普通高等教育“十二五”规划教材

“211”数学类主干课改教材
丛书主编　王公宝　李梦如

# 实变函数与泛函分析

王公宝　李卫军　何汉林　编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

“211”数学类主干课改教材

丛书主编　王公宝　李梦如

# 实变函数与泛函分析

王公宝　李卫军　何汉林　编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书依据教育部高等学校数学类专业教学指导委员会关于数学基础课程的教学基本要求而编写. 全书共分六章: Lebesgue 测度、Lebesgue 可测函数与 Lebesgue 积分、度量空间、赋范线性空间及其线性算子、Hilbert 空间及其线性算子、泛函分析的一些应用. 全书选材适当、结构合理, 侧重介绍实变函数与泛函分析的基础知识与方法, 例题和习题丰富, 每节均配置了习题, 大部分习题难易程度适中, 侧重于对所学知识和方法的理解与运用, 部分习题可开阔视野, 是对正文内容的补充. 书后附有习题答案与提示, 便于读者自学与检测学习效果.

本书可作为高等学校数学类本科专业教材或教学参考书, 也可作为理工科研究生教学参考书.


**图书在版编目(CIP)数据**

实变函数与泛函分析/王公宝, 李卫军, 何汉林编著. —北京: 科学出版社, 2014.7

普通高等教育“十二五”规划教材. “211”数学类主干课改教材

ISBN 978-7-03-040996-6

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①王… ②李… ③何… Ⅲ. ①实变函数–高等学校–教材 ②泛函分析–高等学校–教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 123840 号

责任编辑: 吉正霞 李 萍 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 高 嵘 / 封面设计: 蓝正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http: //www.sciencep.com

武汉首壹印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本: 787×1092 1/16

2014 年 11 月第 一 版 印张: 17 1/2

2014 年 11 月第一次印刷 字数: 399 000

**定价: 43.80 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　言

实变函数与泛函分析课程是国内高等学校数学类本科专业一门重要的基础课程, 内容丰富, 有着众多的理论分支及应用领域. 由于不同高校的课程教学课时数与教学要求不尽相同, 所以目前国内出版的同类教材在体系安排、内容取材、侧重点及题例配备等方面都各有特色和适用对象. 如何更好地满足大学数学课程教学改革形势的需要, 把握教改、课改动态, 反映课程的先进理念、知识和方法, 编写出好教、好学、好用的教材, 进一步提高教学效果, 值得深入探讨和研究.

本书编者长期从事数学教学与科研工作, 多次承担本科实变函数与泛函分析课程及研究生相关课程的教学任务, 积极跟踪教改、课改动态, 积累了丰富的教学实践经验. 本书依据教育部高等学校数学类专业教学指导委员会关于数学基础课程的教学基本要求而编写. 在编写过程中, 坚持"厚基础、拓思维、强素质"的教学理念, 并结合编者多年来的教学实践经验与体会, 汲取国内外同类教材优点, 在内容取材与具体编排等方面反复研究斟酌, 在保持课程知识体系相对完整和严谨的同时, 精选优化教学内容, 理论联系实际, 内容由浅入深, 循序渐进, 重点突出, 应用性强, 启发思维, 努力编写一部特色鲜明、针对性和适用性强的教学用书.

本书介绍实变函数与泛函分析的基本概念、基本理论、基本方法及其相关应用.全书共包括六章内容: 第 1 章 Lebesgue 测度, 第 2 章 Lebesgue 可测函数与 Lebesgue 积分, 第 3 章度量空间, 第 4 章赋范线性空间及其线性算子, 第 5 章 Hilbert 空间及其线性算子, 第 6 章泛函分析的一些应用.

本书体现了以下四个特点.

(1) 侧重于讲解实变函数与泛函分析中最基本也是最重要的理论、方法及其相关应用, 针对性强, 同时又不失课程内容的系统性, 全书将侧重点放在思想方法的介绍和对定理的理解及其应用方面.

(2) 全书注意从实际背景出发介绍有关抽象概念与抽象理论, 注重课程内容与数学分析、线性代数等基础课程的联系对比, 很好地处理了"抽象概念、抽象理论"与"具体模型"的关系, 有利于学生更好地理解掌握实变函数与泛函分析的基本概念、基本理论和基本方法.

(3) 本书第 6 章专门介绍泛函分析的有关理论在多种类型方程(组)求解、最佳逼近问题、泛函最优化问题与最优控制等方面的应用, 旨在启发思维, 引导学生将泛函分析的思想方法应用到具体的专业领域中去, 加强应用能力的培养.

(4) 全书例题和习题丰富, 每节后均配置了习题, 大部分习题难易程度适中, 侧重于对所学知识、方法的理解与运用, 部分习题具有开阔视野的作用, 是对正文内容的补充. 书后附有习题答案与提示, 便于读者自学和检测学习效果.

本书的编写出版得到了科学出版社领导和编辑的大力支持和帮助, 海军工程大学训

练部领导、理学院领导以及应用数学系的同事们给予我们以关心和支持，在此谨向他们表示诚挚的谢意. 此外, 在本书编写过程中我们参考了大量资料，对于书后所列参考文献的作者一并表示衷心的感谢！

本书第 1～3 章由李卫军编写, 第 4, 5 章由王公宝编写, 第 6 章由何汉林编写, 全书由王公宝负责统稿、定稿工作.

由于编者水平所限, 不足之处在所难免, 敬请专家和读者批评指正.

编　者

2014 年 3 月

# 目　录

# 第 1 章 Lebesgue 测度

本章先简要地介绍实变函数的一些基本知识, 包括集合与映射、可数集与不可数集、$\mathbb{R}^n$中的拓扑, 然后将"长度""面积""体积"的概念推广为 Lebesgue（勒贝格）测度, 最后介绍 Lebesgue 不可测集.

## 1.1 集合与实数集

本节简要介绍集合与实数集的一些基本知识, 这些基本知识是学习实变函数与泛函分析的必要准备. 在介绍过程中, 我们将略去某些数学分析中的定理证明, 对这些定理证明感兴趣的读者, 可参阅相应的数学分析教材.

### 1.1.1 集合及其运算

这里简要回顾一下集合的几种运算.

**并集** 设 $A, B$ 是两个集合, 由 $A$ 的元素与 $B$ 的元素的全体构成的新集合称为 $A$ 与 $B$ 的**并集**, 记为 $A\bigcup B$. 于是有 $x\in A\bigcup B \Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$.

设$\left\{A_\lambda \middle| \lambda\in I\right\}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 为某一族确定的集合($I$是指标$\lambda$的一个集合, 称为指标集), 称由各 $A_\lambda$ 的元素的全体构成的新集合为它们的并集, 记为$\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$. 于是有

$$x\in\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda_0\in I, 使得\ x\in A_{\lambda_0}.$$

**交集** 设 $A, B$ 是两个集合, 由 $A, B$ 的公共元素组成的新集合称为 $A$ 与 $B$ 的**交集**, 记为 $A\bigcap B$. 于是有 $x\in A\bigcap B\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$.

定义$\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$ 为所有 $A_\lambda(\lambda\in I)$ 的公共元素组成的集合, 即 $x\in\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda \Leftrightarrow \forall\lambda\in I$, 有 $x\in A_\lambda$.

**定理 1.1.1** 设 $B$ 是一个集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是一族集合, 则有如下分配律:

(1) $B\bigcap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\bigcap A_\lambda)$;

(2) $B\bigcup\left(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\right)=\bigcap\limits_{\lambda\in I}(B\bigcup A_\lambda)$.

**证** (1) 只需证明等式两边的集合互相包含即可. $\forall x\in B\bigcap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\right)$, 有 $x\in B$, 且 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$, 即$\exists\lambda_0\in I$, 使得 $x\in A_{\lambda_0}$, 从而 $x\in B\bigcap A_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\bigcap A_\lambda)$, 故有

$$B\bigcap\left(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\right)\subset\bigcup_{\lambda\in I}(B\bigcap A_\lambda).$$

又 $\forall x\in\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\bigcap A_\lambda)$, 必$\exists\lambda_0\in I$, 使得 $x\in B\bigcap A_{\lambda_0}$, 即有 $x\in B$, 且 $x\in A_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$, 从而

$x\in B\cap\left(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\right)$, 所以

$$\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)\subset B\cap\left(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\right).$$

于是

$$B\cap\left(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda).$$

(2) 证明留作习题.

**差集及余集** 设 $A, B$ 是两个集合, 定义 $A$ 与 $B$ 的**差集** $A\setminus B$ 为属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素的全体组成的集合, 于是 $x\in A\setminus B\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$. $A$ 与 $B$ 的差集也记为 $A-B$.

若 $B\subset A$, 则称差集 $A\setminus B$ 为 $B$ 关于 $A$ 的**余(或补)集**. 今后, 所讨论的集合往往都是某个基本集 $X$ 的子集, 就简单地把差集 $X\setminus A$ 称为 $A$ 的**余(或补)集**, 记作 $A^{\mathrm{C}}$, 即 $A^{\mathrm{C}}=X\setminus A(A\subset X)$.

显然,

$$A\setminus\varnothing=A;\quad A\setminus A=\varnothing;\quad \varnothing\setminus A=\varnothing;\quad X^{\mathrm{C}}=\varnothing;\quad \varnothing^{\mathrm{C}}=X;$$
$$(A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}}=A;\quad X=A\cup A^{\mathrm{C}}\ (A\subset X);$$
$$\text{若 } A\subset B\text{, 则 } B^{\mathrm{C}}\subset A^{\mathrm{C}}.$$

**定理 1.1.2** 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是一族集合(它们都是 $X$ 的子集), 则有如下 **De Morgan 律**:

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}=\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$;

(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$.

**证** 只证(2), (1)的证明留作习题.

$\forall x\in\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}$, 即 $x\in X$, 且 $x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$, 于是 $\exists\lambda_0\in I$, $x\notin A_{\lambda_0}$, 又 $x\in X$, 故 $x\in A_{\lambda_0}^{\mathrm{C}}\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$, 从而 $\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$; 反之, $\forall x\in\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$, 则 $\exists\lambda_0\in I$, 使得 $x\in A_{\lambda_0}^{\mathrm{C}}$, 即 $x\in X$, 且 $x\notin A_{\lambda_0}$, 而 $\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\subset A_{\lambda_0}$, 故 $x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$, 于是 $x\in\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}$, 所以 $\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}\subset\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}$, $\left(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\right)^{\mathrm{C}}=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^{\mathrm{C}}$.

**幂集** 设 $A$ 是一集合, 由 $A$ 的所有子集(包括空集及 $A$ 本身)构成的集合, 称为集合 $A$ 的**幂集**, 记作 $P(A)$. 例如, 若 $A=\{1,2,3\}$, 则 $A$ 的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

容易知道, $n$ 个元素的集合的幂集有 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=(1+1)^n=2^n$ 个元素.

基于这个事实, 往往也把一般集合 $A$ 的幂集 $P(A)$ 记作 $2^A$, 即 $P(A)=2^A$. 应该注意的是空集 $\varnothing$ 的幂集仅含一个元素 $\varnothing$, 即 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, 空集的幂集不再是空集.

**定义 1.1.1 (Descartes 积)** 由 $n$ 个具有给定次序的元素组成的序列, 称为**有序 $n$ 元组**, 其记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

有序 $n$ 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中第 $i$ 个元素 $a_i$, 称为该有序 $n$ 元组的第 $i$ 个分量. 当 $n=2$ 时又称 $(a,b)$ 为有序对. 两个有序 $n$ 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是相等的, 当且仅当 $a_i=b_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 因此对于由数构成的有序对, 有 $(1,2)\neq(2,1)$.

**定义 1.1.2**　集合 $A$ 与 $B$ 的 **Descartes** 积定义为

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B\},$$

它是有序对 $(a,b)$ 的集合.

一般地, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个集合, 定义它们的 **Descartes** 积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

**例 1.1.1**　设 $A=\{0,1\}$, $B=\{0,2\}$, 则

$$A\times B=\{(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\},$$
$$B\times A=\{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\},$$

可见 $A\times B\neq B\times A$.

**例 1.1.2**　设 $A,B$ 均为实数集 $\mathbb{R}$, 则

$$\mathbb{R}^2\triangleq\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\};$$
$$\mathbb{R}^n\triangleq\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{个}}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

习惯上在讨论几何问题或使用几何的语言描述问题时, 把集合的元素称为**点**. 今后我们将使用下列集合而不加解释:

$\mathbb{N}$ 为全体正整数的集; $\mathbb{Z}$ 为全体整数的集; $\mathbb{Q}$ 为全体有理数的集; $\mathbb{R}$ 为全体实数的集; $\mathbb{C}$ 为全体复数的集.

### 1.1.2　映射

映射是现代数学中的一个基本概念. 把实数集上的函数概念推广到一般的集合上就得到了映射的概念.

**定义 1.1.3**　设 $A,B$ 是两个非空集合, $f$ 是一个对应规则, 它使得对每个 $x\in A$, 对应唯一的元素 $y\in B$, 记为 $y=f(x)$ 或 $f:x\mapsto y$, 称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个**映射**, 记作

$$f:A\to B\quad\text{或}\quad A\xrightarrow{f}B,$$

$A$ 称为映射 $f$ 的**定义域**, 记为 $D(f)$; $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 称为映射 $f$ 的**值域**或称为 $A$(在 $f$ 下)的像. 一般地, $f(A)\subset B$, 我们把值域 $f(A)$ 又记作 $R(f)$, $A\times B$ 中子集

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x), x\in A\}$$

称为映射 $f$ 的**图形或图像**.

当 $B$ 为数域时, 称映射 $f$ 为**泛函**.

映射有时又称为**算子**或**变换**. 设 $f,g:A\to B$ 是两个映射, 若 $\forall x\in A$, 都有 $f(x)=g(x)$, 则称 $f$ 与 $g$ 是相等的, 记为 $f=g$.

设 $X$ 为非空集, 通常称 $f:x\mapsto x(\forall x\in X)$ 为 $X$ 上的**恒等映射**, 记为 $I_X$. 若 $X\subset Y$, 称 $i:a\mapsto a(\forall a\in X)$ 为 $X$ 到 $Y$ 的一个**包含映射**.

**例 1.1.3**　设 $C^{(1)}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有具有一阶连续导数的函数的集合, $C[a,b]$ 表示

$[a,b]$上全体实(复)值连续函数的集合, 那么求导运算$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$就定义了一个映射$f$, 即

$$f: C^{(1)}[a,b] \to C[a,b], \quad f: x(t) \mapsto x'(t).$$

**例 1.1.4** 定积分$fx = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t\,(\forall x \in C[a,b])$定义了$C[a,b]$上的一个实(或复)泛函.

**定义 1.1.4** 设$f$是$A$到$B$的一个映射, 若$f(A)=B$, 即对$B$中的每个元素$y$, 都存在$A$中元素$x$(一个或几个), 使得$f(x)=y$, 则称$f$是一个**满射**; 若对$f(A)$中的每个元素$y$, 都存在$A$中唯一的元素$x$, 使得$f(x)=y$, 或者等价于$A$中任意两个不同元素$x_1$与$x_2$, 都有$f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称$f$是一个**单射**; 既是满射, 又是单射, 也就是说, 对于$B$中的每个元素$y$, 都存在$A$中唯一的元素$x$, 使得$f(x)=y$, 则称$f$是一个**双射**(**一一对应或一一映射**).

例 1.1.3、例 1.1.4 中的映射均是满射而不是单射.

**例 1.1.5** (**坐标变换——旋转及平移**) $f:(x,y)\mapsto(x',y')$为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b, \end{cases} \quad \theta, a, b \text{固定},$$

定义了一个映射$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 它是双射. 特别地, 当$\theta=0, a=b=0$时, $f$是恒等映射.

设有映射$f: X\to Y$, 若$A\subset X$, 记$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}\subset Y$; 若$B\subset Y$, 记$f^{-1}(B)=\{x\,|\,f(x)\in B, x\in X\}\subset X$; 当$B=\{b\}$时, $f^{-1}(\{b\})$简记为$f^{-1}(b)$.

**定理 1.1.3** 设$X, Y$为非空集合, $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$, $A_\lambda\subset X(\lambda\in I)$, $B_\mu\subset Y$ $(\mu\in T)$, 这里$I, T$为指标集, 则有下面的关系式成立:

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$, 当$f$是单射时等式成立;

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$, 当$f$是满射时等式成立;

(3) $f\left(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$;

(4) $f\left(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\right)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$;

(5) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$;

(6) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)=\bigcap\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$;

(7) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)\,(B_1,B_2\subset Y)$.

**证** 仅证(1)和(5), 其余的留给读者.

(1) 对$\forall a\in A$, 因$f(a)\in f(A)$, 故$a\in f^{-1}(f(A))$, 于是$A\subset f^{-1}(f(A))$. 若$f$是单射, 那么对$\forall x\in f^{-1}(f(A))$, 有$f(x)\in f(A)$, 即$\exists a\in A$, 使得$f(x)=f(a)$. 因$f$是单射, 故$x=a$, 于是$x\in A$, 因此$f^{-1}(f(A))\subset A$.

综上所述, 当$f$是单射时有$A=f^{-1}(f(A))$.

(5) 对于$\forall a\in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)$, 则有$f(a)\in\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$, 所以$\exists\mu_0\in T$, 使得$f(a)\in B_{\mu_0}$, 即$a\in f^{-1}(B_{\mu_0})\subset\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$, 因此$f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)\subset\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$.

对于 $\forall a\in\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$，则 $\exists\mu_0\in T$，使得 $a\in f^{-1}(B_{\mu_0})$，于是 $f(a)\in B_{\mu_0}\subset\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$，从而 $a\in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)$，因此有 $\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)\subset f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)$.

综上所述，有 $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu\right)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$.

**定义 1.1.5**　设有映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$．若映射 $\varphi:A\to Y$ 满足对 $\forall a\in A$，有 $\varphi(a)=f(a)$，则称 $\varphi$ 为映射 $f$ 在 $A$ 上的**限制**，记作 $\varphi=f|_A$．

与定义 1.1.5 相反的概念是定义 1.1.6.

**定义 1.1.6**　设有映射 $\varphi:A\to B$，且 $A\subset X$，$B\subset Y$，若映射 $f:X\to Y$ 满足对 $\forall x\in A$，有 $f(x)=\varphi(x)$，则称映射 $f$ 为 $\varphi$ 从 $A$ 到 $X$ 的一个**延拓**.

例如，$A\subset B$，包含映射 $i:A\to B$ 是恒等映射 $I_B$ 在 $A$ 上的限制，而恒等映射 $I_B$ 可看成是包含映射 $i:A\to B$ 的一个延拓.

类似于复合函数概念，也可以定义映射的复合.

**定义 1.1.7**　设有映射 $f:A\to B$ 及 $g:B\to C$，由 $f,g$ 确定的 $A$ 到 $C$ 的映射

$$h:a\mapsto g(f(a))\quad(\forall a\in A),$$

称为映射 $f$ 和 $g$ 的**复合**，记为 $h=g\circ f$，即

$$h(a)=g(f(a))\quad(\forall a\in A).$$

有时将 $g\circ f$ 简记为 $gf$．

类似可定义 3 个或 3 个以上映射的复合．容易验证关于映射的复合满足结合律：

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

**定义 1.1.8**　设有映射 $f:A\to B$，若存在映射 $g:B\to A$，使得 $g\circ f=I_A$，$f\circ g=I_B$，则称 $f$ 是**可逆映射**，$g$ 称为 $f$ 的**逆映射**.

**定理 1.1.4**　设 $f:A\to B$ 是可逆映射，则其逆映射是唯一的.

**证**　设 $g_1$，$g_2$ 均为 $f$ 的逆映射，则 $g_k\circ f=I_A$，$f\circ g_k=I_B\,(k=1,2)$，故

$$g_1=g_1\circ I_B=g_1\circ(f\circ g_2)=(g_1\circ f)\circ g_2=I_A\circ g_2=g_2.$$

由于可逆映射 $f$ 的逆映射是唯一的，今后就用符号 $f^{-1}$ 表示 $f$ 的逆映射.

**定理 1.1.5**　$f:A\to B$ 是可逆映射的充要条件是 $f$ 是双射.

**证**　必要性　设 $f$ 是可逆映射，$f^{-1}$ 是 $f$ 的逆映射，$\forall a_1,a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$．因为

$$a_1=I_A(a_1)=(f^{-1}f)(a_1)=f^{-1}(f(a_1)),$$

$$a_2=I_A(a_2)=(f^{-1}f)(a_2)=f^{-1}(f(a_2)),$$

且 $a_1\neq a_2$，即 $f^{-1}(f(a_1))\neq f^{-1}(f(a_2))$，于是 $f(a_1)\neq f(a_2)$，所以 $f$ 是单射.

因为 $\forall b\in B$，$b=I_B(b)=(ff^{-1})(b)=f(f^{-1}(b))$，即 $\exists f^{-1}(b)\in A$，使得 $f(f^{-1}(b))=b$，所以 $f$ 是满射.

综上所述 $f$ 是双射.

充分性　设 $f:A\to B$ 是双射，则对 $\forall b\in B$，$A$ 中有唯一元素 $a$ 使得 $f(a)=b$，定义映射 $g:B\to A$ 为 $g(b)=a$．显然，$\forall b\in B$，$f\circ g(b)=f(g(b))=f(a)=b$，故 $f\circ g=I_B$；又 $\forall a\in A$，$g\circ f(a)=g(f(a))=g(b)=a$，故 $g\circ f=I_A$．由可逆映射的定义知 $f$ 是可逆映射，且 $g$ 是

$f$的逆映射.

### 1.1.3 可数集与不可数集

在抽象地研究集合的时候，集合中所含元素的多少是一个重要的概念. 有限集与无限集，可数集与不可数集，这些都是数学上常常碰到的概念. 如何判断一个集合所含元素的多少呢? 对有限集而言，要知其元素的个数最直接的方法是把集合中元素一个一个地"数"出来，这等于将集合中各元素按某一方式给它们编号: $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中 $i\neq k$ 时，$a_i$ 和 $a_k$ 是不同的元素. 这样就把集合 $A$ 和自然数列的某一个片断$\{1, 2, \cdots, n\}$一一对应起来，最后对应的一个自然数 $n$ 显然就是 $A$ 中的元素的个数. 有时候，并不需要确切地知道两个集合 $A$ 与 $B$ 所含元素的个数，但却要知道它们所含的元素谁多谁少，此时最行之有效的办法是将 $A$ 的元素与 $B$ 的元素对应起来. 为此引入下面的概念.

**定义 1.1.9** 设 $A, B$ 是两个集合，如果存在一个从 $A$ 到 $B$ 的双射 $f$，则称 $A$ 与 $B$ 是**对等**的，记为 $A\sim B$.

容易验证，对等关系是一种等价关系，即

(1) **自反性** $A\sim A$;

(2) **对称性** 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$;

(3) **传递性** 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

此外，易验证对等还有下面的性质.

(4) 设 $\{A_\lambda \mid \lambda\in I\}$，$\{B_\lambda \mid \lambda\in I\}$ 为两族集，$I$ 是指标集，又设对每个 $\lambda\in I$，都有 $A_\lambda\sim B_\lambda$，而且集族 $\{A_\lambda\}$ 中任意两个集不相交，即 $A_\lambda\bigcap A_\mu=\varnothing(\lambda\neq\mu;\lambda,\mu\in I)$，且 $\{B_\lambda\}$ 中任意两个集也不相交，则

$$\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in I}B_\lambda.$$

欲判断两个集合对等，常用到下面的定理.

**定理 1.1.6 (Bernstein)** 设 $A, B$ 是两个集合，若 $A\sim B_1\subset B$，且 $B\sim A_1\subset A$，则 $A\sim B$.

**证** 略.

**推论 1.1.1** 设 $A\subset B\subset C$，若 $A\sim C$，则 $A\sim B\sim C$.

**证** 因 $B\sim B\subset C$，$C\sim A\subset B$，故由 Bernstein 定理得 $B\sim C\sim A$.

基于上面集合对等的性质，可以将集合进行分类，把彼此对等的集合归为同一类.这样，任一集合必属于某一类且只属于该类.

**定义 1.1.10** 设 $A, B$ 是两个集合.

(1) 若 $A\sim B$，则称 $A$ 和 $B$ 具有相同的**势**(或**基数**)，或称 $A$ 与 $B$ **等势**，用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 $A$ 的势，$A$ 和 $B$ 具有相同的势时，记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$;

(2) 如果 $A$ 对等于 $B$ 的某个子集，则称 $A$ 的势小于或等于 $B$ 的势或者 $B$ 的势大于或等于 $A$ 的势，记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，或 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{A}}$；如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，且 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，则称 $A$ 的势小于 $B$ 的势或 $B$ 的势大于 $A$ 的势，记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

由集合势的定义, Bernstein 定理及其推论又可表述为:

若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, 且 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$;

若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$, 且 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$.

对有限集而言, 两个集合具有相同的势, 意味着它们所含元素个数相等. "势" 的概念是有限集合中元素 "个数" 的推广.

**例 1.1.6** 设 $N_1 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, 作映射 $f: \mathbb{N} \to N_1$ 为 $f(n) = 2n (\forall n \in \mathbb{N})$, 易验证 $f$ 为双射, 故 $\mathbb{N} \sim N_1$, $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{N_1}}$.

**例 1.1.7** 实数集 $\mathbb{R}$ 中的区间 $(-1,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 具有相同的势. 事实上, 令 $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) (\forall x \in (-1,1))$, 则 $f$ 是 $(-1,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个双射. 设 $(a,b)(a<b)$ 为任意有限开区间, 则 $(a,b)$ 与 $(-1,1)$ 等势, 因 $g(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ 是 $(-1,1)$ 到 $(a,b)$ 的双射, 所以 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{(a,b)}}$.

例 1.1.6 和例 1.1.7 说明, 无限集可以与其真子集具有相同的基数, 而有限集与其真子集不可能建立一一对应, 因而不可能具有相同的基数. 可以证明: 任何一个无限集必能与它的一个真子集等势; 反之也成立. 这正是无限集与有限集的本质区别.

**定义 1.1.11** 凡与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势的集合称为**可数集**或**可列集**. 一个集合是有限集或可数集时, 称为**至多可数**.

例 1.1.6 的集合 $N_1 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是可数集.

当 $A$ 是可数集时, 存在 $\mathbb{N}$ 到 $A$ 的双射 $f$, 若令 $f(i) = a_i (i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$, 则 $A$ 的元素可排列出来, 即

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

可数集的势用 $\aleph_0$ 表示, 读作阿列夫零.

集合 $A$ 至多可数, 当且仅当 $\overline{\overline{A}} \leqslant \aleph_0$.

**例 1.1.8** 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 即 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$.

**证** 每个有理数 $a$ 均可唯一地写成分母为正整数, 分子为整数的既约分数 $a = \frac{p}{q}$ $(q > 0)$. 按和数 $|p| + q = n$ 依 $n$ 由小到大排序(删去重复者), 例如, $n=1$ 时的分数只有 $\frac{0}{1}$, $n=2$ 时的分数是 $\frac{1}{1}$ 和 $\frac{-1}{1}$, $n=3$ 的分数是 $\frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ 等, 这样将一切有理数排列如下:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \cdots,$$

然后再按这一顺序与一切自然数集 $\mathbb{N}$ 建立一一对应关系, 因此 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

**定理 1.1.7** 可数集的任一子集至多可数.

**证** 设 $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$, $\forall A_1 \subset A$, 由 $A_1 \sim A_1 \subset A$ 及定义 1.1.10 知, $\overline{\overline{A_1}} \leqslant \overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

**例 1.1.9** 直线上一切互不相交的开区间构成的集合至多可数. 事实上, 每个开区间 $(a,b)$ 内至少包含一个有理点, 因此, 只要使得开区间与其中的某一有理点相对应, 一切互

不相交的开区间就与有理数集的一个子集一一对应, 由定理 1.1.7 即知结论成立.

**例 1.1.10**　定义在区间上的单调函数的间断点构成的集合是至多可数集.

**证**　不妨设 $f(x)$ 为单调增加函数. 设 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点, 则 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ 均存在, 且 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$, 故 $x_0$ 唯一对应于 $y$ 轴上的一个开区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$, 而所有这些开区间都互不相交, 由例 1.1.9 知结论成立.

**定理 1.1.8**　(1) 有限个或可数个可数集的并仍是可数集;

(2) 有限个可数集的 Descartes 积是可数集.

**证**　(1) 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是可数个可数集, 不妨设它们两两不相交 $\left(\text{否则, 令 } B_1=A_1,\ B_i=A_i-\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k\text{, 则当 } i\neq j \text{ 时, } B_i\cap B_j=\varnothing\text{, 且 }\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i\right)$, 令 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, 把 $A_1,A_2,\cdots$ 的一切元素排成如下形式

$$\begin{aligned}
A_1&=\{a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},\cdots\},\\
A_2&=\{a_{21},a_{22},a_{23},a_{24},\cdots\},\\
A_3&=\{a_{31},a_{32},a_{33},a_{34},\cdots\},\\
A_4&=\{a_{41},a_{42},a_{43},a_{44},\cdots\},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

然后再将所有这些元素 $a_{ij}$ 按脚标之和 $i+j$ 从小到大依次排列 (当和 $i+j$ 相等时, 依照第一个脚标 $i$ 从小到大依次排列), 则 $S$ 可表示成为一个无穷序列

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},a_{15},a_{24},a_{33},a_{42},a_{51},\cdots,$$

故 $S$ 是可数集.

对于有限个可数集的情形, 令 $S_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, 则 $A_1\subset S_n\subset S$, 由 $\overline{\overline{A_1}}=\overline{\overline{S}}=\aleph_0$ 及推论 1.1.1 知 $\overline{\overline{S_n}}=\aleph_0$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$ 是可数集, 则 $A\times B$ 的元素为

$$(a_i,b_j)\quad (i,j=1,2,\cdots,n,\cdots).$$

与 (1) 证明相仿, 将所有这些元素 $(a_i,b_j)$ 按脚标之和 $i+j$ 从小到大依次排列 (当和 $i+j$ 相等时, 依照第一个脚标 $i$ 从小到大依次排列), 则 $A\times B$ 可表示成为一个无穷序列

$$(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1),\cdots,$$

因而 $A\times B$ 是可数集.

归纳假设 $n=k$ 时 (2) 成立, 即 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 是可数集, 易知 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}\sim(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}$, 而 $(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}$ 是两个可数集的 Descartes 积, 由上面的证明知, 它是可数集, 故 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}$ 是可数集.

**定理 1.1.9**　任一无限集都包含可数子集.

**证**　设 $M$ 是无限集, 在 $M$ 中任取一元素 $a_1$, 可在 $M$ 中找到异于 $a_1$ 的元素 $a_2$. 假设已找到了 $n$ 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 由于 $M$ 是无限集, 故 $\exists a_{n+1}\in M\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 如此继