大学数学系列课程

高等数学 上

学习指导与练习

湖南大学数学与计量经济学院 组编

刘开宇 孟益民 胡合兴 主编

湖南大学出版社

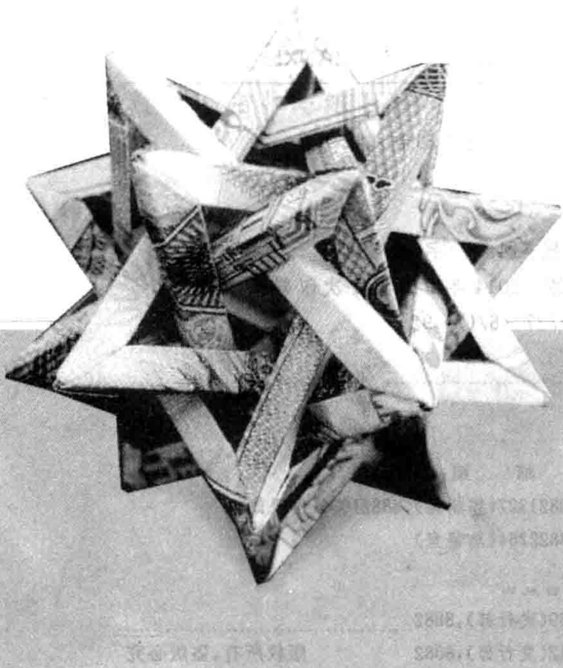
大学数学系列课程

高等数学（上）

学习指导与练习

湖南大学数学与计量经济学院 组编

刘开宇 孟益民 胡合兴 主编



湖南大学出版社

内容简介

本书是湖南大学数学与计量经济学院组编的大学数学系列教材中的《大学数学1》（理工类）及《微积分》（经济类）的配套学习辅导教材。本书编写的顺序与教材顺序大致相同，内容紧密联系原教材，并且又具有相对的独立性。内容包括集合与函数、极限、函数的连续性、函数的导数和微分、一元函数导数的应用、函数的积分、定积分的应用举例、常微分方程。书中每章由五个部分构成：一、内容要点与教学基本要求；二、释疑解难；三、典型例题分析和问题讨论；四、课内练习；五、课内练习解答与提示。

本书可作为理工类和经济类微积分课程的学习辅导与教学参考，也适合考研学生在基础阶段的复习时使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上）学习指导与练习/刘开宇，孟益民，胡合兴主编.
—长沙：湖南大学出版社，2014.9
（大学数学系列课程）
ISBN 978-7-5667-0737-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… ②孟… ③胡… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第207353号

高等数学（上）学习指导与练习
GAODENG SHUXUE (SHANG) XUEXI ZHIDAO YU LIANXI

作　　者：刘开宇　孟益民　胡合兴　**主编**
责任编辑：陈建华　**责任校对**：全　健　**责任印制**：陈　燕
特约编辑：彭亚新
印　　装：长沙瑞和印务有限公司
开　　本：787×1092　16开　**印张**：14.5　**字数**：392千
版　　次：2014年9月第1版　**印次**：2014年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5667-0737-6/O·92
定　　价：36.00元

出 版 人：雷　鸣
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　**邮　　编**：410082
电　　话：0731-88822559(发行部),88821327(编辑室),88821006(出版部)
传　　真：0731-88649312(发行部),88822264(总编室)
网　　址：http://www.hnupress.com
电子邮箱：presschenjh@hnu.edu.cn

大学数学系列课程

湖南大学数学与计量经济学院　组编

《高等数学(上)学习指导与练习》	主　编	刘开宇　孟益民　胡合兴
《概率论与数理统计学习指导与练习》	主　编	彭国强
	副主编	刘先霞
《高等数学(下)学习指导与练习》	主　编	肖　萍
	副主编	李永群
《线性代数学习指导与练习》	主　编	邓远北
	副主编	彭亚新　马传秀

编写说明

大学数学系列课程（包括高等数学（微积分）、线性代数和概率论与数理统计等）是高等学校主要的基础理论课，熟练掌握大学数学的基本概念、基本理论和基本方法，不仅对学生们学好后继的课程十分必要，而且对于他们今后的提高和发展也具有重要的影响和作用。

目前我国的高等教育已经逐渐从以往的精英教育转变为大众化教育，为提高学校的教学质量，诸多高校纷纷提出"大班授课，小班辅导"的教学模式，并加强"过程"教学和教学助理（TA）制度。为了适应高等学校教学形式的变化，我们尝试编写这套大学数学系列课程学习指导与练习丛书，一方面能为 TA 及小班辅导课提供教学的参考材料，另一方面能对学生们的课程学习提供辅导和帮助。

本套丛书在“学习指导”这一部分，通过释疑解惑、典型例题分析、习题课内练习、问题讨论等内容，使学生们能不断加深对基本概念和基本理论的理解，掌握数学的思维和方法，提高分析问题和解决问题的能力；在“练习”这一部分则提供课后的习题作业（活页），便于师生们使用。

这套丛书针对高等本科院校非数学类专业的高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学系列课程，在章节的编排上与我院目前组编的两套大学数学系列教材大致配合，以便能与课堂教学的需求保持同步，同时为让更多的读者使用起来方便，编写时也注意了本丛书相对的独立性。它可作为上述课程的学习辅导和教学参考，同时也适合考研学生在基础阶段的复习时使用。

为了编好这套丛书，我们组织了一些具有丰富教学经验的教师组成编写团队，并就本书的内容体系和结构进行了反复讨论，湖南大学出版社的领导和编辑也提出了许多宝贵的建议。尽管如此，由于我们对编写此类书还缺乏经验，又限于作者水平，书中不足之处在所难免，还望读者们批评指正。

本册《高等数学（上）学习指导与练习》由刘开宇、孟益民、胡合兴主编。我们对支持本书出版的湖南大学数学与计量经济学院各位老师、湖南大学教务处和湖南大学出版社表示衷心的感谢！

湖南大学数学与计量经济学院
2014 年 8 月

目　次

1　集合与函数

1.1　内容要点与教学基本要求

一、内容要点

1. 集合的概念及其表示，集合的关系与运算.
2. 映射的概念，恒等映射、单射、满射、双射，映射的相等与复合.
3. 函数的概念，函数的基本性质.
4. 函数的代数运算、复合函数、反函数.

二、教学基本要求

1. 熟练掌握集合的表示及其运算.
2. 理解函数概念，熟练掌握函数定义域及值域的求法.
3. 了解函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性，熟悉基本初等函数的性质及其图形特征.
4. 了解复合函数的概念以及函数的复合和分解的步骤.
5. 理解初等函数的概念，会建立简单实际问题中的函数关系式.

1.2　释疑解难

1. 如何判断两个函数是否相同？试举例说明.

答　首先要明确判断两个函数是否相同的依据就是函数定义的两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同(函数的值域也必相同)，那么这两个函数就是相同的.

例如：$f_1(x)=\dfrac{1}{x+2}$与$g_1(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$不为同一函数，因为它们的定义域不同. $D_{f_1}=\{x\,|\,x\neq-2\}$，$D_{g_1}=\{x\,|\,x\neq2,x\neq-2\}$；

$f_2(x)=\sin x$与$g_2(x)=\sqrt{\sin^2 x}$不为同一函数，因为对应法则不同. $g_2(x)=|\sin x|$；

$f_3(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$与$g_3(x)=1$为相同函数，因为定义域和对应法则都相同.

2. 设由函数

$$y = f(x) \tag{1}$$

所确定的反函数为

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

将式(2)中 x 与 y 互换得函数

$$y = \varphi(x), \tag{3}$$

试问(3)是否为(1)的反函数？两者图形有何关系？请举例说明.

答 由于习惯上我们用 x 表示函数的自变量,用 y 表示函数的因变量,而 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,所以 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数. $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在 xOy 坐标系下是同一个图形. 而 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是横坐标 x 与纵坐标 y 位置互换,即点 (x,y) 换成 (y,x),因此两者图形对称于直线 $y=x$,故 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$. 以指数函数 $y=a^x$ 为例,它与 $x=\log_a y$ 互为反函数,两者图形相同;$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数,两者图形关于直线 $y=x$ 对称.

3. 任意两个基本初等函数都可以复合成初等函数吗?

答 错. 根据复合函数的定义:设 $y=f(u)$,$u\in A$ 与函数 $u=g(x)$,$x\in B$,若 $g(B)\subset A$,则 $y=f(g(x))$ 是定义在 B 上的复合函数. 因此,函数的复合需要一定条件,任意两个基本初等函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$,如果 $u=g(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集为空集,则不能复合. 例如 $y=\ln u$,$u=-e^x$ 这两个函数是不能复合的. 因为对于 $u=-e^x$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(负数)都不能使 $y=\ln u$ 有意义.

1.3 典型例题分析和问题讨论

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;　　(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

解 (1)由 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$,可得

$$2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi,\ k=0,1,2,\cdots,$$

即

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2,\ k=0,1,2\cdots,$$

所以该函数定义域为 $\{x\mid 4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2, k\in\mathbf{N}\}$.

(2)由 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$,可得 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$,即 $x^2-5x+4\leqslant 0$,解得 $1\leqslant x\leqslant 4$.

又因为 $x+1>0$,即 $x>-1$.

综上述,该函数定义域为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$.

小结 函数定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 求函数定义域,一般应该注意下面几种情况:

①无理函数中遇到偶次方根时,定义域是使被开方式大于或等于 0 的实数集合;

②在分式函数中,定义域是使分母不等于 0 的实数集合;

③几个基本初等函数的定义域，对数函数 $y=\ln x$ 的定义域是$(0,+\infty)$，正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，余切函数 $y=\cot x$ 的定义域是$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$，反余弦函数 $y=\arccos x$的定义域是$[-1,1]$.

另外，若函数是从实际问题抽象出来的，则其定义域应符合实际意义.

例 2 讨论下列函数的奇偶性.

(1)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　　　(2)$y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$.

解 (1)因为$(x+\sqrt{x^2+1})$恒为正，函数定义域为$(-\infty,+\infty)$.

令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，有

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1}),$$

于是对任意的 x，有

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln 1=0,\end{aligned}$$

故 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

(2)函数定义域为$(-\infty,+\infty)$. 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}f(-x)&=-x\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}\\&=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),\end{aligned}$$

故该函数为偶函数.

例 3 研究下列函数的周期性.

(1)$y=\sin^2 x$；　　　　(2)$y=|\sin x|+|\cos x|$.

解 (1)由周期函数的定义，设有实数 $T\neq0$，满足

$$\sin^2(x+T)=\sin^2 x,$$

从而有

$$\frac{1}{2}[1-\cos 2(x+T)]=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

即　$\cos(2x+2T)=\cos 2x$，解此方程，得

$$2x+2T=2k\pi\pm 2x\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

由此有

$$T=k\pi\text{ 和 }T=k\pi-2x,$$

后式与 x 有关，不是周期，所以周期为 $T=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

故最小正周期为 $T=\pi$.

(2)设实数 $T\neq0$，满足

$$|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|,$$

两边平方得

$$2|\sin(x+T)|\cdot|\cos(x+T)|=2|\sin x|\cdot|\cos x|,$$

即
$$|\sin 2(x+T)|=|\sin 2x|,$$

于是
$$\sin^2 2(x+T)=\sin^2 2x,$$

即
$$\cos 4(x+T)=\cos 4x.$$

与(1)类似解得

$$T=\frac{k\pi}{2} \text{ 和 } T=\frac{k\pi-2x}{2} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

后式与 x 有关,不是周期,故该函数周期为

$$T=\frac{k\pi}{2} \quad (k=\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

故最小周期为 $T=\frac{\pi}{2}$.

例 4 已知 $f(x)$是周期为 π 的奇函数,且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)=\sin x-\cos x+2$,求当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$f(x)$的表达式.

解 由于 $f(x)$是奇函数,因此当$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -(\sin(-x)-\cos(-x)+2) \\ &= \sin x+\cos x-2, \end{aligned}$$

且 $f(0)=0$,又 $f(x)$是周期为 π 的周期函数,故当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-\pi) = \sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)-2 \\ &= -\sin x-\cos x-2. \end{aligned}$$

例 5 证明:若函数 $y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$对称,则函数 $f(x)$为周期函数.

证明 由于函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 对称,则对任意的 x 都有

$$f(x)=f[a+(a-x)]=f(2a-x). \tag{1}$$

又因为函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=b$ 对称,因此有

$$f(2a-x)=f[b+(b-2a+x)]=f[x+2(b-a)]. \tag{2}$$

由(1)和(2),对任意的 x 都有

$$f(x)=f(x+2(b-a)),$$

从而 $f(x)$是以 $2(b-a)$为周期的周期函数.

例 6 设 $\varphi(x)$,$\psi(x)$,$f(x)$均为单调增函数,证明:若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

则有 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

证明 由已知 $\varphi(x)\leqslant f(x)$，有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[\varphi(x)],$$

又因为 $\varphi(x)\leqslant f(x)$ 及 $f(x)$ 为增函数，则有

$$f[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)].$$

由 $f(x)\leqslant\psi(x)$，有

$$f[f(x)]\leqslant\psi[f(x)],$$

再由 $f(x)\leqslant\psi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为单调增函数，从而有

$$\psi[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

综上述，可得

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

例 7 证明函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 分别在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 与 $[1,+\infty)$ 上有界.

分析 要证函数 $f(x)$ 在某一区间 $[a,b]$ 上有界，只须找到一个正数 M，使得对于一切 $x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立；或者找到两个数 m,M（其中 $m<M$），使得对于一切 $x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立，其中 m,M 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下界与上界.

证明 因为 $\lg x$ 与 x 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，所以有

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2,\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0,$$

注意到 $\lg x\leqslant 0$，于是有

$$2\lg\frac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0.$$

从而 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上有界，$2\lg\dfrac{1}{2}$ 与 0 分别是它的下界与上界.

当 $x\in[1,+\infty)$，显然 $\dfrac{\lg x}{x}\geqslant 0$. 为证明该函数在此区间有上界，从图 1-1 可以看出，$\lg x\leqslant x$，即 $\dfrac{\lg x}{x}\leqslant 1$.

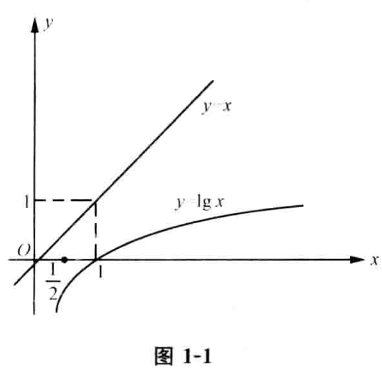


图 1-1

分析证明如下：

$\forall x\in[1,+\infty)$，$\exists N>0$，使 $N\leqslant x<N+1$，因此有

$$10^x\geqslant 10^N=(1+9)^N>1+9N>1+N>x,$$

上式两端取对数有 $\qquad \lg x<x$,

即 $\qquad \dfrac{\lg x}{x}<1$,

于是证得 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 8 设 $y=f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x, & 4<x<+\infty, \end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解 求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y=x,-\infty<x<1$，得 $x=y,-\infty<y<1$，于是，反函数为 $y=x,-\infty<x<1$；

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$，得 $x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$，于是，反函数为 $y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16$；

由 $y=2^x,4<x<+\infty$，得 $x=\log_2 y,16<y<+\infty$，于是，反函数为 $y=\log_2 x,16<x<+\infty$.

综上述，得 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty. \end{cases}$$

小结 求反函数的步骤：

①将 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出，得 $x=f^{-1}(y)$，并指出 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域；

②将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 对换即得 $y=f(x)$ 的反函数，其定义域 $D=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$.

例 9 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0 \end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0. \end{cases}$$

求 $\varphi[\varphi(x)],\psi[\psi(x)],\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)]$.

解 (1)由于 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)=0$，从而有

$$\varphi[\varphi(x)]=\varphi(0)=0.$$

又 $x>0$ 时，$\varphi(x)=x$，从而有

$$\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)=x.$$

即有

$$\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$$

由此可见 $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$.

(2)因为 $x\leqslant 0$ 时，$\psi(x)=0$，从而有

$$\psi[\psi(x)]=\psi(0)=0.$$

又 $x>0$ 时，$\psi(x)=-x^2<0$，从而有

$$\psi[\psi(x)]=\psi(-x^2)=0.$$

因此，对一切 x 恒有 $\psi[\psi(x)]=0$.

(3)当 $x\leqslant 0$ 时，$\psi(x)=0$，从而有

$$\varphi[\psi(x)]=\varphi(0)=0.$$

又当 $x>0$ 时，$\psi(x)=-x^2<0$，从而有

$$\varphi[\psi(x)]=\varphi[-x^2]=0.$$

于是对一切 x 恒有 $\varphi[\psi(x)]=0$.

(4)当 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)=0$，从而有

$$\psi[\varphi(x)]=\psi(0)=0.$$

又当 $x>0$ 时，$\varphi(x)=x$，从而有

$$\psi[\varphi(x)]=\psi(x)=-x^2.$$

即有

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

于是有 $\psi[\varphi(x)]=\psi(x)$.

小结 将两个或两个以上的函数进行复合是本章的难点，一般采用代入法和分析法求复合函数.

①代入法 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代. 该方法一般用于初等函数的复合. 如：$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则

$$f(f(x))=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},f(f(f(x)))=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

②分析法 抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数. 该方法一般用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合. 例 9 就是用分析法来求两个分段函数的复合函数.

1.4 课内练习

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{4+3x-x^2}$；(2)$y=\arcsin\dfrac{2x}{x+1}+\ln(\ln x+1)$.

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(2)$y=f(f(-x))$ （$f(x)$为奇函数）；

(3)$y=\sin x-\cos x$.

3. 设 $f(x)$是以 3 为周期的周期函数，且 $0<x\leqslant 3$ 时，

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & 0<x\leqslant 2,\\ \ln x, & 2<x\leqslant 3,\end{cases}$$

求 $f(-5)$，$f(6)$，$f(8)$.

4. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 求 $f\{f[f(x)]\}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ x+2, x>0.\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ (x-1)^3, & x<1.\end{cases}$

8. 若对任意实数 x 有 $2f(x)+f(1-x)=x^2$,求 $f(x)$.

1.5 课内练习解答与提示

1. (1) $(-1,1)\cup(1,4)$;(2) $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.

2. (1)奇函数;(2)奇函数;(3)非奇非偶函数.

3. $f(-5)=f(1)=1, f(6)=f(3)=\ln 3, f(8)=f(2)=8$.

4. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant 0$.

5. $f\{f[f(x)]\}=1$.

6. $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$

7. (1) $y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$;

(2) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant 0,\\ \sqrt[3]{x}+1, & x<0.\end{cases}$

8. $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$. 提示:令 $1-x=t$,将原方程改写.

2 极 限

2.1 内容要点与教学基本要求

一、内容要点

1. 数列极限和函数极限的定义.

2. 数列极限的性质:极限的唯一性、收敛数列的有界性、保号性.

3. 函数极限的性质:极限的唯一性、局部有界性、局部保号性.

4. 数列的收敛准则:单调有界数列收敛准则、夹逼定理.

5. 函数在点 x_0 处的左右极限的定义.

6. 无穷小量与无穷大量的定义及相互关系.

7. 无穷小量的阶、无穷小量的性质及运算.

8. 两个重要极限及极限的四则运算法则.

二、教学基本要求

1. 了解数列极限和函数极限的概念,会用"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-X$"和"$\varepsilon-\delta$"语言描述数列极限和函数极限.

2. 了解数列极限和函数极限的性质.

3. 了解极限存在的两个准则:单调有界收敛准则和夹逼定理.

4. 掌握函数极限存在与左右极限之间的关系.

5. 掌握极限的四则运算法则,会用两个重要极限求函数的极限.

6. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量阶的比较,会用等价无穷小量求函数的极限.

2.2 释疑解难

1. 怎样理解数列极限定义中的"任意的正数 ε($\forall\varepsilon>0$)"? ε 是不是一个无限小的正数?

答 我们知道任意实数可用数轴上的点表示,数列$\{x_n\}$对应数轴上一串动点,动点 x_n 与定点 a 之间的距离可用$|x_n-a|$表示,欲使这两点间距离任意接近,我们用一个字母 ε 来表示任意小的距离,所以 ε 须是正数.它是用来描述动点与定点之间无限接近的,ε 具

有:①任意性,刻划 x_n 与 a 无限接近;②相对固定性,由此找到数列$\{x_n\}$从哪一项(N)开始,才有$|x_n-1|<\varepsilon$成立."无限小的正数"这个说法本身就是错误的,任意一个正数 ε,不管它多么小,总是一个常数.例如在数列极限定义中的正数 ε,是预先任意给定的常数,由正数 ε 去找满足$|x_n-a|<\varepsilon$的自然数 N.在找 N 的过程中,ε 是不变的.

2. 数列极限定义中的 N 是什么数,它是预先给定的吗?它与正数 ε 是什么关系?

答 N 是数列$\{x_n\}$中项数 n(变量)的取值,因此 N 是某个正整数,它不是预选给定的,而是根据预先给定的任意小正数 ε,使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立条件下找到的,所以 N 与 ε 有关.但不能说 N 是 ε 的函数.否则的话,任意给定一个 ε,有且只有一个 N 满足不等式$|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$,但实际上不是这样的.因为若有正整数 N_0 使得$|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N_0)$成立,那么对所有大于 N_0 的正整数 N,仍然满足$|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$.

3. 无穷大量与无界量有什么区别?

答 首先明确,无穷大量与无界量都是在某个变化过程中的变量.无穷大量一定是无界量,但无界量不一定是无穷大量.以数列为例进行说明.

数列$\{x_n\}$是无穷大量,是指对于$\forall M>0$,若存在正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,$|x_n|>M$.由定义可知,当 $n>N$ 之后,不可能再有任何的 n,使得$|x_n|\leqslant M$.

数列$\{x_n\}$是无界量,是指对于$\forall M>0$,都存在正整数 n_0,使得$|x_{n_0}|>M$.由定义可知,在 $n>n_0$ 时,有可能出现$|x_n|\leqslant M$的情况.

例如数列$\{n^2+1\}$,$\{\ln(2n+3)\}$,$\{(-1)^n n\}$都是无穷大量,但$\left\{\dfrac{n+(-1)^n n}{2}\right\}$是无界量,不是无穷大量.

4. 讨论函数的极限时,在什么情况下要考虑左、右极限?

答 一般而言,讨论函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限,要注意两侧极限的情况.若两侧变化趋势一致,就不必分开讨论;若两侧变化趋势可能有差别,则应分别讨论左、右极限.

例如求分段函数在分段点处的极限时,必须讨论左、右极限;有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样,如:$\tan x$ 在 $x\to\dfrac{\pi}{2}$、$\cot x$ 在 $x\to 0$ 时左、右极限不同;有些指数函数、反三角函数等也有类似情况,如求含有 $e^{\frac{1}{x}}$,$\arctan\dfrac{1}{x}$,$\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$,$|x|$在 $x\to 0$ 时的极限,要想到分别求左、右极限,当左、右极限相等时,极限存在,否则极限不存在.

2.3 典型例题分析和问题讨论

例 1 根据数列极限定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}=\dfrac{4}{3}$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.