数学分析

第二册

周民强　编著

科学出版社

数学分析

第二册

周民强　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书讲述的是高等数学的基础内容——数学分析，其核心内容是微积分学，全书共三册. 本书为第二册，共分六章，包括定(Riemann)积分、反常积分、常数项级数、函数项级数、幂级数与 Taylor 级数、Fourier 分析初步.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义基础上修改而成，内容丰富、深入浅出. 对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题，本书以加注的形式予以解说，以利于读者更好地接受新知识. 在章末附有后记，意在为读者更清楚地了解知识背景，更迅速地提高数学能力创造条件. 本书选用适量有代表性、启发性的例题，还选入足够数量的习题和思考题. 习题和思考题中，既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做.

本书可作为大学本科阶段的数学、概率统计、应用数学、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 第 2 册/周民强编著. —北京：科学出版社，2014. 12
ISBN 978-7-03-042502-7

Ⅰ. 数… Ⅱ. 周… Ⅲ. ①数学分析-高等数学-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 268439 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：钟 洋
责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014 年 12 月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：433 000
定价：45.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本教材的前身是北京大学数学科学学院教学讲义，2002 年由上海科学技术出版社出版发行. 2014 年在科学出版社的鼓励下，经修订后再版发行. 在撰稿的进程中，以下五个方面是作者着重思考并力图落实的：

(1) 加强导引性论述，适当介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法. 这或许有益于树立正确的数学观，增加学习的活泼性.

(2) 适当提高起点，扩大知识面. 书中在讲解各种理论的应用时，列举了丰富的典型例题，以利于在提高启发式教学水平的同时，让学生有一个扩展的自学园地.

(3) 为了培养学生数学思维的习惯，使学生养成"会学"数学的能力，本书在每章节后列有适当数量的思考问题. 此外，还以加注、用小字和后记的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项，这有助于引发读者的创新思维.

(4) 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一，本书一律用原文书写(在脚注中给出中文译名供参考)，并尽力介绍他们的国籍和生卒年代. 尊重那些曾为人类科学进步作出过贡献的学者，是我们后代人文明的表现之一.

(5) 对于想用本书作为正式教材的学校和教师，在教学实践中必须依据培养目标和实际情况对其内容作适当取舍，不能照本宣科，特别是对带有 * 标记的内容. 在这里，还希望广大读者和教师对本书提出批评和建议.

作　者
2014 年 2 月

致 读 者

《数学分析》的核心内容是“微积分”——微分学与积分学的统称，它是数学发展史中最伟大的成果，始创于17世纪下半叶，其代表人物是两位著名的学者：英国的I. Newton(1643～1727)和德国的G. W. Leibniz(1646～1716).

Newton和Leibniz对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同，他们两个使微积分学成为一门独立的学科，而不再是古希腊几何的附庸和延续，且为许多课题提供了崭新的研究方法.自微积分始，数学发展成为以变量数学为中心的时期.微积分从运动、变化的观点和方法来考察各种事物和现象，这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际.因此，微积分的建立给予科学、技术领域巨大的影响，推动了生产力的发展.特别是在天文学、力学方面的成就，在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条.但另一方面，也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难，但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期，由于科学技术进步的推动，促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作，终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系，为微积分的普及创造了更加有利的条件，也使它成为今天众多院校的必修课程.

因此，在三百余年后的今天，学习微积分已不能算是件“时髦”的事情了.如果从培养21世纪的人才而言，或许只能说是一张“入门券”而已.

学习微积分课程的目的有三个：一是可应用于实际课题的计算；二是通过它提升数学思维、逻辑判断的能力；三是要为学习其他课程奠定基础.

本册介绍微积分学的另一组成部分——Riemann积分(定积分)和无穷级数的理论，我们将看到它们仍然是建立在极限思想的基础之上并贯穿始终，只是在形式结构上稍有不同而已.

读者在本书第一册的学习中，已经对微积分产生了浓厚的兴趣，这就为进一步学习增添了强大的动力.或许有人对先前的学习感到有些吃力，那么应该看到这是一种正常现象.如果我们想到那些创建微积分的大师们自己都表达不清某些基本概念，直到19世纪中期微积分才树立起一个较严密而完整的体系时，那么今天对一个初学者来说在学习上遇到些困难又算得了什么！况且，时代不同了，人类的智慧在逐代升级，各种现代化的氛围为大家攀登科学高峰创造了极为有利的条件，

"万事俱备,只欠东风".这"东风"不是别的,就是自己的"努力,奋进""不怕难,只怕站",正所谓

道虽远,不行不至,

事虽难,不为不成.

最后预祝大家胜利完成本册的学习任务!

目　　录

绪论　积分史简述

积分起源于求积问题.早在古代人们就着手计算由曲边围成的面积,如叙拉古(属西西里岛)的 Archimedes(公元前 287～前 212 年)就曾探求过抛物弓形的面积,又如我国南北朝时期的刘徽,在公元 3 世纪也曾力求单位圆的面积.他们的方法都是用许多不重叠的三角形来拟合和逼近图形.由于时代的限制,他们不能克服"无穷运算"的困难,加之没有一般曲线的概念,求积问题一直没有多大进展.到了文艺复兴时期(约公元 1200～1600 年),欧洲在科学技术的推动下,需要求积的对象扩大了,许多学者为了求出各种曲边围成的面积(如正弦曲线,x^2 等),曾创造了更多的巧妙方法.然而由于这些技巧随边界曲线的不同而不同,且与其几何特征密切相关,也使求积问题裹足不前.

到了 17 世纪下半叶,研究物体位移运动以及各种事物的变化规律成为数学、物理学的主要课题,致使许多学者形成了以运动变化的观点考察对象的思想.如视曲线为点变动的轨迹,甚至将质点做变速直线运动的规律也用曲线来描述.这些研究工作深入揭示出切线(斜率)与曲线纵坐标变动之间的联系,从而认识到求积与求导的互逆关系,使积分问题作为求导的逆运算来处理,微积分主要框架基本构成.这就是两位伟大学者:英国的 I. Newton 和德国的 G. Leibniz 的主要建树,在微积分这一伟大历史成就的丰碑上,永远留下了他们的名字.

Newton-Leibniz 时代的积分学在本质上应该认为是关于曲线的积分.虽然 Leibniz 曾界定积分为"某种求和过程",但由于涉及对所谓"无穷多个无穷小量的和"的运算的正确认识,也就没有引起人们的重视而无法开展.

18 世纪的数学家,受到微积分的巨大功效的激励,无暇顾及当时微积分学内部存在的不严谨性问题,而继续奋发前进,并创立了许多分析数学的新领域,获得了丰富的成果.

然而,随着物理学研究领域的扩大和深入(如振动、光和热等),用以表达运动变化规律的数学中早期的函数概念受到了极大的冲击,迫使人们对函数只是由一个解析式表达的连续曲线的说法加以改变.特别是 1810 年左右法国数学物理学家 Fourier 关于热传导理论的开创性工作,还一度动摇了 17 世纪将积分作为反导数运算的认识,同时也使其中所运用的所谓"无穷小分析"的不确切陈述再也无法迎接新的挑战,微积分体系奠基工作即严密化开始了.

所谓严密化,是指要把微积分中最基本的概念建立在严谨的逻辑的基础之上.在这一方面作出重大贡献的应是法国数学家 Cauchy,他在 19 世纪 20 年代发表的

著作中引进了变量的极限概念，廓清了存在于前期的关于无穷小量的“不可分量”“瞬”“微差”等不同描述，从而建立起定积分作为“分割、求和、取极限”的统一格式. 不过，这一积分定义是针对连续函数而发的. 到了 19 世纪 30 年代，函数概念几经周折终于由德国数学家 Dirichlet 说定. 他在 1837 年的文章中给出了至今还沿用的(单值)函数的定义，从而对函数认识的混乱局面得到了控制，微积分学的基本研究对象也有了共同的规范，为微积分学的进一步发展奠定了基础. 1854 年德国数学家 Riemann(Dirichlet 的学生)针对一般的函数，给出了积分的定义(这一工作由德国数学家 Dedekind 于 1867 年发表)，极大地扩充了可积分的函数类，保留着积分作为求积的原有内容，还在新的基础上重新树立起积分论初创期的成果. 同时，法国数学家 Darboux 对此又作了更加细微的解剖. 但总的说来，我们称这一积分论为 Riemann 积分体系.

积分史的简单回顾使我们懂得，一个完整的概念和正确有效的重大理论的建立，需经过长时期的磨练和几代人的艰苦努力. 幸运的是，我们这一代人不必再从头学起，而可以站在巨人的肩上向高处攀登. 本册所介绍的积分理论，主要是指 19 世纪数学家们整理完成的工作.

科学在不断地前进，积分论的进一步革新，是在 20 世纪初期由法国数学家 Lebesgue(1875～1941)完成的，它为现代分析数学打开了大门.

第 7 章　定(Riemann)积分

7.1　定(Riemann)积分的概念

7.1.1　曲边梯形的面积问题

积分概念来自求由曲边围成的区域面积问题，且早在古代就开始探讨了(见本章后记). 但在 18 世纪以前，由于人们无法正确把握无限运算过程，还不清楚实数系统的结构，也就缺乏对连续函数的性质的认识，因此不能形成处理求面积问题的统一格式和方法.

第一个明确提出“分割函数的定义区间，求在子区间上矩形面积的总和，再取极限(子区间长度趋于零)的格式”来求面积的应推法国数学家 Cauchy. 为了说明这一想法，让我们先举一例.

例 1　求坐标平面上由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的曲边三角形的面积(图 7-1).

解　用分点 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$ 将区间$[0,1]$划分开来，在每个子区间$\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$上取高为 $y=\left(\frac{i}{n}\right)^2$，作小矩形，它们面积的总和为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}.$$

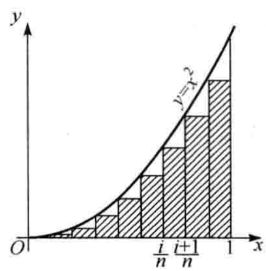

图 7-1

再取极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\frac{1}{3}$，求出面积为$\frac{1}{3}$.

如果上述求积的方法要推广到一般的函数 $y=f(x)$ 上去，那么我们可以提出以下三点质疑：

(1) 上例中如此求得的值$\frac{1}{3}$是该曲边三角形的面积吗？如果在每个子区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上所作小矩形的高为$\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$，甚至取为子区间中点上的高，此时和式极限是否仍相同？不相同怎么办？

(2) 如果把区间划分成 2^n 个子区间，甚至不是等分，然后仍然“以直代曲”在子区间上作矩形，求和取极限，其极限值是否相同？

(3) 如果用上述方法求积，万一极限不存在怎么办？此时，是计算方法不对呢，还是该曲边图形没有面积？

对此,法国数学家 Cauchy 在《分析概论》(1823 年)一书中指出(用现在的写法),若 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,且对$[a,b]$任作分划 Δ:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad \|\Delta\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{(x_i-x_{i-1})\},$$

则必存在极限

$$I=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\quad \xi_i=x_i\text{ 或 }x_{i-1}. \qquad ①$$

并认定值 I 即为该曲边梯形的面积.

由于缺乏一致连续的概念,致使 Cauchy 提出的证明是不严格的. 此外,他的这一求积法也只适用于至多具有有限个间断点的函数. 然而在 19 世纪 20 年代,Fourier 级数(见第 12 章)的收敛课题正受到广泛关注,对此作出重要贡献的德国数学家 Dirichlet 希望把自己给出的收敛定理推广到具有无穷多个不连续点的函数上去. 在这里,他首先就遇到了一个函数的可积性问题,但是没有解决.

德国数学家 Riemann 在柏林大学学习时,是 Dirichlet 的学生,当他获悉这一信息时,以极大兴趣研究此课题. 他不是先假定函数 $y=f(x)$是连续的,而是探求式①成立与 $f(x)$的属性的关系,特别是把式①内 $f(\xi_i)$中的 ξ_i 改为子区间$[x_{i-1},x_i]$内的任一点,为积分操作提供很大方便. Riemann 的工作为经典积分理论奠定了严密的基础,他不仅给出了函数可积的充分必要条件,而且给出一个具有无穷多不连续点的可积函数的著名例证.

至于第(3)点质疑,即当式①极限不存在时应当如何认识? 此时,我们只能认为该曲边梯形的"面积"不存在,或更确切地说,在用这种方式计算和认识下,它没有面积. 从本质上讲,平面区域的"面积"应在数学上给予定义. 因此,上面的做法实际上是在给出面积的算法中同时也给出了面积的定义.

7.1.2　定积分的定义

设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数.

(1) 把$[a,b]$分成有限个子区间,即在$[a,b]$中插入有限个分点,一般都表示为

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并形成一组 n 个相连的子区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$. 我们称此为$[a,b]$的一个**分划(分割)**,记为 Δ,并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$,以及 $\|\Delta\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,即各子区间长度之最大值,称为分划 Δ 的模.

(2) 在每个子区间中任取一点:$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$,简称为插点组,并记为$\langle\xi\rangle$.

(3) 把分划 Δ 的各子区间与插点组$\langle\xi\rangle$上相应的函数值组成和式

$$S_\Delta=S_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

称为 $f(x)$在$[a,b]$上的 **Riemann 积分和**,简称为**积分和**,其值与分划 Δ、插点组$\langle\xi\rangle$的取法有关,如图 7-2 所示.

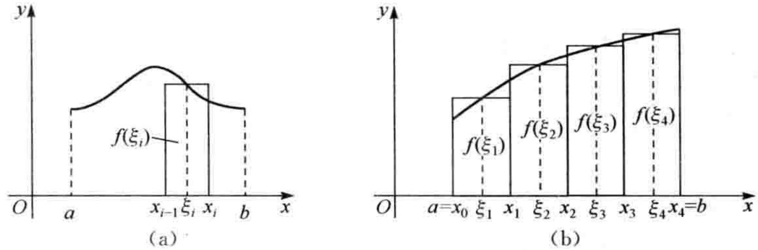

图 7-2

定义 7.1 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数. 若有实数 J,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任意分划 Δ,以及任取的插点组$\langle\xi\rangle$,均有

$$|S_\Delta(f,\xi)-J|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$在$[a,b]$上是(**Riemann**)**可积**的,或说 $f(x)$在$[a,b]$上的(**Riemann**)**定积分存在**,并简记为

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f,\xi)=J,\quad \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=J.$$

数值 J 称为 $f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**,并记为

$$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

也简称为 $f(x)$从 a 到 b 的定积分(值),a 称为积分**下限**,b 称为积分**上限**,$f(x)$称为被积函数.

为方便今后的积分运算,我们引进 $f(x)$从 b 到 a $(a<b)$ 的定积分记为 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$,以及 a 到 a 的积分记为$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x$,并规定它们为

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

显然,这与上述积分定义是协调的.

例 1 设 $f(x)$是$[a,b]$上的常数(函数):$f(x)=A$,$x\in[a,b]$,则 $f(x)$在$[a,b]$上是可积的,且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A(b-a).$$

证明 由于对于$[a,b]$的任一分划 Δ:$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及插入点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$,总有

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=A\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=A(b-a),$$

故易知 $J=A(b-a)$.

定积分的定义是用 ε-δ 的语言描述的,但它不同于曾经学过的序列或函数极限类型. 在分划的模 $\|\Delta\|$ 趋于零的过程中,当分划 Δ 取定时,积分和 $S_\Delta(f,\xi)$的值

并未完全确定. 面对这一新的极限形式，首先必须阐明其极限值即积分(值)的唯一性，才能获得其数学上的明确意义.

定理 7.1　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则其积分值是唯一的.

证明　假定存在 J_1 与 J_2 使得

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta = J_1, \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta = J_2,$$

则由定义可知，对任给 $\varepsilon>0$，我们有

(1) 存在 $\delta_1>0$，使得对满足 $\|\Delta_1\|<\delta_1$ 的任一分划 Δ_1 和插点组 $\langle\xi^{(1)}\rangle$，有

$$|S_{\Delta_1}(f,\xi^{(1)})-J_1|<\frac{\varepsilon}{2};$$

(2) 存在 $\delta_2>0$，使得对满足 $\|\Delta_2\|<\delta_2$ 的任一分划 Δ_2 和插点组 $\langle\xi^{(2)}\rangle$，有

$$|S_{\Delta_2}(f,\xi^{(2)})-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任一分划 Δ 和插点组 $\langle\xi\rangle$，都有

$$|S_\Delta(f,\xi)-J_1|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_\Delta(f,\xi)-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知

$$|J_1-J_2|\leqslant|J_1-S_\Delta(f,\xi)|+|S_\Delta(f,\xi)-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，即得 $J_1=J_2$.

现在，我们面临的问题与已学过的极限课题类似，即极限的存在性与寻求极限值. 在定积分的定义中，函数 $f(x)$ 的可积性与积分值 J 的存在性是统一的，但在应用中要求预先知道 J 值是不现实的. 因此，在下文中我们仍将对这两个问题分别展开讨论. 对于前者，有函数可积的充分必要条件，它将使我们认识到许多可积函数；至于后者，Newton-Leibniz 公式则是计算定积分值的主要手段. 不过，此前先来介绍函数可积的必要条件，以便缩小研究范围.

定理 7.2(函数可积的必要条件)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分值为 J，那么对于 $\varepsilon=1$，必存在 $\delta>0$，只要 $[a,b]$ 的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $\|\Delta\|<\delta$，不论插点组 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 如何选取，均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|<1.$$

下面指出，$f(x)$ 在任一子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都是有界的. 不妨考察 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$. 因为我们有

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|-\left|\sum_{i\neq i_0} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|<1,$$

也就是说，

$$|f(\xi_{i_0})| < \frac{1}{\Delta x_{i_0}}\left(1 + \left|\sum_{i \neq i_0} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|\right).$$

易知对于除 $i=i_0$ 外取定的插点 ξ_i，上式右端是一个定值，而让插点 ξ_{i_0} 在 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 上变动时，由于上式总是成立的，就说明 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 上是有界的. 因此，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

注 有界函数不一定是可积函数. 请看下例.

定义在 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数},\\ 0, & x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

是不可积的. 这是因为对 $[0,1]$ 的任意的其模充分小的分划 $\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 来说，总可取两个插点组：

$$\left.\begin{array}{l}\langle\xi\rangle: \text{有理数 } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i];\\ \langle\eta\rangle: \text{无理数 } \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]\end{array}\right. (i=1,2,\cdots,n).$$

而作出两个 Riemann 和

$$S_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$

$$S_\Delta(f,\eta) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i = 0,$$

所以不可能存在实数 J，使得 $|S_\Delta(f,\xi)-J|$ 与 $|S_\Delta(f,\eta)-J|$ 均任意小.

思 考 练 习

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$，试证明存在 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$，使得 $f(x)>0$，$x\in[\alpha,\beta]$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，$\alpha>0$，对 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，以及任意的插点组 $\langle\xi\rangle$，试计算

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(\Delta x_i)^{1+\alpha}.$$

3. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数，若有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，试证明对任给 $\varepsilon>0$，存在子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $f(x)<\varepsilon(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$.

7.2 Darboux 上、下和，上、下积分

为了探讨函数的可积性，当然必须考察积分和(数值)的变动状态与范围. 7.1 节的定理已经告诉我们，只有有界的函数才能研究它的可积性. 因此，函数的上、下