九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·沈恒范主编

教你用更多的自信面对未来！

（第五版）概率论与数理统计教程

同步辅导及习题全解

主编 郭志梅

一书两用

同步辅导+考研复习

新版

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

概率论与数理统计教程（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社，沈恒范主编的《概率论与数理统计教程》（第五版）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

《概率论与数理统计教程》（第五版）共有 9 章，分别介绍随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括重难点提示、主要知识内容、经典例题解析、考研题目解析、课后习题全解五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“概率论与数理统计教程（第五版）”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计教程（第五版）同步辅导及习题全解 / 郭志梅主编. — 北京 : 中国水利水电出版社, 2014.9

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5170-2532-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第218864号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：陈　洁　　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 概率论与数理统计教程（第五版）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　13.5 印张　344 千字
版　次	2014 年 11 月第 1 版　2014 年 11 月第 1 次印刷
印　数	0001—6000 册
定　价	21.80 元

前言

沈恒范主编的《概率论与数理统计教程(第五版)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《概率论与数理统计教程(第五版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《概率论与数理统计教程(第五版)》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 知识网络结构图。以图表的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

2. 重难点提示。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

3. 主要知识内容。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

4. 经典例题解析。该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,并在最后作出点评,意在抛砖引玉。

5. 考研题目解析。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

6. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

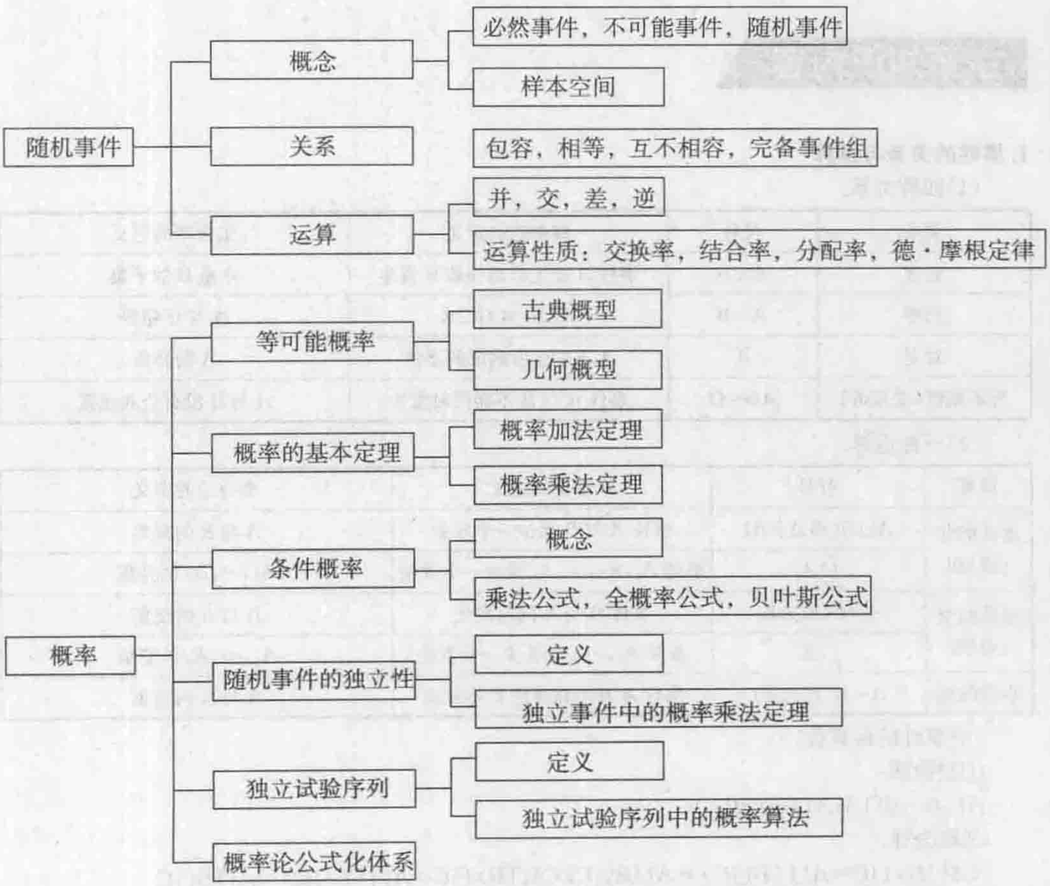
2014 年 8 月

目 录
contents

目录
contents

第一章
随机事件及其概率

知识网络结构图



重难点提示

1. 随机事件和概率是概率论中最基本的两个概念.

2. 准确把握事件之间的关系,掌握事件的基本性质并熟练应用运算法则.

3. 结合事件和概率的基本性质,灵活应用加法定理,乘法定理,全概率公式,贝叶斯公式解决概率计算问题.

4. $P(B|A)$和$P(AB)$计算时所在的样本空间不同,$P(AB)$是在样本空间Ω中,计算AB发生的概率;$P(B|A)$是在样本空间Ω_A中计算B发生的概率.

5. 随机事件的独立性是指一个事件发生不影响另一事件的概率,独立试验序列中需要注意的是事件A在每次试验的结果不受其他各次试验结果的影响。掌握这两者的概念以及相应的概率计算方法.

主要知识内容

1. 事件的关系与运算

(1)四种关系.

关系	符号	概率论的定义	集合率的定义
包含	$A\subset B$	事件A发生必然导致B发生	A是B的子集
相等	$A=B$	$A\subset B$且$B\subset A$	A与B相等
对立	$\overline{A}$	A不发生所构成的事件	A的补角
互不相容(或互诉)	$AB=\varnothing$	事件A与B不能同时发生	A与B没有公共元素

(2)三种运算.

运算	符号	概率论的定义	集合论的定义
事件的并(或)和	$A\cup B$(或$A+B$)	事件A与B至少一个发生	A与B的并集
	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少一个发生	$A_1,\cdots,A_2$的并集
事件的交(或积)	$A\cap B$(或AB)	事件A与B同时发生	A与B的交集
	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件$A_1,\cdots,A_n$至少一个发生	$A_1,\cdots,A_n$的交集
事件的差	$A-B$(或$A\overline{B}$)	事件A发生而事件B不发生	A与B的差集

(3)事件的运算律.

①交换律.

$A\cap B=B\cap A$;$A\cup B=B\cup A$

②结合律.

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$;$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

③分配律.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

④德·摩根定律.

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

⑤吸收律.

$A\cap(A\cup B)=A$;$A\cup(A\cap B)=A$

⑥双重否定律.

$\overline{(\overline{A})}=A$

2. 古典概型

设随机事件 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$n$ 为有限的正整数,且每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots)$ 出现的可能性相等,若事件 A 包含 m 个基本事件,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件}m}{\text{基本事件总数}n}$$

3. 几何概型

设试验的基本事件有无穷多个,但是可用某种几何特征(如长度、面积、体积)来表示其总和,设为 Ω;并且其中的一部分,即随机事件 A 所包含的基本事件数也可用同样的几何特征来表示,设为 A,$A\in\Omega$;则随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{S\text{ 的度量}}$$

4. 加法公式

对两个事件 A 和 B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

特别地,若事件 A 和事件 B 互斥,则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

可以推广为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

5. 条件概率与乘法公式

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的条件概率. 由条件概率得乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\qquad P(AB)=P(B)P(A\mid B)$

乘法公式的推广:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdot P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdot\cdots\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_1)$

6. 全概率公式

设 $\{A_i\}$ 是一列有限或可数无穷个两两互不相容的非零概率事件,且 $\bigcup_i A_i=\Omega$,则对任意事件 B,有

$$P(B)=\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i)$$

7. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间 Ω，事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足全概率公式条件，则对任一事件 $B, P(B) > 0$，有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_j P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

8. 事件的独立性

如果事件 A、B 中任一事件的发生不影响另一事件的发生概率，则称它们是相互独立的，且有 $P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B)$

易知有 $P(AB) = P(A)P(B)$.

9. 独立试验序列

进行一系列试验，在每次试验中事件 A 或者发生，或者不发生，假设每次试验的结果与其他各次试验的结果无关，事件 A 的概率 $P(A)$ 在整个系列试验中保持不变，这样的一系列试验叫做独立试验序列.

如果在独立试验序列中事件 A 的概率为 $p(0 < p < 1)$，则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率为：

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, p + q = 1$$

10. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足 ① 非负性 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；② 规范性 $P(\Omega) = 1$；③ 有限可加性 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

经典例题解析

例 1 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，证明：

(1) 若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 一定不独立；

(2) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 一定是相容的.

分析 用定义进行说明.

证明 (1) 由于 $AB = \phi$，则 $P(AB) = 0$，而 $P(A)P(B) \neq 0$，因此 $P(AB) \neq P(A)P(B)$，即 A 与 B 一定不独立.

(2) 由于 A 与 B 独立，故有 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$。因此 $AB \neq \phi$，即 A 与 B 一定是相容的（不是互不相容的）.

点评 互不相容与相互独立是两个非常重要的概念，应分清两者之间的差异. 由本题可知，在一般情况下，若 A 与 B 互不相容时，A 与 B 一定不独立，即 A 发生时，B 一定不发生，A 的发生严重影响了 B 的发生；反之，当 A 与 B 独立时，A 与 B 一定是相容的，即 A 与 B 可同时发生.

例 2 袋中有 a 个白球和 b 个红球，现按无放回抽样，依次把球一个个取出来. 试求第 k 次取出的球是白球的概率（$1 \leqslant k \leqslant a + b$）.

分析 要选定好试验概型，可将该例中的抽样视为一个排列，找准切入点.

分析 解法 1 把 $a+b$ 个球编号，把球依摸出的先后次序排队，则基本事件总数为 $a+b$ 个相异元素的全排列，有 $(a+b)!$ 种，设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$，这相当于在第 k 个位置上放一个白球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放另外的 $a+b-1$ 个球，从而 A 包含基本事件数为 $a(a+b-1)!$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法 2 将球看作是各不相同的，只考虑前 k 个位置，此时基本事件总数为 A_{a+b}^{k}。设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$，这相当于在第 k 个位置上放一个白球，有 a 种方法，在其余 $k-1$ 个位置上放从余下的 $a+b-1$ 个球中任取的 $k-1$ 个球，有 A_{a+b-1}^{k-1}，从而 A 包含基本事件数为 aA_{a+b-1}^{k-1}，故所求的概率为 $P(A)=\dfrac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$.

点评 (1) 如每次抽完再放回，则第 k 次取出的是白球的概率仍是 $\dfrac{a}{a+b}$. 也就是说，不管是放回抽样还是不放回抽样，第 k 次取出的球是白球的概率都是 $\dfrac{a}{a+b}$.

(2) 上面的计算结果表明，事件 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$ 的概率 $P(A)$ 与 k 无关，即 A 发生的概率与取球的先后次序无关，而且不管是放回抽样还是不放回抽样. 这就是所谓的“抽签原理”，直觉经验也能说明这一点：$a+b$ 个人抽 $a+b$ 张彩票，其中有 a 张彩票有奖，则任何人中奖的概率都是 $a/(a+l,)$，否则“摸彩票”这种办法就不公平了. 在体育比赛或其他一些机会均等活动场合人们也经常利用这一原理.

例 3 在区间 $(0,1)$ 中随机的取两个数，则两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

分析 这个试题为二维几何概型，可以看成网边长为 1 的正方形区域里面掷点，所求事件为

$A=\{(x,y)\mid |y-x|<\dfrac{1}{2},(x,y)\in\Omega\}$

$-\dfrac{1}{2}<y-x<\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2}<y<x+\dfrac{1}{2}$

$L(\Omega)=1, L(A)=1-(\dfrac{1}{2})2=$

所以 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}=\dfrac{3}{4}$.

例 4 设随机事件 A,B,C 两两独立，且 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)\in(0,1)$，则必有 ( )

(A) C 与 $A-B$ 独立 (B) C 与 $A-B$ 不独立

(C) $A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 独立 (D) $A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 不独立

分析 $P[C(A-B)]=P(ABC)=P(AC)-P(ABC)=P(A)\,P(C)-P(ABC)$

$P(C)\,P(A-B)=P(C)\,[P(A)-P(AB)]=P(A)\,P(C)-P(A)\,P(B)\,P(C)$

当 A,B,C 两两独立时，但并不能确定是否相互独立，因此 $P(ABC)=P(A)\,P(B)\,P(C)$ 不能判断是否成立，因此(A)(B) 是错误的。

假设选项(C) 正确，则 $\overline{AC}$ 与 $\overline{B}C$ 独立，就是 $P(\overline{AC})P(\overline{B}C)=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})P(C)=0$，与 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)\in(0,1)$ 矛盾，所以(C) 不正确.

考研题目解析

1 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ ______.(2014 年)

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(AB)=P(A)\cdot P(A\mid B)=0.4$

所以 $P(A\cup B)=0.7$

2 设在一次试验中 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立实验，则 A 至少发生一次的概率为 ______；而事件 A 至多发生一次的概率为 ______.(2014 年)

解 $A\sim B(n,p)$，$P(A\geqslant 1)=1-P(A<1)=1-(1-p)n$

$P(A\leqslant 1)=P(A=0)+P(A=1)=(1-p)n+p(1-p)n-1$

3 假设一批产品的一、二、三等品各占 60%、30%、10%，现从中任取一件，结果不是三等品，则取得的是一等品的概率为 ______.(2001 年)

解 设 $A_i=\{$任取一件产品为第 i 等品$\}$，$i=1,2,3$，显然 A_1,A_2,A_3，为互斥事件组，且 $P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.1$

又由于 $A_1\subset\overline{A_3}$，可得 $A_1\overline{A_3}=A_1$，则

$$P(A_1\mid\overline{A_3})=\frac{P(A_1\overline{A_3})}{P(\overline{A_3})}=\frac{P(A_1)}{1-P(\overline{A_3})}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$$

4 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$ ______.(2004 年)

解 根据题设，有

$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{1}{9}$，

$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

注意到 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，得 $P(A)=P(B)$

因此有

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-2P(A)+P^2(A)=(P(A)-1)^2=\frac{1}{9}$$

于是 $P(A)-1=\pm\frac{1}{3}$，从而 $P(A)=\frac{2}{3}$，或 $P(A)=4/3$(舍去，因为概率不可能大于 1)，故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

5 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$ ______.(2005 年)

解 X 的值为 i 的概率为 $P\{X=i\}=\ (i=1,2,3,4)$

当 $X=1$ 时，$P\{Y=2\mid X=1\}=0$

当 $X=2$ 时，$P\{Y=2\mid X=2\}=\frac{1}{2}$

当 $X=3$ 时，$P\{Y=2\mid X=3\}=\frac{1}{3}$

当 $X=4$ 时，$P\{Y=2\mid X=4\}=\frac{1}{4}$

故 $P\{Y=2\}=(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}$

课后习题全解

1.1 任意抛掷一颗骰子，观察出现的点数. 设事件 A 表示"出现偶数点"，事件 B 表示"出现的点数能被 3 整除".

(1) 写出试验的样本点及样本空间；

(2) 把事件 A 及 B 分别表示为样本点的集合；

(3) 下列事件：$\overline{A},\overline{B},A\cup B,AB,\overline{A\cup B}$ 分别表示什么事件？并把它们表示为样本点的集合.

知识点窍 样本点、样本空间、随机事件的基本概念、事件的关系和运算.

逻辑推理 将掷一颗骰子可视为一次随机试验，其所有可能的结果有"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"，便可得到试验的样本点和样本空间 Ω. $\overline{A}$ 表示 A 的对立事件，$\overline{A}=\Omega-A$.

解题过程 (1) 试验的样本点 $\omega_i=$"出现 i 点"，$i=1,2,3,4,5,6$. 样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

(2) A 表示"出现偶数点"，即 2 点、4 点或 6 点.

所以有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$. 同理有 $B=\{\omega_3,\omega_6\}$.

(3) $\overline{A}$ 表示"出现奇数点"，且 $\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

$\overline{B}$ 表示"出现的点不能被 3 整除"，且 $\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$；

$A\cup B$ 表示"出现的点数为偶数或能被 3 整除"，且 $A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$

$A\cdot B$ 表示"出现的点数为偶数，且能被 3 整除"，$A\cdot B=\{\omega_6\}$；

$\overline{A\cup B}$ 表示"出现的点数为奇数且不能被 3 整除"，$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$.

1.2 设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1) 仅 A 发生；

(2) A、B、C 都发生；

(3) A、B、C 都不发生；

(4) A、B、C 不都发生；

(5) A 不发生，且 B、C 中至少有一事件发生；

(6) A、B、C 中至少有一事件发生；

(7) A、B、C 中恰有一事件发生；

(8) A、B、C 中至少有两个事件发生；

(9) A、B、C 中最多有一事件发生.

知识点窍 随机事件的运算.

逻辑推理 "仅 A 发生"意味着"A 发生，且 B、C 都不发生"；"不都发生"可看成是"都发生"的逆事件；"n 个事件中至少有一事件发生"即为 n 个事件的并，(7) 应分解成符合条件的所有小事件，(9) 为(8) 的逆事件.

解题过程 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) ABC；

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $\overline{ABC}$；

(5) $(BC\overline{A})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)=\overline{A}(B\cup C)$；

(6) $A\cup B\cup C$；

(7) $((A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)$；

(8) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$；

(9) $\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$.

1.3 袋中有10个球,分别写有号码1～10,其中l,2,3,4,5号球为红球;6,7,8号球为白球;9,10号球为黑球.设试验为:

(1) 从袋中任取一个球,观察其颜色;

(2) 从袋中任取一个球,观察其号码.

分别写出试验的基本事件及样本空间,并指出样本空间中的基本事件是否为等可能的.

知识点窍 基本事件、样本空间、概率的基本概率.

逻辑推理 因为袋中10个球为3种颜色、10个编号,所以观察颜色有红、白、黑三个基本事件,观察号码有1～10十个基本事件.由古典概型的概率计算公式便可知道各基本事件的概率.

解题过程 (1) 从袋中任取一个球,如果试验是为了观察取出的球的颜色,则因为袋中有3种不同颜色的球,所以试验的基本事件共有3个,它们是:$\omega_{红}$ ="取出红球", $\omega_{白}$ ="取出白球", $\omega_{黑}$ ="取出黑球";于是有样本空间 $\Omega_1=\{\omega_{红},\omega_{白},\omega_{黑}\}$.

因为袋中红球、白球、黑球的个数不相等,所以上述3个基本事件不是等可能的.

(2) 从袋中任取一个球,如果试验是为了观察取出的球的号码,则因为袋中有10个不同号码的球,所以试验的基本事件共有10个,它们是:

ω_i ="取出i号球"$(i=1,2,\cdots,10)$;

于是有样本空间。$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$

因为袋中1,2,…,10号的球各有一个,所以上述10个基本事件是等可能的.

1.4 电话号码由7个数字组成,每个数字可以是0,1,2,…,9中的任一个数字(但第一个数字不能为0),求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率.

知识点窍 排列组合.

逻辑推理 17位数的电话号码中,第一位数不能为0,其余6位都可以是0,1,…,9中的任何一个数字.由0,1,…,9组成的7位电话号码所有可能情况有$P_9^1\cdot10^6$(第l位数从1,2,…,9中任取一个,剩下的6位均可为0,1,…,9中的任意一个).完全由不相同的数字组成的可能情况有$P_9^1\cdot10^6$.(第一位数从1,2,…,9中任取一个,其余六位数则为剩下9个数字的一个排列P_9^6).

解题过程 由7个数字组成的电话号码中,总的排列数就是 $P_9^1\cdot10^6$ 所以,基本事件的总数 $N=P_9^1\cdot10^6$

设事件A表示电话号码由完全不相同的数字组成,这时的排列数就是$P_9^1\cdot P_9^6$.所以,事件A包含的基本事件数$M=P_9^1\cdot P_9^6$.

所求概率$P(A)=\dfrac{M}{N}\approx0.0605$.

1.5 把10本书任意地放在书架上,求其中指定的3本书放在一起的概率。

知识点窍 排列组合、古典概型.

逻辑推理 基本事件的总数为10本书的全排列P_{10}^{10},所求概率事件包含的基本事件数为$P_8^8\cdot P_3^3$(将指定的3本书作为一个整体与其他7本书任意摆放,为全排列P_8^8,而放在一起的3本书又有P_3^3排列法).

解题过程 基本事件的总数$N=10!$.

设事件A表示10本书中指定的3本书放在一起,事件A包含的基本事件数$M=8!\times3!$.

所求概率$P(A)=\dfrac{M}{N}\approx0.0667$.

1.6 为了减少比赛场次，把20个球队任意分成两组（每组10队）进行比赛，求最强的两队被分在不同组内的概率.

知识点窍 古典概型.

逻辑推理 按照排列组合知识分别求出基本事件的总数和所求概率事件包含的基本事件数.

解题过程 从20个球队中任意选取10个队分在第一组内（其余10个队分在第二组内），共有 C_{20}^{10} 种不同的分法，所以基本事件的总数 $N = C_{20}^{10}$.

设事件 A 表示最强的两队被分在不同组内，则可以先从这2个最强的队中任意选取1个队分入第一组（另1个队分入第二组），有 C_2^1 种不同的分法；再从其余18个队中任意选取9个队分入第一组（另9个队分入第二组），有 C_{18}^9 种不同的分法；从而共有 $C_2^1 \cdot C_{18}^9$ 种不同的分法. 所以，事件 A 包含的基本事件数 $M = C_2^1 \cdot C_{18}^9$，所以 $P(A) = \dfrac{10}{19} \approx 0.5263$.

1.7 在桥牌比赛中，把52张牌任意地分发给东、南、西、北四家（每家13张牌），求北家的13张牌中：

(1) 恰有5张黑桃、4张红心、3张方块、1张草花的概率；

(2) 恰有大牌 A、K、Q、J 各1张，其余为小牌的概率.

知识点窍 排列组合、古典概型.

逻辑推理 一副桥牌共有52张牌. 按花色区分，有黑桃、红心、方块、草花各13张牌；按大小区分，有大牌 A、K、Q、J 与小牌10、9、…、3、2各4张牌. 把52张牌分发给东、南、西、北四家（每家13张牌），不考虑发牌的顺序，共有 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 种不同的分法.

(1) 把5张黑桃、4张红心、3张方块、1张草花分发给北家，有 $C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1$ 种不同的分法；

其余39张牌分发给东、南、西三家，有 $C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 种不同的分法.

(2) 把大牌 A、K、Q、J 各1张与小牌9张分发给北家，有 $(C_4^1)^4C_{36}^9$ 种不同的分法；

其余39张牌分发给东、南、西三家，有 $C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 种不同的分法.

解题过程 基本事件的总数 $N = C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$.

设事件 A 表示北家的13张牌中恰有5张黑桃，4张红心，3张方块，1张草花；

事件 B 表示北家的13张牌中恰有大牌 A、K、Q、J 各1张，其余为小牌，则

(1) 事件 A 包含的基本事件数 $M_1 = C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13} \cdot C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1$.

所以所求概率

$$P(A) = \frac{C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13} \cdot C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}} \approx 0.00539.$$

(2) 事件 B 包含的基本事件数 $M_2 = (C_4^1)^4C_{36}^9 \cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$

所以所求概率

$$P(B) = \frac{C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13} \cdot (C_4^1)^4C_{36}^9}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}} \approx 0.03795.$$

1.8 将3个球随机地投入4个盒子中，求下列事件的概率：

(1) A—— 任意3个盒子中各有1个球；

(2) B—— 任意1个盒子中有3个球；

(3) C—— 任意1个盒子中有2个球，其他任意1个盒子中有1个球.

知识点窍 古典概型.

逻辑推理 可以从两种角度来思考所要求事件的概率.

(i) 从投球的顺序，考虑投第 k 个球时，第 k 个球的放法有多少种；

(ii) 因为是“任意 x 个盒子”，所以可以先选盒子，再投球.

解题过程 将每一个球随机地投入 4 个盒子中，各有 4 种不同的投法；将 3 个球随机地投入 4 个盒子中，则共有 4^3 种不同的投法. 所以，基本事件的总数 $N = 4^3 = 64$.

(1) 用两种方法计算事件 A 包含的基本事件数：

(i) 先从 4 个盒子中任意选定 3 个盒子，有 C_4^3 种不同的选法；再将 3 种球分别投入这 3 个盒子中，有 P_3^3 种不同的投法，从而共有 $C_4^3 \cdot P_3^3$ 种不同的投法. 所以，事件 A 包含的基本事件数 $M_1 = C_4^3 \cdot P_3^3 = 24$.

(ii) 第一球可以投入 4 个盒子中的任一个盒子，有 4 种不同的投法；第二个球只能投到其余 3 个盒子中的任一个盒子，有 3 种不同的投法；第三个球只能投入其余 2 个盒子中的任一个盒子，有 2 种不同的投法，从而共有 $4 \times 3 \times 2$ 种不同的投法. 所以，事件 A 包含的基本事件数 $M_1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

所以事件 A 的概率 $P(A) = \dfrac{24}{64} = 0.375$.

(2)、(3) 也和(1) 一样，可以从不同入手角度得到不同解法，下面分别给出一种解法，另外一种解法由读者自己推出.

(2)(ii) 先从 4 个盒子中任意选定 1 个盒子，有 C_4^1 种不同的选法；再将 3 个球都投入这个盒子中，有 13 种投法；从而共有 $C_4^1 \times 1^3$ 种不同的投法. 所以，事件 B 包含的基本事件数 $M_2 = C_4^1 \times 1^3 = 4$.

所以事件 B 的概率 $P(B) = 0.0625$.

(3)(i) 第一个球可以投入 4 个盒子中的任一个盒子中，有 4 种不同的投法；第二个球可以与第一个投入同一个盒子中，也可投入其余 3 个盒子中的任一个盒子中，如果是前一种情况，则第三个球应投入其余 3 个盒子中的任一个盒子中，有 1×3 种不同的投法；如果是后一种情况，则第三个球应入已有球的 2 个盒子中的任一个盒子中，有 3×2 种不同的投法；从而共有 $4 \times (1 \times 3 + 3 \times 2)$ 种不同的投法. 所以，事件 C 包含的基本事件数 $M_3 = 4 \times (1 \times 3 + 3 \times 2) = 36$.

所以事件 C 的概率 $P(C) = 0.5625$.

1.9 同时掷 4 个均匀的骰子，求下列事件的概率：

(1) A——4 个骰子的点数各不相同；

(2) B—— 恰有 2 个骰子的点数相同；

(3) C——4 个骰子的点数两两相同，但 2 对的点数不同；

(4) D—— 恰有 3 个骰子的点数相同；

(5) E——4 个骰子的点数都相同.

知识点窍 古典概型、排列组合.

逻辑推理 同时掷 4 个均匀骰子，可以看成 4 个相互独立的随机事件，每个随机事件的可能结果有 $\omega_k =$“出现点数为 k”，$k = 1, 2, \cdots, 6$. 利用古典概型的概率公式，关键在于利用排列组合知识，求所求概率事件包含的基本事件数.

解题过程 掷 1 个骰子，出现的点数有 6 种不同的情形；同时掷 4 个骰子，出现的点数共有 6^4 种不同

的情形. 所以,基本事件的总数 $N=6^4=1296$.

(1) 4 个骰子的点数各不相同,有 $6\times5\times4\times3$ 种不同的情形. 所以,事件 A 包含的基本事件数 $M_1=6\times5\times4\times3=360$

所以所求概率

$$P(A)=\frac{360}{1296}\approx 0.2778.$$

(2) 恰有 2 个点数相同,先从 4 个中选出点数相同的 2 个,有 C_4^2 种选法. 这一对相同的点数和另 2 个的点数各不相同,有 $6\times5\times4$ 种不同的情形. 所以,事件 B 包含的基本事件数 $M_2=C_4^2\times6\times5\times4=720$.

所以所求概率

$$P(B)=\frac{720}{1296}\approx 0.5556.$$

(3) 4 个骰子两两点数相同,先将 4 个骰子分成两组,有 $\frac{C_4^2C_2^2}{2}$ 种分法. 这两对点数分法不同,有 6×5 种不同的情形. 所以,事件 C 包含的基本事件数

$$M_3=\frac{C_4^2C_2^2}{2}\times6\times5=90$$

所以所求概率

$$P(C)=\frac{90}{1296}\approx 0.0694.$$

(4) 恰有 3 个骰子的点数相同,先从 4 个中选出 3 个,有 C_4^3 种选法,这 3 个与另一个的点数不同,有 30 种不同的情形。所以事件 D 包含的基本事件数

$$M_4=C_4^3\times30=120$$

所以所求概率

$$P(D)=\frac{12}{1296}\approx 0.0926.$$

(5) 4 个骰子的点数都相同,显然只有 6 种不同的情形. 所以事件 E 包含的基本事件数 $M_5=6$.

所以所求概率

$$P(E)=\frac{6}{1296}\approx 0.0046.$$

1.10 *在半径为 R 的圆内画平行弦. 如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,求任意画的弦的长度大于 R 的概率.*

知识点窍 几何概型.

逻辑推理 由于弦的长度可以为 $(0,2R]$ 上任意一个数,所以试验的基本事件有无穷多个,用几何特征长度来表示基本事件的总和及所求概率事件所包含的基本事件数,用几何概型的公式便可求解.

解题过程 如图 1.1 所示,设垂直于直径 AB 的弦 CD 与直径 AB 的交点的横坐标为 x,则所有基本事件可能用区间 $(-R,R)$ 内的点表示出来,按题意它们是等可能的. 设事件 E 表示弦 CD 的长度大于 R,则 E 包含的基本事件可以用那

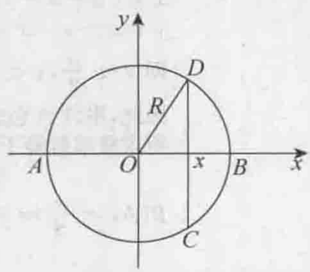


图 1.1