,\ 1;\end{cases}$

当$z=-3$时，$\begin{cases}x=1, & 2\\ y=2, & 1;\end{cases}$

故所求解为

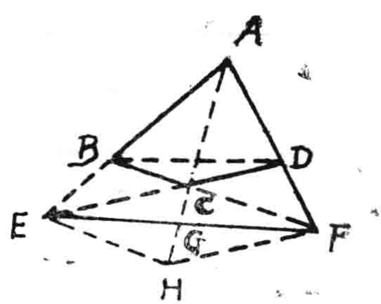
$$\begin{cases}x=-3\\y=1\\z=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=2\\z=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=-3\\z=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=1\\z=-3.\end{cases}$$

经检验，以上六组解为原方程组的整数解.

第二试试题参考答案

1. 四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行，证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段.



已知：ABCD为四边形，两组对边延长后得交点E、F.

对角线$BD \parallel EF$,

AC的延长线交EF于G(如图)

求证：$EG=GF$

证明：过E作$EH \parallel BF$.

H是它和AG延线的交点，

$\therefore \dfrac{AC}{AH}=\dfrac{AB}{AE}$. $\because \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AF}$, $\therefore \dfrac{AC}{AH}=\dfrac{AD}{AF}$, 连HF,

则$ED \parallel HF$.

∴CEHF是平行四边形，∴EG＝GF。

2. (1)分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

解：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\dfrac{x^{15}-1}{x^3-1}$

$=\dfrac{x^5-1}{x-1}\cdot\dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

(2)证明：对于任意角度θ，

都有$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta\geqslant0$.

证：$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta$

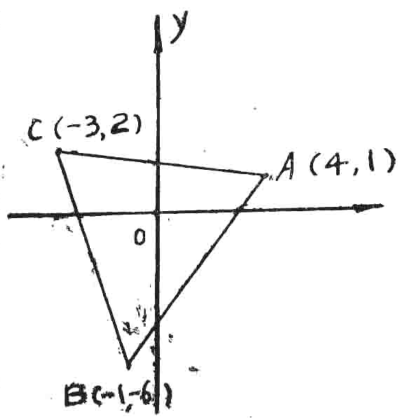
$=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$

$=(1+\cos\theta)(4\cos^2\theta+4\cos\theta+1)$

$=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2\geqslant0$.

3. 设R为平面上以A(4,1)、B(－1,－6)、C(－3,2)三点为顶的三角形区域（包括三角形内部及周界）。试求当(x,y)在R上变动时，函数$4x-3y$的极大值和极小值。（须证明你的论断）



解：令$\lambda=4x-3y$，显而易见，当λ固定，(x,y)变动时，我们即得平面上一条直线。令λ变动，则得一系列相互平行的直线，在其中每一条直线上，$4x-3y$的值皆

相同，当直线经过C点时，$\lambda=-18$，此时直线经过$(-4.5,0)$。当直线经过B点时，$\lambda=14$，此时直线经过$(3.5,0)$。当直线经过A点时，$\lambda=13$，此时，直线经过$(3.25,0)$。由此可知，直线$\lambda=4x-3y$和x轴交于$(x',0)=(\frac{\lambda}{4},0)$，而$\lambda=4x'$和$x'$成正比。由于$-4.5\leqslant x'\leqslant 3.5$所以$-18\leqslant\lambda\leqslant 14$。

4. 设ABCD为任意给定的四边形，边AB、BC、CD、DA的中点分别为E、F、G、H。证明：

四边形ABCD的面积$\leqslant EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$。

证明：如图，$HE\parallel DB\parallel GF$，同理$EF\parallel HG$，故EFGH为平行四边形。

面积$S_{ABCD}=S_{EFGH}+S_{AEH}+S_{DGH}+S_{CGF}+S_{BEF}$。

而$S_{AEH}+S_{CGF}=\frac{1}{4}(S_{ABD}+S_{CBD})=\frac{1}{4}S_{ABCD}$，

同理$S_{DGH}+S_{BFE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$，

故$S_{ABCD}=S_{EFGH}+\frac{1}{2}S_{ABCD}$，

即$\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{EFGH}$ ……………………………………(1)

由于EFGH是平行四边形，所以

$S_{EFGH}\leqslant\frac{1}{2}EG\cdot HF$ ……………………………………(2)

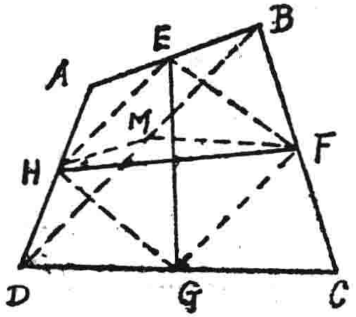
由(1)、(2)可得$S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF$。

设M为BD中点，显然有

$$\frac{1}{2}(AB+DC)=HM+MF\geqslant HF,$$

同理有$\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant EG$,

故有$EG\cdot HF\leqslant \frac{1}{2}(AB+DC)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$。



5. 设有十人各拿提桶一只同到水龙头前打水，设水龙头注满第i（$i=1,2,\cdots\cdots,10$）个人的提桶需时T_i分钟，假定这些T_i各不相同，问：

（i）当只有一个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总的花费时间（包括各人自己接水所花的时间）为最小？这时间等于多少？（须证明你的论断）

（ii）当有两个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总的花费时间为最少？这时间等于多少？（须证明你的论断）

解：我们不妨假定$T_1<T_2<\cdots\cdots<T_{10}$。

（i）当只有一个水龙头可用时，

假设按从小到大的次序安排，那么总的花费时间为

$$T=T_1+(T_1+T_2)+\cdots\cdots+(T_1+T_2+\cdots\cdots+T_{10})。$$

今设另一种安排次序是i_1，i_2，$\cdots\cdots$，i_{10}（$i_1,i_2,\cdots\cdots,i_{10}$是$1,2,\cdots\cdots,10$的一个排列），这种安排下，总的花费时间为

$$T^*=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots\cdots+T_{i_{10}}),$$

由于：

$$T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots\cdots+T_{i_{10}}=T_1+T_2+\cdots\cdots+T_{10}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots\cdots+T_{i_9}\geqslant T_1+T_2+\cdots\cdots T_9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

…………

$$T_{i_1}+T_{i_2}\geqslant T_1+T_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$T_{i_1}\geqslant T_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

把上列(1)—(10)式两边分别相加，即得$T^*\geqslant T$。

由此可见，按T_i从小到大的次序安排，总的花费时间为最少。

(ii)当有Ⅰ，Ⅱ两个水龙头可用时，

假设分配$5+l(0\leqslant l<5)$个到Ⅰ，任意安排次序是i_1，i_2，……i_{5+l}，这时总的花费时间为

$$T_{\mathrm{I}}=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots\cdots+T_{i_{5+l}})$$

分配另外的$5-l$个到Ⅱ，任意安排次序是j_1，j_2……j_{5-l}，这时总的花费时间为

$$T_{\mathrm{II}}=T_{j_1}+(T_{j_1}+T_{j_2})+\cdots\cdots+(T_{j_1}+T_{j_2}+\cdots\cdots+T_{j_{5-l}})$$

于是有

$$T_{\mathrm{I}}+T_{\mathrm{II}}=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots\cdots+(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{5+l}})$$

$$+T_{j_1}+(T_{j_1}+T_{j_2})+\cdots\cdots+(T_{j_1}+\cdots\cdots+T_{j_{5-l}})$$

$$=(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{5+l}}+T_{j_1}+\cdots\cdots+T_{j_{5-l}})+\cdots\cdots+(T_{i_1}$$

$$+\cdots\cdots+T_{i_{2l+1}}+T_{j_1})+(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{2l}})+(T_{i_1}+\cdots$$

$$\cdots+T_{i_{2l-1}})+(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{j_{2l-2}})+\cdots\cdots+T_{i_1}>$$

$$(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{5+l}}+T_{j_1}+\cdots\cdots+T_{j_{5-l}})+\cdots\cdots+$$

$$T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{2l+1}}+T_{j_1})+(T_{i_1}+\cdots\cdots+T_{i_{2l}})+(T_{i_1}+$$

$$+\cdots\cdots+T_{i_{2l-2}})+\cdots\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2})$$

$$>(T_1+\cdots\cdots+T_{10})+(T_1+\cdots\cdots+T_8)+\cdots\cdots$$
$$+(T_1+T_2)$$

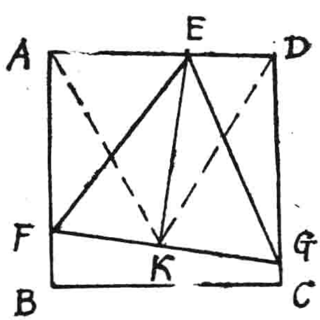
即$T_{\rm I}+T_{\rm II}>5(T_1+T_2)+4(T_3+T_4)+3(T_5+T_6)$
$+2(T_7+T_8)+(T_9+T_{10})$

由此可见，每个水龙头各分配5个，并按从小到大次序轮流分配到Ⅰ、Ⅱ两个水龙头上去时（如

$$\begin{cases} \text{Ⅰ}: T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, \\ \text{Ⅱ}: T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}. \end{cases}$$

并且其中相同列的两个可以互换），总的花费时间为最少。

6. 设有一边长为1的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积（须证明你的论断）：



解：假设△EFG为正方形的任一内接正三角形，由于正三角形的三个顶点至少必落在正方形的三边上，所以不妨设其中的F、G是在正方形的一组对边上。

作△EFG边FG上的高