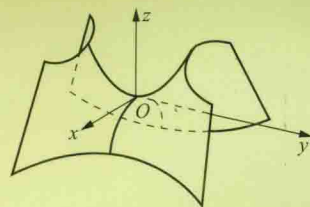
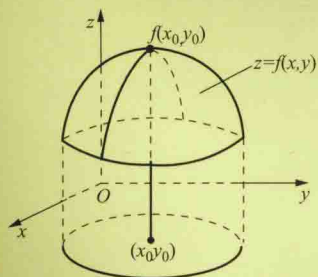


高等数学

学习指导与习题精解

施金福 主编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等数学

学习指导与习题精解

施金福 主编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是编者结合多年的教学实践与职业技术学院学生的实际情况,为高等职业院校编写的高等数学的学习辅导书。本书紧扣教材大纲,叙述深入浅出,选材简明典型,突出重点,解题思路清晰,针对性、指导性强,是学好高等数学的好帮手。

本书内容包括:函数,极限的连续,导数与微分,微分中值定理与导数应用,不定积分与定积分,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微积分,无穷级数,傅里叶变换,拉普拉斯变换,共13章,每章、节分内容提要,例题精析,习题选解等板块。

本书可作高等职业院校师生的参考书,也可作自学者与有关科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题精解 / 施金福主编. — 上海:上海交通大学出版社, 2014
ISBN 978-7-313-10947-7

I. 高... II. 施... III. 高等数学—高等职业教育—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 051480 号

高等数学学习指导与习题精解

主 编:施金福

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

出 版 人:韩建民

印 制:上海交大印务有限公司

开 本:787mm×960mm 1/16

字 数:230 千字

版 次:2014 年 6 月第 1 版

书 号:ISBN 978-7-313-10947-7/O

定 价:32.00 元

地 址:上海市番禺路 951 号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:16.75

印 次:2014 年 6 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:021-54742979

前 言

“高等数学”是一门重要的基础课。它不仅是后继课程的基石与工具,而且通过高等数学的学习,可培养人的空间想象、抽象思维、逻辑推理、分析与解决问题的能力。“国富民强要靠数学的发达。”这是拿破仑的一句名言。但现正面临着一个日益突出的矛盾:一方面后继课程对学生的数学能力有更多更高的要求,而另一方面,高等数学的课时不断被压缩。对此,学生普遍要求有一本学习高等数学的指导书。由鉴于此,我们结合多年的教学实践,与学生的实际情况,紧扣荣获“首届嘉兴市优秀教材奖”的教材内容,编写了这本《高等数学学习辅导与习题精解》,旨在帮助学生较快较好地掌握高等数学的基本概念,基本理论,以及基本解题技能与技巧,提高逻辑思维及解决问题的能力。

本书由每章或节的内容提要、例题精析、教材中习题精选与讲解、章后测试题及其解答等四个相互关联,互为充实的板块组成。深信只要读者结合教材细仔阅读指导书,必收获匪浅。

不做适当数量的练习,想学好数学,那是不可能的。著名数学家苏步青教诲我们:“做数学习题是对课本内容的消化、巩固与深化,做数学练习好比对大脑做广播操,越做大脑越灵,反之越笨,大脑生锈。”达·芬奇说:“趁着年青少壮去探求知识吧……这样年老时才不致空虚。”一个梦,二个梦,亿万个梦! 让我们共同努力,圆一个伟大的中国梦!

本书可供非数学专业的学生使用,如土木、建筑、机电、计算机、通信、模具、机械、经济贸易、经济管理类等专业的学生。本书是高职、高专院校以及各类成人教育、二级学院,自学考试学生的不可多得的学习辅导书。

本书由上海交通大学嘉兴南洋学院副教授施金福主编。其中第1章至第3章由龙蓉老师编写,第4章至第6章由刘孟老师编写,第7章,第8章由杨兰娟老师编写,第9章至第11章由赵巧珍老师编写,第12章,第13章由施金福老师编写,

并对全书负责统稿。上海交通大学王嘉善教授仔细地审阅了全稿,上海交通大学出版社为本书的出版也付出了大量的劳动,在此深表感激之情。

限于编者的水平以及时间仓促,书中存在的不妥与错误之处,恳请广大读者与同仁不吝指正,不胜感谢!

编 者

2013年7月

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 函数	1
I. 内容提要	1
II. 例题精析	1
III. 习题 1.1 选讲	2
1.2 初等函数	6
I. 内容提要	6
II. 例题精析	7
III. 习题 1.2 选讲	9
第 2 章 极限与连续	12
2.1 数列极限	12
I. 内容提要	12
II. 例题精析	12
III. 习题 2.1 选讲	13
2.2 函数极限	14
I. 内容提要	14
II. 例题精析	15
III. 习题 2.2 选讲	15
2.3 无穷小量与无穷大量	16
I. 内容提要	16
II. 例题精析	17
III. 习题 2.3 选解	17
2.4 极限的四则运算法则	19
I. 内容提要	19
II. 例题精析	20

Ⅲ. 习题 2.4 选解	21
2.5 两个重要极限	23
Ⅰ. 内容提要	23
Ⅱ. 例题精析	24
Ⅲ. 习题 2.5 选讲	25
2.6 无穷小量的比较	27
Ⅰ. 内容提要	27
Ⅱ. 例题精析	28
Ⅲ. 习题 2.6 选讲	29
2.7 函数的连续性	30
Ⅰ. 内容提要	30
Ⅱ. 例题精析	31
Ⅲ. 习题 2.7 选讲	32
2.8 函数的间断点, 间断点的分类	33
Ⅰ. 内容提要	33
Ⅱ. 例题精析	34
Ⅲ. 习题 2.8 选讲	34
2.9 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的性质	36
Ⅰ. 内容提要	36
Ⅱ. 例题精析	36
Ⅲ. 习题 2.9 选讲	38
第3章 导数与微分	40
3.1 导数的概念	40
Ⅰ. 内容提要	40
Ⅱ. 例题精析	41
Ⅲ. 习题 3.1 选讲	43
3.2 导数公式和导数运算法则	47
Ⅰ. 内容提要	47
Ⅱ. 例题精析	47
Ⅲ. 习题 3.2 选讲	48
3.3 复合函数求导法则	50
Ⅰ. 内容提要	50
Ⅱ. 例题精析	51

Ⅲ. 习题 3.3 选讲	53
3.4 隐函数、反函数, 参数方程所确定的函数的求导法则, 对数求导法 ...	57
I. 内容提要	57
II. 例题精析	57
Ⅲ. 习题 3.4 选讲	59
3.5 高阶导数	61
I. 内容提要	61
II. 例题精析	62
Ⅲ. 习题 3.5 选讲	63
3.6 微分及微分的应用	66
I. 内容提要	66
II. 例题精析	67
Ⅲ. 习题 3.6 选讲	69
第 4 章 微分中值定理与导数的应用	71
I. 内容提要	71
II. 例题精析	74
Ⅲ. 习题选解	75
第 5 章 不定积分	90
I. 内容提要	90
II. 例题精析	93
Ⅲ. 习题选解	96
第 6 章 定积分	111
I. 内容提要	111
II. 例题精析	114
Ⅲ. 习题选解	119
第 7 章 微分方程	146
7.1 微分方程的基本概念	146
I. 内容提要	146
II. 例题精析	146
Ⅲ. 习题 7.1 选解	147

7.2 一阶微分方程	148
I. 内容提要	148
II. 例题精析	149
III. 习题 7.2 选讲	150
7.3 可降阶的特殊高阶微分方程	153
I. 内容提要	153
II. 例题精析	154
III. 习题 7.3 选讲	154
7.4 线性微分方程解的结构	156
I. 内容提要	156
II. 例题精析	157
III. 习题 7.4 选讲	158
7.5 二阶常系数线性微分方程的解法	159
I. 内容提要	159
II. 例题精析	160
III. 习题 7.5 选解	161
7.6* 二阶常系数线性非齐次方程特解的常数变易法	163
I. 内容提要	163
II. 例题精析	164
III. 习题 7.6 选讲	164
7.7 微分方程在工程技术和经济方面的应用	164
I. 内容提要	164
II. 例题精析	165
III. 习题 7.7 选讲	167
第 8 章 向量代数与空间解析几何	169
8.1 空间直角坐标系及向量	169
I. 内容提要	169
II. 例题精析	170
III. 习题 8.1 选解	171
8.2 向量的坐标及其代数运算	172
I. 内容提要	172
II. 例题精析	173
III. 习题 8.2 选解	174

8.3 向量与向量的积	174
I. 内容提要	174
II. 例题精析	175
III. 习题 8.3 选解	176
8.4, 8.5, 8.6 曲面方程, 曲线方程以及在坐标平面上的投影	178
I. 内容提要	179
II. 例题精析	179
III. 习题 8.4, 8.5, 8.6 选解	179
8.7 平面方程与直线方程	180
I. 内容提要	180
II. 例题精析	181
III. 习题 8.7 选解	182
8.8 二次曲面	183
I. 内容提要	183
II. 例题精析	184
III. 习题 8.8 选解	185
第 9 章 多元函数微分学	186
9.1, 9.2 多元函数概念, 多元函数极限与连续性	186
I. 内容提要	186
II. 例题精析	186
III. 习题 9.1, 9.2 选解	188
9.3 偏导数与全微分	188
I. 内容提要	188
II. 例题精析	189
III. 习题 9.3 选解	190
9.4 复合函数的求导法则及隐函数求导法	191
I. 内容提要	191
II. 例题精析	192
III. 习题 9.4 选解	193
9.5 偏导数的几何应用	195
I. 内容提要	195
II. 例题精析	196
III. 习题 9.5 选解	196

9.6 多元函数极值	197
I. 内容提要	197
II. 例题精析	198
III. 习题 9.6 选解	198
第 10 章 重积分	200
I. 内容提要	200
II. 例题精析	201
III. 第 10 章习题选解	203
第 11 章 无穷级数	210
11.1 常数项级数	210
I. 内容提要	210
II. 例题精析	211
III. 习题 11.1 选解	211
11.2 正项级数及其审敛法	213
I. 内容提要	213
II. 例题精析	214
III. 习题 11.2 选解	214
11.3 任意项级数	218
I. 内容提要	218
II. 例题精析	219
III. 习题 11.3 选解	220
11.4 幂级数	221
I. 内容提要	221
II. 例题精析	223
III. 习题 11.4 选解	223
11.5 傅里叶(Fourier)级数	225
I. 内容提要	225
II. 例题精析	226
III. 习题 11.5 选解	227
第 12 章 傅里叶变换	230
I. 内容提要	230

II. 例题精析	233
III. 习题选解	235
第 13 章 拉普拉斯(Laplace)变换	239
13.1, 13.2 拉氏变换概念, 拉氏变换性质	239
I. 内容提要	239
II. 例题精析	241
III. 习题选解	244
13.3 拉氏逆变换	248
I. 内容提要	248
II. 例题精析	249
III. 习题 13.3 解答	250
13.4 拉氏变换与拉氏逆变换的应用	251
I. 内容提要	251
II. 例题精析	252
III. 习题 13.4 选解	254

第1章 函 数

1.1 函数

I. 内容提要

1. 本节首先给出了函数的定义。
2. 强调函数的两个基本要素——①定义域 D_f ; ②对应法则 f 。
3. 所以, 当两个函数的定义域与对应法则都相同时, 那么它们是相同函数, 从而, 函数相同与否, 跟变量用什么字母表示无关。
4. 定义域的求法是:
 - (1) 偶次根式的被开方数大于、等于零: $\sqrt[n]{(\quad)} \rightarrow (\quad) \geq 0$;
 - (2) 分式的分母不等于零: $\frac{1}{(\quad)} \rightarrow (\quad) \neq 0$;
 - (3) 对数函数的真数大于零, 底数大于零, 且不等于 1;
$$\log_{(\quad)}[\quad] \rightarrow \begin{cases} [\quad] > 0, \\ (\quad) > 0, (\quad) \neq 1; \end{cases}$$
 - (4) 反三角函数: $\arcsin(\quad) \rightarrow -1 \leq (\quad) \leq 1$,
 $\arccos(\quad) \rightarrow -1 \leq (\quad) \leq 1$;
 - (5) 分段函数的定义域是各定义区域的交集;
 - (6) 反函数的定义域是直接函数的值域。
5. 介绍了函数三种常用的表示方法: 解析法(公式法); 图像法; 表格法。
6. 介绍了函数的 4 个常用特性: 有界性; 单调性; 奇偶性; 周期性。
7. 最后介绍了文科专业常用的, 经济学中的函数——需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数, 以及工科专业中常用的双曲函数。
8. 函数关系式的建立, 这是用数学解决实际问题的首要步骤。

II. 例题精析

【例 1.1】 求下列函数的定义域

$$(1) f(x) = \sqrt{9-x^2};$$

$$(2) f(x) = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{x-1}};$$

$$(3) f(x) = \arccos \frac{2-x}{3}.$$

解 (1) $9-x^2 \geq 0, x^2 \leq 9, -3 \leq x \leq 3$. 所以 $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$;

$$(2) \begin{cases} 3-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \end{cases}, \text{ 所以 } D_f = \{x \mid 1 < x < 3\};$$

$$(3) -1 \leq \frac{2-x}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2-x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5, \text{ 所以 } D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}.$$

【例 1.2】 设 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$, 则 $f(\cos x) = ?$

解 因为 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, 所以 $f(\sin x) = 3 - (1 - 2\sin^2 x) = 2 + 2\sin^2 x$, 从而 $f(x) = 2 + 2x^2$, 或 $f(\cos x) = 2 + 2\cos^2 x$.

【例 1.3】 设 $f\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{x}{2x-1}$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x}-1=t$, 则 $x = \frac{1}{1+t}, (t \neq -1)$,

$$\text{则原式} = f(t) = \frac{\frac{1}{1+t}}{2 \cdot \frac{1}{1+t} - 1} = \frac{1}{1-t},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

【例 1.4】 某公司生产某种产品, 已知固定成本为 14 000 元, 每增加一件产品, 将会增加 8 元成本, 且每日最多生产 1 万件, 求每日产品成本 C 表示为产量 Q 的函数.

解 根据题设, 固定成本 $C_0 = 14\,000$ 元, 可变成本 $C(Q) = 8Q$, 所以每日产品的总成本为 $C(Q) = C_0 + C(Q) = 14\,000 + 8Q$, 定义域 $D_C = [0, 10\,000]$ 中的整数.

III. 习题 1.1 选讲

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) f(x) = \ln(x^2 - 1);$$

$$(3) f(x) = \sqrt{16 - x^2} + \frac{1}{\ln(2x - 3)};$$

$$(4) f(x) = \ln(2^x - 4) + \arcsin \frac{2x-1}{7};$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x \leq 1), \\ x+1 & (1 < x \leq 4), \end{cases} \text{ 求 } f(x^2) \text{ 定义域.}$$

解 (1) 分母 $\neq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \neq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

$$(2) \text{ 对数的真数 } > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

$$(3) \begin{cases} \text{偶次根被开方数} \geq 0 \\ \text{分母} \neq 0, \text{真数} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup$$

$(2, 4]$.

$$(4) \begin{cases} \text{真数} > 0 \\ \text{反三角正弦要求} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 4 > 0 \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -6 \leq 2x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow D_f = (2, 4].$$

$$(5) \text{ 因为 } f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1, \\ x+1, & 1 < x \leq 4, \end{cases} \text{ 由于分段函数的定义域是所有分段定义}$$

区间的并集, 即 $f(x)$ 的定义域 $D_f = (0, 1] \cup (1, 4] = (0, 4]$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $0 < x^2 \leq 4 \Rightarrow D_{f(x^2)} = [-2, 0) \cup (0, 2]$.

2. 下列函数是否相同? 说明理由.

$$(1) f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x;$$

$$(2) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x;$$

$$(3) f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

解 (1) 相同, 因为定义域与对应法则都相同.

$$(2) \text{ 不同, 因为 } D_f = (-\infty, +\infty), \text{ 而 } g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}, \text{ 所以 } D_g = \{x \mid \cos x \neq 0\} = \left\{x \mid x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbf{Z}\right\}, \text{ 所以 } D_f \neq D_g.$$

$$(3) \text{ 不同, 因为 } D_f = (-\infty, +\infty), \text{ 而 } g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ 的定义域 } D_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ 所以 } D_f \neq D_g.$$

3. 求函数值.

$$(1) \text{ 已知 } f(x) = x^2 + x - 1, \text{ 求: } f(1), f(0), f(1+\Delta x), \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x};$$

$$(2) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 0), \\ 2 & (0 \leq x < 1), \\ x-1 & (x > 1), \end{cases} \text{ 求: } f(3), f(2), f(0), f(0.5), f(-0.5),$$

$f(-1)$ 。

解 (1) $f(x) = x^2 + x - 1$, 则

$$f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1;$$

$$f(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1;$$

$$\begin{aligned} f(1 + \Delta x) &= (1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x) - 1 \\ &= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + \Delta x - 1 \\ &= (\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1; \end{aligned}$$

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} = \Delta x + 3.$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 0), \\ 2 & (0 \leq x < 1), \\ x-1 & (x > 1), \end{cases} \text{ 则}$$

$$f(3) = (x-1)|_{x=3} = 2;$$

$$f(2) = (x-1)|_{x=2} = 1;$$

$$f(0) = 2|_{x=0} = 2;$$

$$f(0.5) = 2|_{x=0.5} = 2;$$

$$f(-0.5) = 2^x|_{x=-0.5} = 2^{-0.5} = \frac{1}{2^{0.5}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f(-1) = 2^x|_{x=-1} = \frac{1}{2}.$$

4. 确定下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2};$$

$$(2) f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

解 (1) 因为 $y(-x) = \frac{3^{-x} - 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^{-x} - 3^x}{2} = -\frac{3^x - 3^{-x}}{2} = -y(x)$, 所以为偶函数。

$$(2) \text{ 因为 } f(-x) = \lg(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \lg \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lg \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lg 1 - \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -\lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x),$$

所以为奇函数。

5. 证明:

(1) 两个偶函数的和、差、积、商是偶函数;

(2) 两个奇函数的和是奇函数;

(3) 两个奇函数的积、商为偶函数;

(4) 奇函数与偶函数的积、商是奇函数。

证 (1) 设 $f(x), g(x)$ 为偶函数, 即: $f(-x) = f(x); g(-x) = g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } F(x) &= f(x) + g(x) \Rightarrow F(-x) = f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) = F(x), \end{aligned}$$

所以 $F(x) = f(x) + g(x)$ 为偶函数。

$$\begin{aligned} H(x) &= f(x) - g(x) \Rightarrow H(-x) = f(-x) - g(-x) \\ &= f(x) - g(x) = H(x), \end{aligned}$$

所以 $H(x) = f(x) - g(x)$ 为偶函数。

$$\begin{aligned} G(x) &= f(x) \cdot g(x) \Rightarrow G(-x) = f(-x) \cdot g(-x) \\ &= f(x) \cdot g(x) = G(x), \end{aligned}$$

所以 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数。

$$J(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow J(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = J(x),$$

所以 $J(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 为偶函数。

(2) 设 $f(x), g(x)$ 为奇函数, 即: $f(-x) = -f(x); g(-x) = -g(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + g(x) \Rightarrow F(-x) = f(-x) + g(-x) \\ &= -f(x) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -F(x), \end{aligned}$$

所以 $F(x) = f(x) + g(x)$ 为奇函数。

(3), (4) 的证明方法与 (1), (2) 的证明方法相似 (略)。

10. 证明 $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$ 为有界函数。

证 因为分母 $x^2 + 3 \geq 0 + 3 = 3 > 0$ 对一切 x 都成立, 所以分母总不等零, 即 $D_f = (-\infty, +\infty)$ 。

又因为 $0 < \frac{x^2}{x^2 + 3} < \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} = 1$, 所以 $\left| \frac{x^2}{x^2 + 3} \right| < 1$, 对一切 x 成立, $x \in D_f$,

所以 $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$ 是以 1 为界的有界函数。

11. 火车站对行李收费规定: 当行李不超过 50kg 时, 按基本运费计算, 每 kg