普通高等教育应用技术本科规划教材

线性代数

主　编　朱长青　杨策平
副主编　张凯凡　常　涛

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育应用技术本科规划教

线性代数

主　编　朱长青　杨策平

副主编　张凯凡　常　涛

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据当前科学技术发展形势的需要，结合编者多年来对线性代数教学内容和教学方法改革与创新的成果而编写的. 全书共分 5 章，分别是行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组、特征值与特征向量、二次型. 本书的主要特点是注重数学与工程技术的有机结合，其中的许多例题和习题本身就是来自实际的应用. 同时，对数学中纯理论性概念、定理、方法的介绍注意结合学生的实际，尽量采用学生易于理解、容易接受的方式，进行深入浅出的讲解，从而最大限度地降低学生学习的难度.

本书可作为普通高等院校理工科各专业的应用型人才，包括应用技术类、经济管理类等专业作为教材，也可供其他专业和广大自学者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 朱长青，杨策平主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5608-5553-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①朱…②杨… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 133532 号

普通高等教育应用技术本科规划教材

线性代数

主编 朱长青 杨策平 副主编 张凯凡 常 涛

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐逢乔 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 14

印 数 1—4 100

字 数 280 000

版 次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5553-0

定 价 28.00 元

普通高等教育应用技术本科规划教材

编　委　会

前　言

当人类进入21世纪之后，随着社会的进步、经济的发展、计算机技术的广泛应用，数学在其中的作用变得越来越突出，科学技术研究中所用到的数学方法越来越高深，数学化已成为当今社会发展中各个研究领域中的重要趋势。

为赶超世界先进水平，近年来我国高等院校积极开展高等教育的教育教学改革，努力向国外先进水平看齐，其中大学数学的教学内容和教学方法改革首当其冲，这大大提高了大学数学的适用性。

本书是根据当前科学技术发展形势的需要，结合我们多年来对线性代数教学内容和教学方法改革与创新的成果而编写的，其主要特点是注重数学与工程技术的有机结合，其中的许多例题和习题本身就是来自于实际的应用。同时，我们对数学中的纯理论性的东西如概念、定理、方法的介绍注意结合学生的实际，尽量采用学生易于理解、容易接受的方式，进行深入浅出的讲解，从而最大限度地降低学生学习的难度。

本书由朱长青、杨策平主编，张凯凡、常涛任副主编。参加编写的人员有：杨策平、朱长青、王红、张凯凡、常涛、朱玲、徐循、李家雄、耿亮、胡二琴、朱莹、曾莹等老师，最后由杨策平、朱长青统稿定稿。

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时予以修订。

编　者

2014年8月

目　　录

前言

第 1 章　行列式 …… 1
§ 1.1　行列式的概念 …… 1
一、二阶和三阶行列式 …… 1
二、全排列及其逆序数 …… 2
三、n 阶行列式的概念 …… 3
§ 1.2　行列式的性质 …… 6
一、行列式的基本运算性质 …… 6
二、行列式按行(列)展开 …… 9
§ 1.3　行列式的计算 …… 12
一、利用行列式定义 …… 12
二、利用范德蒙德行列式 …… 13
三、利用三角行列式 …… 14
四、利用降阶法 …… 16
五、用递推法 …… 17
六、用数学归纳法 …… 18
§ 1.4　克莱姆法则 …… 19
习题 1 …… 21

第 2 章　矩阵 …… 25
§ 2.1　矩阵的概念 …… 25
§ 2.2　矩阵的运算 …… 28

一、矩阵的加法 …… 28
二、数与矩阵相乘 …… 28
三、矩阵与矩阵相乘 …… 29
四、矩阵的转置 …… 33
五、方阵的行列式 …… 35
§2.3 逆矩阵 …… 37
§2.4 分块矩阵 …… 42
§2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵 …… 46
一、矩阵的初等变换 …… 46
二、初等矩阵 …… 49
三、初等变换法求逆矩阵 …… 51
四、矩阵的秩 …… 53
习题2 …… 57

第3章 向量组的线性相关性与线性方程组 …… 62
§3.1 向量组及其线性组合 …… 62
一、向量的概念 …… 62
二、线性组合 …… 64
三、向量空间 …… 65
§3.2 向量组的线性相关性 …… 65
一、线性相关性的概念 …… 65
二、线性相关性的判定 …… 66
§3.3 向量组的秩 …… 69
一、向量组的等价 …… 69
二、向量组的最大无关组以及向量组的秩 …… 71
§3.4 线性方程组的解的结构 …… 74
一、线性方程组的解的结构定理 …… 74
二、齐次线性方程组的基础解系 …… 75
三、非齐次线性方程组的解法 …… 78

习题 3 …… 83

第 4 章　特征值与特征向量 …… 88

§4.1　特征值与特征向量 …… 88

一、特征值与特征向量的定义 …… 88

二、关于特征值与特征向量的若干结论 …… 93

§4.2　相似矩阵和矩阵的相似对角化 …… 94

§4.3　向量内积和正交矩阵 …… 99

一、向量内积 …… 99

二、正交矩阵 …… 103

§4.4　实对称矩阵正交对角化 …… 105

习题 4 …… 108

第 5 章　二次型 …… 111

§5.1　二次型及其矩阵表示 …… 111

一、二次型及其矩阵表示 …… 111

二、矩阵的合同关系 …… 113

§5.2　标准形 …… 114

一、二次型的标准型 …… 114

二、配方法 …… 115

§5.3　唯一性 …… 118

§5.4　正定二次型 …… 120

一、正定二次型 …… 120

二、正定二次型的判别 …… 121

习题 5 …… 123

参考答案 …… 125

第1章　行　列　式

行列式是数学中最重要的基本概念之一，也是线性代数主要研究对象之一. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及求解 n 元线性方程组的克拉姆法则.

§1.1　行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

1. 二阶行列式

在中学用加减消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

在引入上述记号中，横排称为**行**，竖排称为**列**，所以称为**二阶行列式**. 数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，其中，第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆，如图 1-1 所示.

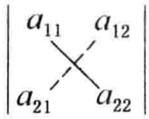

图 1-1

实线称为主对角线，虚线称为副对角线. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

2. 三阶行列式

与二阶行列式类似，引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其定义符合图 1-2 所示的对角线法则：三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上的元素乘积冠以正号，虚线上的元素乘积冠以负号.

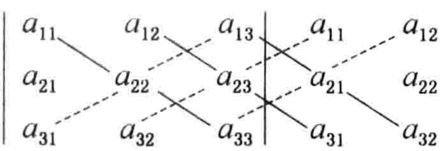

图 1-2

对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，对于更高阶行列式，我们需要借助全排列的知识.

二、全排列及其逆序数

在中学数学中，把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列（简称排列），用 P_n 表示 n 个不同元素所有排列的种数.

定义 1 在一个排列中,如果两个数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个**逆序**,一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如,排列 321 有 3 个逆序,为 32, 31, 21,则 $\tau(321)=3$.

定义 2 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如,321 是奇排列,312 是偶排列.

例 1 求排列 25341 的逆序数.

解 在排列 25341 中,2 的后面比 2 小的数有 1 个,即 1,故逆序数是 1;5 的后面比 5 小的数有 3 个,即 3, 4, 1,故逆序数是 3; 3 的后面比 3 小的数有 1 个,即 1,故逆序数是 1; 4 的后面比 4 小的数有 1 个,即 1,故逆序数是 1; 1 排在末位,后面没有比 1 小的数,故逆序数为 0,于是这个排列的逆序数为

$$\tau(25341)=1+3+1+1+0=6.$$

定义 3 把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列. 这样一个变换称为对换.

例如,经过 1, 2 对换,排列 321 就变成了 312. 显然,如果连续施行两次相同的对换,那么排列就还原了.

关于排列的奇偶性,我们有下面的定理.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

定理 2 任意一个 n 级排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

三、n 阶行列式的概念

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的规律. 三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

容易看出三阶行列式有如下特点:

(1) 三阶行列式是 3!项的代数和;

(2) 三阶行列式的每项都是不同行不同列的三个元素的乘积;

(3) 每项都按下列规则带有确定的符号:若记一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式,则 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$.

这样,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

由此,给出 n 阶行列式的一般情形.

定义 4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 的代数和,当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是偶排列时,$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 带正号,当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇排列时,$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

其中,$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的. 当 $n = 1$ 时,一阶行列式 $|a| = a$,注意不要与绝对值的记号相混淆.

定理 3 n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

例 2 计算下列四阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 D 的一般项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，因为第 4 行的元素除第 4 列的元素外，其余元素均为零，故 j_4 只能取 4，而第 1 行的元素除第 1 和第 4 列的元素外，其余元素均为零. 因此，对于行列式中可能的非零项来说，j_1 只能取 1，j_4 只能取 4，于是当 $j_1=1$，$j_4=4$ 时，

$$\begin{cases} j_2=2, & j_3=3, \\ j_2=3, & j_3=2, \end{cases}$$

所以，这个四阶行列式的 $4!=24$ 项的乘积和只有以下 2 项不为零，即

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}.$$

这 2 项的符号分别由 $(-1)^{\tau(1234)}$，$(-1)^{\tau(1324)}$ 来决定，故

$$D=acfh-adeh.$$

例 3 计算下列 n 阶上三角行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$. 我们只需求出非零项即可，按行列式的定义，非零项的 n 个元素在第 1 列只能取 a_{11}（否则该项为零），第 2 列只能取 a_{22}，…，第 n 列只能取 a_{nn}. 于是，此行列式除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，其余各项均为零，所以行列式的值为

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角线以下（上）的元素全为零的行列式称为上（下）三角行列式，其值都等于主对角线上各元素之积. 特别地，对于主对角线以外的元素全为零的对角行列式来说，它的值与三角行列式一样，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

利用行列式的定义，同理可得

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

副对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为次上(下)三角行列式.特别地，对于副对角线以外的元素全为零的次对角行列式来说，有

$$\begin{vmatrix} & & & l_1 \\ & & l_2 & \\ & \iddots & & \\ l_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} l_1 l_2 \cdots l_n.$$

§1.2 行列式的性质

用行列式定义计算一般的行列式，是十分复杂甚至是不可能的事情，因此需要研究行列式的性质，并用性质简化行列式的计算.

一、行列式的基本运算性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

此性质说明，行列式中的行和列有相同的地位，行列式的性质凡是对行成立

的,对列也成立,反之亦然.

利用性质1,可知下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质2 交换行列式两行(列)的位置,行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换行列式的 i, j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换行列式的 i, j 两列,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零. 即

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & (i) \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & (j) \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array} = 0.$$

性质3 一个数乘以行列式等于用这个数乘以行列式中的任意一行(列).

第 i 行(列)乘以 k,记作 $r_i \times k(c_i \times k)$.

推论2 行列式中某行(列)的公因子 k 可以提到行列式符号外面.

第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k(c_i \div k)$.

性质4 若一个行列式中有两行(列)对应元素成比例,或有一行(列)元素全为零,则行列式等于零.

性质5 若 n 阶行列式 D 中第 i 行(列)元素都是两数之和,则 D 可以分拆成两个行列式的和: $D=D_1+D_2$,其中 D_1 和 D_2 中第 i 行(列)的元素分别取第一个和第二个数,而 D_1 和 D_2 中其余的元素均与 D 相同. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1'} & a_{i2}+a_{i2'} & \cdots & a_{in}+a_{in'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1'} & a_{i2'} & \cdots & a_{in'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行(列)的各元素乘以同一个数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上(记作 r_i+kr_j),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\div 6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1\\ r_3 - r_1}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

例 2 证明行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

证明

$$D \xlongequal[c_4 - c_1]{\substack{c_2 - c_1\\ c_3 - c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - 3c_3]{c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

二、行列式按行(列)展开

一般说来,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便,于是,我们将高阶行列式的计算转化为低阶行列式的计算问题. 为此,先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的元素构成 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},且记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,$A_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如,四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}.$$