现代数学基础

52

非线性泛函分析

（第三版）

郭大钧

高等教育出版社

现代数学基础

52

非线性泛函分析

(第三版)

郭大钧

FEIXIANXING FANHAN FENXI

高等教育出版社·北京

内容提要

本书共分五章。

第一章论述非线性算子的一般性质，包括连续性、有界性、全连续性、可微性等，并给出了隐函数定理和反函数定理。

第二章建立拓扑度理论。不仅建立了最重要的有限维空间连续映像的 Brouwer 度和 Banach 空间全连续场的 Leray-Schauder 度，而且论述了较常用的凝聚场的拓扑度和 A-proper 映像的广义拓扑度。

第三章将半序和拓扑度（不动点指数）相结合来研究非线性算子方程的正解，讨论了常用的凹算子和凸算子的正解及多解问题。

第四章主要证明强制半连续单调映像的满射性和强制多值极大单调映像的满射性。

第五章论述非线性问题中的变分方法，既包括古典的极值理论，也包括属于大范围变分学的 Minimax 原理和山路引理等。

书中包括了对于非线性积分方程、常微分方程以及二阶半线性椭圆型偏微分方程的应用。

本书可作为综合性大学和师范学院数学系研究生的教材以及高年级大学生的选修课教材，也可供从事非线性问题研究的大学教师和科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

非线性泛函分析 / 郭大钧编著. -- 3版. -- 北京：高等教育出版社，2015. 1

ISBN 978-7-04-041513-1

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①非线性 - 泛函分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 265944 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李华英　　封面设计 赵 阳　　版式设计 张 杰
责任校对 刘丽娴　　责任印制 田 甜

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京铭成印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 27.5
字　　数 500 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 1985 年 5 月第 1 版
　　　　 2015 年 1 月第 3 版
印　　次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 69.00 元

物 料 号 41513-00

第三版序

第三版基本上是第二版的重印。在第三章 §2 的末尾, 我们引入了混合单调算子及其耦合不动点和不动点的概念, 并指出了许多后继工作 (见注 8)。在第三章 §5 例 5.2 之后增加了一个例子 (即例 5.3), 进一步说明范数形式的锥拉伸和锥压缩不动点定理对于方程多解问题的应用。在第五章 §2 的末尾, 我们引入了下降流不变集的概念及其基本结论 (即定义 2.3 和定理 2.12), 并指出了深入的后继工作。此外, 对书末尾的参考文献, 我们增加了反映近年来研究成果的一些论文。

在本书第三版的出版过程中, 得到高等教育出版社的大力支持, 特致谢意。

郭大钧

2014 年 2 月 15 日

于山东大学南院

第二版序

第二版基本上是第一版的重印。在第三章 §2 的末尾, 我们增加了一个有关非紧减算子的不动点定理 (即定理 2.5)。另外, 对书末尾的参考文献做了一些调整, 增加了反映近年来重要工作的若干论文。

本书再版过程中, 得到山东科学技术出版社的大力支持和国家自然科学基金及山东大学出版基金委员会的资助, 特致谢意。

郭大钧

2001 年 4 月 15 日

于山东大学南院

第一版序

近年来, 分析学研究对象和方法的发展, 表明泛函分析的地位日益重要。在培养科学专门人才的过程中, 泛函分析已成为过去公认的数学分析课程的继续和补充, 这对基础数学专业的学生和其他某些学科专业人员来说都是必需的。在科学技术进步中, 要求分析和控制客观现象的数学能力向着富有全局性的高、精水平发展, 从而使非线性分析的成果不断积累, 逐渐促成了分析数学内新分支学科的诞生。无论如何, 在无穷维空间框架中, 处理分析学的线性及非线性问题的方式有着无穷的潜力, 近数十年的成就以充足理由要求人们接受非线性泛函分析这一重要的分支学科。当前, 我国为了实现建设四个现代化的宏伟目标, 急需培养人才。要求学习非线性泛函分析的, 已不局限于专门从事泛函分析中某一方面工作的人员。事实上, 近十多年来, 各国出版的一些普通泛函分析教程已见变化, 使非线性部分的比例增加; 同时, 以非线性泛函分析为名的教程也多起来了。

非线性泛函分析的内容大都可追溯到二三十年代。现今大体上公认的几个方面, 如变分学及变分方法的成就从泛函分析开始成为学科就起着作用; 拓扑学方法及其成就, 不动点及拓扑度理论, 乃至解析方法, 大致也是如此。正像有悠久历史的学科, 例如线性偏微分方程理论的新著, 往往各有其针对性一样, 非线性泛函分析的教程, 自然也当各具特色。

郭大钧教授对非线性泛函分析的几个重要课题及其应用, 诸如某些典型的非线性算子、Hammerstein 积分方程、(常) 偏微分方程、迁移方程、凸锥理论与非线性算子方程的正解、非线性算子拓扑度和不动点定理以及固有值、解的个数与分支, 系统地研究达二十余年, 取得了卓越的成果。他掌握的理论深广, 并注意了课题间的沟通。为了满足我国数学教学及科研的需要, 考虑到我国数学界

的现状和加速吸收当代知识的迫切性, 他选取多年所授专题课教材并加入科研活动中有关成就, 整理成本书。该书结合概念的引进和定理的论证, 特别注意了例、反例及必要的评注, 反映了非线性泛函分析的发展现状及某些科研领域需要的若干知识。书后附有丰富的参考文献。读者阅读本书, 将能得到益处。

田方增

1983 年 12 月 20 日

目录

第一章　非线性算子 · **1**

§1 连续性与有界性 · 1

§2 全连续性 · 16

§3 Fréchet 微分与 Gâteaux 微分 · · · · · · · · · · · · · · 31

§4 隐函数定理 · 58

第二章　拓扑度理论 · **66**

§1 Brouwer 度 · 66

§2 Leray-Schauder 度 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 105

§3 不动点定理 · 121

§4 固有值、固有元与歧点 · · · · · · · · · · · · · · · · 131

§5 严格集压缩场和凝聚场的拓扑度 · · · · · · · · · · · · 144

§6 A-proper 映像的广义拓扑度 · · · · · · · · · · · · · · 170

第三章　非线性算子方程的正解 · · · · · · · · · · · · · · **181**

§1 锥和半序 · 181

§2 增算子与减算子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 188

§3 凹算子与凸算子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 215

§4 锥压缩与锥拉伸不动点定理 · · · · · · · · · · · · · · 224

§5 多解定理 · 258
§6 Hilbert 投影距离法 · 279

第四章　单调映像 · 284
§1 单调映像的概念 · 284
§2 单调映像的满射性 · 292
§3 多值极大单调映像的满射性 · 306

第五章　变分方法 · 322
§1 泛函的极值与梯度 · 322
§2 最速下降法 · 348
§3 Minimax 原理 · 374
§4 偶泛函的临界点 · 392

参考文献 · 414

索引 · 424

第一章 非线性算子

本章论述非线性算子的一般性质, 包括连续性、有界性、全连续性、可微性等. 这是一些基本概念和性质, 在以后各章中都要用到. 另外, 我们给出了隐函数定理和反函数定理, 这是两个用途广泛的重要定理.

§1 连续性与有界性

设 E_1 和 E_2 是两个实 Banach 空间, $D \subset E_1$. 设算子 $A: D \to E_2$. 一般假设 A 是非线性的.

定义 1.1 设 $x_0 \in D$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使当 $x \in D$ 且 $\|x - x_0\| < \delta$ 时, 恒有 $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$, 则称 A **在** x_0 **连续**; 若 A 在 D 中每一点都连续, 则称 A **在** D **上连续**; 若上述 δ 只与 ε 有关而与 $x_0 \in D$ 无关, 则称 A **在** D **上一致连续**.

注 1 显然, A 在 $x_0 \in D$ 连续的充要条件是: 对任何 $x_n \in D, x_n \to x_0$ 都有 $Ax_n \to Ax_0 (n \to \infty)$.

定义 1.2 若 A 将 D 中任何有界集变成 E_2 中的有界集, 则称 A **在** D **上有界**.

注 2 众所周知, 对于线性算子而言, 连续性与有界性是等价的, 但对于非

线性算子, 则没有这种等价关系. 例如, 考察空间 l_2 上的泛函:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k,\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l_2,$$

其中 $r_k=\max\{|x_k|-1,0\}(k=1,2,\cdots)$. 由于 $x_k\to 0(k\to\infty)$, 故上述和式中只有有限项不为零, 即 $f(x)$ 存在. 易知, 若 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)\in l_2, x=(x_1,x_2,\cdots)\in l_2$, 且

$$\|x^{(n)}-x\|=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\to 0\quad (n\to\infty),$$

则必有 $f(x^{(n)})\to f(x)$, 故 f 是 l_2 上的连续泛函. 但不难看出 f 在 l_2 上不是有界的. 事实上, 若令 $z^{(n)}=(z_1^{(n)},z_2^{(n)},\cdots,z_k^{(n)},\cdots)$, 其中

$$z_k^{(n)}=\begin{cases}2, & \text{当 } k=n \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } k\neq n \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $z^{(n)}\in l_2$ 且 $\|z^{(n)}\|=2(n=1,2,\cdots)$; 但 $f(z^{(n)})=n\to\infty(n\to\infty)$.

下面, 作为一个例子, 较详细地讨论常用的一个非线性算子的连续性和有界性. 设 G 是 R^N 中可测集, 且 $0<\operatorname{mes}G\leqslant+\infty$. 函数 $f(x,u)(x\in G,-\infty<u<+\infty)$ 叫做满足 **Caratheodory 条件**, 如果:

(i) 对几乎所有的 $x\in G, f(x,u)$ 是 u 的连续函数;

(ii) 对每个 $u, f(x,u)$ 是 x (在 G 上) 的可测函数.

算子

$$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))\tag{1.1}$$

叫做 **Немыцкий 算子**.

引理 1.1　*设 $\operatorname{mes}G<+\infty$, 则 $f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件的充要条件是: $\forall\eta>0$, 存在有界闭集 $F\subset G, \operatorname{mes}F>\operatorname{mes}G-\eta$, 使 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续.*

证　充分性: 由假定, 存在有界闭集 $F_n\subset G, \operatorname{mes}F_n>\operatorname{mes}G-\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 使 $f(x,u)$ 在 $F_n\times(-\infty,+\infty)$ 上连续. 令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\subset G$, 则 $\operatorname{mes}F=\operatorname{mes}G$, 且当 $x\in F$ 时, $f(x,u)$ 是 u 在 $-\infty<u<+\infty$ 上的连续函数, 故 Caratheodory 条件的 (i) 满足. 又显然对于固定的 $u\in(-\infty,+\infty)$, 集 $\{x\in F_n|f(x,u)\geqslant a\}$ (a 为实数) 是有界闭集, 从而集

$$\{x\in F|f(x,u)\geqslant a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in F_n|f(x,u)\geqslant a\}$$

是可测集, 因此, $f(x,u)$ 作为 x 的函数是 F 上的可测函数, 当然也是 G 上的可测函数, 故 Caratheodory 条件的 (ii) 满足.

必要性: 给定 $\eta>0$, 只需证明下述结论: 存在有界闭集 $F_n\subset G, \operatorname{mes}F_n>\operatorname{mes}G-\dfrac{\eta}{2^n}$ 以及 $\delta_n>0(n=1,2,\cdots)$, 使得当 $x_1,x_2\in F_n$, 其距离 $d(x_1,x_2)<\delta_n, u_1,u_2\in[-n,n], |u_1-u_2|<\delta_n$ 时, 恒有

$$|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

事实上, 若已证上述结论, 令 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\subset G$, 则 F 是有界闭集, 满足

$$\operatorname{mes}(G\backslash F)=\operatorname{mes}\bigcup_{n=1}^{\infty}(G\backslash F_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{mes}(G\backslash F_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta}{2^n}=\eta,$$

而且可证 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续: 给定 $(x_1,u_1)\in F\times(-\infty,+\infty)$, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取定 n_0, 使 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon, |u_1|<n_0-1$. 于是, 当 $(x_2,u_2)\in F\times(-\infty,+\infty)$, 并满足 $d(x_1,x_2)<\delta=\min\{\delta_{n_0},1\}, |u_1-u_2|<\delta$ 时, 恒有 $x_1,x_2\in F\subset F_{n_0}, d(x_1,x_2)<\delta_{n_0}, |u_2|<\delta+n_0-1\leqslant n_0$, 从而

$$|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续. 下证上述结论, 令

$$G_0=\{x\in G|f(x,u)\text{ 作为 }u\text{ 的函数在 }-\infty<u<+\infty\text{ 上连续}\}.$$

由 Caratheodory 条件的 (i) 知 $\operatorname{mes}G_0=\operatorname{mes}G$. 又令

$$\begin{aligned}G_{m,n}=\Bigg\{x\in G_0\Bigg|&u_1,u_2\in[-n,n],|u_1-u_2|<\frac{1}{m}\text{ 蕴涵}\\&|f(x,u_1)-f(x,u_2)|\leqslant\frac{1}{3n}\Bigg\}\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

注意到有理数的稠密性, 知

$$\begin{aligned}G_0\backslash G_{m,n}&=\Bigg\{x\in G_0\Bigg|\text{ 存在 }u_1,u_2\in[-n,n],\text{ 使}\\&\qquad|u_1-u_2|<\frac{1}{m},|f(x,u_1)-f(x,u_2)|>\frac{1}{3n}\Bigg\}\\&=\Bigg\{x\in G_0\Bigg|\text{ 存在有理数 }u_1,u_2\in[-n,n],\text{ 使}\\&\qquad|u_1-u_2|<\frac{1}{m},|f(x,u_1)-f(x,u_2)|>\frac{1}{3n}\Bigg\}.\end{aligned}$$

由 Caratheodory 条件 (ii) 知, 对于固定的 u_1, u_2, 集 $\left\{x \in G_0 \,\middle|\, |f(x,u_1) - f(x,u_2)| > \dfrac{1}{3n}\right\}$ 是可测集, 从而集 $G_0 \backslash G_{m,n}$ (作为可数个这种可测集的并集) 也是可测集, 因此, 集 $G_{m,n}$ 是可测集. 显然, 对固定的 n, 有 $G_{1,n} \subset G_{2,n} \subset G_{3,n} \subset \cdots$. 令 $E_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_{m,n} \subset G_0$, 证明 $E_n = G_0$. 事实上, 若 $E_n \neq G_0$, 则存在 $x_0 \in G_0 \backslash E_n = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} (G_0 \backslash G_{m,n})$, 从而存在 $u_1^{(m)}, u_2^{(m)} \in [-n, n]$, 使

$$
\begin{gathered}
|u_1^{(m)} - u_2^{(m)}| < \frac{1}{m}, \\
|f(x_0, u_1^{(m)}) - f(x_0, u_2^{(m)})| > \frac{1}{3n} \quad (m = 1, 2, \cdots).
\end{gathered}
$$

这显然与函数 $f(x_0, u)$ 在 $-n \leqslant u \leqslant n$ 上一致连续矛盾. 于是, 证明了 $E_n = G_0 (n = 1, 2, \cdots)$. 从而有

$$
\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} G_{m,n} = \operatorname{mes} G_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).
$$

对给定的 n, 取 m_0 使

$$
\operatorname{mes} G_{m_0,n} > \operatorname{mes} G_0 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\eta}{3},
$$

将区间 $[-n, n]$ 进行 $s = 2nm_0$ 等分, 设分点为

$$
-n = u^{(0)} < u^{(1)} < \cdots < u^{(s)} = n.
$$

由 Лузин 定理, 存在有界闭集 $D_i \subset G_0$, 满足

$$
\operatorname{mes} D_i > \operatorname{mes} G_0 - \frac{\eta}{3(s+1)2^n},
$$

且使 $f(x, u^{(i)})$ 作为 x 的函数在 D_i 上连续 (从而, 一致连续), $i = 0, 1, \cdots, s$. 令 $D = \bigcap\limits_{i=0}^{s} D_i$, 则由一致连续性知, 存在 $\delta > 0$, 使

$$
\begin{gathered}
|f(x_1, u^{(i)}) - f(x_2, u^{(i)})| < \frac{1}{3n}, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \\
d(x_1, x_2) < \delta, \quad i = 0, 1, \cdots, s.
\end{gathered}
$$

现取闭集 $F_n \subset G_{m_0,n} \bigcap D$, 使

$$
\operatorname{mes} F_n > \operatorname{mes} (G_{m_0,n} \bigcap D) - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\eta}{3},
$$

又取 δ_n 使 $0<\delta_n<\min\left\{\delta,\dfrac{1}{m_0}\right\}$. 下证此 F_n 与 δ_n 即符合要求. 事实上,

$$\begin{aligned}G_0\backslash(G_{m_0,n}\bigcap D)&=(G_0\backslash G_{m_0,n})\bigcup(G_0\backslash D)\\&=(G_0\backslash G_{m_0,n})\bigcup\left(\bigcup_{i=0}^{s}(G_0\backslash D_i)\right),\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}(G_0\backslash(G_{m_0,n}\bigcap D))\\&\leqslant\operatorname{mes}(G_0\backslash G_{m_0,n})+\sum_{i=0}^{s}\operatorname{mes}(G_0\backslash D_i)\\&<\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\eta}{3}+\sum_{i=0}^{s}\frac{\eta}{3(s+1)2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\eta}{3},\end{aligned}$$

故有

$$\operatorname{mes}(G_{m_0,n}\bigcap D)>\operatorname{mes}G_0-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\eta}{3},$$

因此, 得

$$\operatorname{mes}F_n>\operatorname{mes}G_0-\frac{\eta}{2^n}=\operatorname{mes}G-\frac{\eta}{2^n}.$$

设 $x_1,x_2\in F_n,d(x_1,x_2)<\delta_n,u_1,u_2\in[-n,n],|u_1-u_2|<\delta_n$. 由于 $\delta_n<\dfrac{1}{m_0}$, 而 $u^{(i+1)}-u^{(i)}=\dfrac{1}{m_0}(i=0,1,2,\cdots,s-1)$, 故存在某 $u^{(i)}$, 使 $|u_1-u^{(i)}|<\dfrac{1}{m_0},|u_2-u^{(i)}|<\dfrac{1}{m_0}$, 从而知

$$\begin{aligned}&|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|\\&\leqslant|f(x_2,u_2)-f(x_2,u^{(i)})|+|f(x_2,u^{(i)})-f(x_1,u^{(i)})|+|f(x_1,u^{(i)})-f(x_1,u_1)|\\&<\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

证完.

以下恒设 $f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件.

引理 1.2 若 $\varphi(x)$ 在 G 上可测, 则 $\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$ 也是 G 上可测函数.

证 先设 $\operatorname{mes}G<+\infty$. 由引理 1.1, 存在闭集 $F_n\subset G,\operatorname{mes}F_n>\operatorname{mes}G-\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 使 $f(x,u)$ 在 $F_n\times(-\infty,+\infty)$ 上连续. 不妨设 $F_n\subset F_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, 否则, 以 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$ 作为新的 F_n 即可. 由 Лузин 定理, 存在闭集 $D_n\subset$

$F_n, \operatorname{mes} D_n > \operatorname{mes} F_n - \dfrac{1}{n}$, 使 $\varphi(x)$ 在 D_n 上连续. 同样可设 $D_n \subset D_{n+1}(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n, H = G \backslash D$, 则

$$\operatorname{mes} D = \lim_{n \to \infty} \operatorname{mes} D_n = \operatorname{mes} G,$$

并且 $\operatorname{mes} H = 0$. 对任何实数 a, 显然集

$$\{x | x \in D_n, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}$$

是闭集, 而集

$$\begin{aligned}&\{x | x \in D, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\} \\ =& \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | x \in D_n, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\},\end{aligned}$$

故 $\{x | x \in D, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}$ 是可测集, 从而集

$$\{x | x \in G, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}$$

是可测集, 于是 $f(x, \varphi(x))$ 是 G 上的可测函数.

现设 $\operatorname{mes} G = +\infty$, 把 G 表示为

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

其中 $G_n \bigcap G_m = \varnothing (n \neq m), \operatorname{mes} G_n < +\infty (n = 1, 2, \cdots)$. 由前段已知 $f(x, \varphi(x))$ 是 G_n 上的可测函数, 故集 $\{x | x \in G_n, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}$ 是可测集, 从而集

$$\begin{aligned}&\{x | x \in G, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\} \\ =& \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | x \in G_n, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}\end{aligned}$$

也是可测集, 因此 $f(x, \varphi(x))$ 是 G 上的可测函数. 证完.

引理 1.3　设 $\operatorname{mes} G < +\infty$. 若 $\varphi_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 在 G 上依测度收敛于 $\varphi(x)$, 则 $\mathbf{f} \varphi_n(x)$ 必在 G 上依测度收敛于 $\mathbf{f} \varphi(x)$.

证　$\forall \sigma > 0$, 令

$$F_n = \{x | x \in G, |f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \geqslant \sigma\}.$$

我们需证 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} F_n = 0$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} D_n = \operatorname{mes} G, \tag{1.2}$$

这里 $D_n = G\backslash F_n = \{x|x \in G, |f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi(x))| < \sigma\}$. 令 $G_k = \{x|x \in G$ 满足: 对任何 u, 只要 $|\varphi(x) - u| < \dfrac{1}{k}$, 就有 $|f(x,\varphi(x)) - f(x,u)| < \sigma\}$, 其中 $k = 1,2,\cdots$. 显然 $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \cdots$. 令 $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. 若 $x_0 \in G\backslash H$, 则 $x_0 \overline{\in} G_k (k = 1,2,\cdots)$. 因此 $\exists u_k$, 使

$$|\varphi(x_0) - u_k| < \frac{1}{k}, \quad |f(x_0,\varphi(x_0)) - f(x_0,u_k)| \geqslant \sigma \quad (k = 1,2,\cdots),$$

故函数 $f(x_0,u)$ 在点 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 处不连续. 于是, 由 $f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件, 知 $\operatorname{mes}(G\backslash H) = 0$, 即

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} H = \operatorname{mes} G. \tag{1.3}$$

$\forall\varepsilon > 0$, 由 (1.3) 式并注意到 $\operatorname{mes} G < +\infty$, 可取充分大的 k_0, 使

$$\operatorname{mes} G_{k_0} > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

令

$$Q_n = \left\{x \middle| x \in G, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \geqslant \frac{1}{k_0}\right\},$$
$$R_n = G\backslash Q_n = \left\{x \middle| x \in G, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{k_0}\right\}.$$

由于 $\varphi_n(x)$ 依测度收敛于 $\varphi(x)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} Q_n = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} R_n = \operatorname{mes} G$, 因此, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\operatorname{mes} R_n > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

显然 $G_{k_0} \bigcap R_n \subset D_n$, 故

$$G\backslash D_n \subset G\backslash(G_{k_0} \bigcap R_n) = (G\backslash G_{k_0}) \bigcup (G\backslash R_n),$$

于是, 由 (1.4) 式与 (1.5) 式, 并注意到 $\operatorname{mes} G < +\infty$, 可知: 当 $n > N$ 时恒有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \operatorname{mes} G - \operatorname{mes} D_n &= \operatorname{mes}(G\backslash D_n) \\
&\leqslant \operatorname{mes}(G\backslash G_{k_0}) + \operatorname{mes}(G\backslash R_n) \\
&= (\operatorname{mes} G - \operatorname{mes} G_{k_0}) + (\operatorname{mes} G - \operatorname{mes} R_n) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

故 (1.2) 式成立. 证完.

定理 1.1　若算子 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(G)(p_1 \geqslant 1)$ 入 $L_{p_2}(G)(p_2 \geqslant 1)$ (即 $\mathbf{f}\varphi(x) \in L_{p_2}(G), \forall \varphi(x) \in L_{p_1}(G)$), 则 $\mathbf{f}$ 必连续.

证　先设 $\operatorname{mes} G < +\infty$. 设 $f(x,0) \equiv 0$, 证明算子 $\mathbf{f}$ 在空间 $L_{p_1}(G)$ 的零元素 θ 处连续. 用反证法. 假定 $\mathbf{f}$ 在点 θ 不连续, 则存在 $\alpha > 0$ 及 $\varphi_n \in L_{p_1}(G)(n = 1,2,\cdots)$, $\int_G |\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x \to 0$, 使

$$\int_G |\mathbf{f}\varphi_n(x)|^{p_2}\mathrm{d}x > \alpha \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{1.6}$$

显然可以认为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_G |\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x < +\infty \tag{1.7}$$

(否则, 取 $\{\varphi_n\}$ 的某子列作为新的 $|\varphi_n|$ 即可). 现作出正数列 $\varepsilon_k, \{\varphi_n\}$ 的子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 以及可测集列 $\{G_k\}(G_k \subset G)$, 满足下列四个条件:

(i) $\varepsilon_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon_k$;

(ii) $\operatorname{mes} G_k \leqslant \varepsilon_k$;

(iii) $\displaystyle\int_{G_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x > \frac{2}{3}\alpha$;

(iv) $D \subset G, \operatorname{mes} D \leqslant 2\varepsilon_{k+1} \Rightarrow \displaystyle\int_G |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x < \frac{\alpha}{3}$.

$\varepsilon_k, \varphi_{n_k}, G_k$ 可按归纳法作出: 首先令 $\varepsilon_1 = \operatorname{mes} G, \varphi_{n_1}(x) = \varphi_1(x), G_1 = G$; 若 $\varepsilon_k, \varphi_{n_k}, G_k$ 已作出, 则可取 $\varepsilon_{k+1} > 0$, 使条件 (iv) 满足, 这是可以做到的, 因为 Lebesgue 积分具有绝对连续性. 这时条件 (i) 必自动满足, 因为若 $\varepsilon_{k+1} > \dfrac{1}{2}\varepsilon_k$, 则由条件 (ii) 与 (iii) 知

$$\operatorname{mes} G_k \leqslant \varepsilon_k < 2\varepsilon_{k+1}, \quad \int_{G_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x > \frac{2}{3}\alpha,$$

显然与条件 (iv) 矛盾. 由 $\int_G |\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x \to 0$ 知 $\varphi_n(x)$ 在 G 上依测度收敛于 0, 从而根据引理 1.3 知 $\mathbf{f}\varphi_n(x)$ 在 G 上也依测度收敛于 0. 于是, 在 $\{\varphi_n(x)\}$ 中可取某 $\varphi_{n_{k+1}}(x)(n_{k+1} > n_k)$, 使 $\operatorname{mes} G_{k+1} < \varepsilon_{k+1}$, 这里

$$G_{k+1} = \left\{x \,\middle|\, x \in G, |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)| \geqslant \left(\frac{\alpha}{3\operatorname{mes} G}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}.$$

令

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= G \backslash G_{k+1} \\ &= \left\{x \,\middle|\, x \in G, |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)| < \left(\frac{\alpha}{3\operatorname{mes} G}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}, \end{aligned}$$