Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题全解

毛 磊　滕兴虎　寇冰煜
张 燕　李 静　毛自森　编著

2

经典名著最新版本　全书增补数百新题
题型最全题量最大　数学名家详细解析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解 2

编著 毛 磊 滕兴虎 寇冰煜
张 燕 李 静 毛自森

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解 2./毛磊等编著.
—南京:东南大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5641-4991-8

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①毛… Ⅲ.①数学分析—高等
学校—题解 Ⅳ.①O17—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 112521 号

吉米多维奇数学分析习题全解 2

编　　著	毛　磊　滕兴虎　寇冰煜 张　燕　李　静　毛自森	责任编辑	戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		

出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn

经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	13.50　字数　395 千
版　　次	2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-4991-8		
定　　价	20.00 元		

前 言

《数学分析》是数学学科中一门重要的基础课，同时也是学习时间跨度大、理论体系严谨、内容极其丰富、学习难度很高的一门课程。学好《数学分析》既可以为后续专业课程奠定必备的数学基础，同时也培养了学生抽象的逻辑思维能力，提高了学生的创新意识、开拓精神和实际应用能力。

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作。该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容涵盖了《数学分析》的全部命题。同时，该书难题多，许多题目的难度已经超出对同学们的要求，以至于许多同学望而却步。为了帮助广大同学更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们以俄文第 13 版为基础，对习题集中的 5000 道习题逐一进行了解答。

众所周知，学习数学，做练习题是很重要的。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力、逻辑推理能力和综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

本书可作为数学专业同学学习《数学分析》的参考书，又可以作为其他理工科同学学习《高等数学》、《微积分》的参考书，同时也可以作为各专业同学考研复习时的参考书。

由于我们水平有限，本书不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

目　录

第二章　一元函数的微分学

§1. 显函数的导数

1. 导数的定义

若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

表达式
$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad ①$$

若有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情况下称为可微分的函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上为函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 $[\tan\alpha = f'(x)]$.（图 2.1）

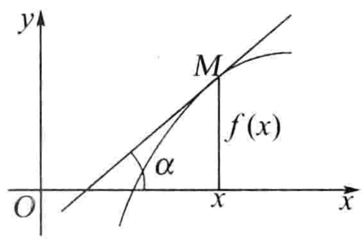

图 2.1

2. 求解导数的基本规则

如果 c 为常数且函数

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x)$$

都有导函数，则

(1) $c' = 0$;

(2) $(cu)' = cu'$;

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

(4) $(uv)' = u'v + v'u$;

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$;

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$(n 为常数);

(7) 如果函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数,则

$y'_x = y'_u u'_x$.

3. 基本公式

设 x 是自变数,则

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$(n 为常数). (2) $(\sin x)' = \cos x$.

(3) $(\cos x)' = -\sin x$. (4) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(5) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. (6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(7) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (8) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(9) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

(10) $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0)$, $(e^x)' = e^x$.

(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(a>0$, 且 $a \neq 1)$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$.

(12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. (13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

(14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. (15) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4. 单侧导函数

表达式 $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

及 $$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

分别称作函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数

如果在点 x 函数 $f(x)$ 是连续的,且

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷的导函数. 在这种情况下，函数 $y=f(x)$ 的图形在点 x 的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 如果 x 由 1 变到 1000，求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 1000-1=999$,

$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$

【822】 如果 x 由 0.01 变到 0.001，求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 0.001-0.01=-0.009$,

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000.$$

【823】 若(1) $y=ax+b$;

(2) $y=ax^2+bx+c$;

(3) $y=a^x$.

变量 x 有增量 Δx，求出增量 Δy.

解 (1) $\Delta y=[a(x+\Delta x)+b]-[ax+b]$

$=a\Delta x.$

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-[ax^2+bx+c]$

$=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2.$

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$

【824】 证明：

(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (1) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)+\Delta g(x).$

(2) $\Delta[f(x)g(x)]$

$=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+f(x)[g(x+\Delta x)$
$-g(x)]$

$= \Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\Delta g(x).$

【825】 经过曲线 $y=x^2$ 上的两个点 $A(2,4)$ 及 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引出割线 AA'，求此割线的斜率，若

(1) $\Delta x=1$; (2) $\Delta x=0.1$;

(3) $\Delta x=0.01$; (4) Δx 为任意小.

已知曲线在点 A 上的切线的斜率等于多少？

解 割线 AA' 的斜率为

$$k_{AA'}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x,$$

(1) $k_{AA'}=5$. (2) $k_{AA'}=4.1$.

(3) $k_{AA'}=4.01$. (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是，在 A 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

【826】 利用函数 $y=x^3$ 将 Ox 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 若

(1) $h=0.1$;(2) $h=0.01$;(3) $h=0.001$,

求出上述系数的值. 又当 $x=1$ 时，伸长系数等于多少？

解 平均伸长系数为

$$\overline{L}=\frac{(1+h)^3-1^3}{h}=3+3h+h^2$$

(1) $\overline{L}=3+3\cdot(0.1)+(0.1)^2=3.31$;

(2) $\overline{L}=3+3\cdot(0.01)+(0.01)^2=3.0301$;

(3) $\overline{L}=3+3\cdot(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是，在点 $x=1$，伸长系数为

$$L\,|_{x=1}=\lim_{h\to 0}\overline{L}=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3.$$

【827】 某点沿 Ox 轴运动的规律用下式表示：

$$x=10t+5t^2,$$

其中 t 表时间(以 s 计)；x 表距离(以 m 计).

求出在时间 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 内某点的平均运动速度，若：(1) $\Delta t=1$;(2) $\Delta t=0.1$;(3) $\Delta t=0.01$，计算此平均速度的值. 当 $t=20$ 时其运动速度等于多少？

解 平均速度为

$$\bar{v}=\frac{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times 20+5\times 20^2]}{\Delta t}$$

$$=210+5\Delta t(\mathrm{m/s}),$$

(1) $\bar{v}=210+5\times 1=215(\mathrm{m/s})$,

(2) $\bar{v}=210+5\times 0.1=210.5(\mathrm{m/s})$,

(3) $\bar{v}=210+5\times 0.01=210.05(\mathrm{m/s})$,

于是当 $t=20$ 时运动的速度为

$$v\big|_{t=20}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}(210+5\Delta t)=210(\mathrm{m/s}).$$

【828】 根据导函数的定义，直接求出以下函数的导函数：(1) x^2；(2) x^3；(3) $\frac{1}{x}$；(4) $\sqrt{x}$；(5) $\sqrt[3]{x}$；(6) $\tan x$；(7) $\cot x$；(8) $\arcsin x$；(9) $\arccos x$；(10) $\arctan x$.

解　(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$,

于是 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

(2) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2.$$

(3) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}.$$

(4) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad(x>0).$$

(5) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\qquad(x\neq 0).$$

(6) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\tan x + \tan\Delta x}{1 - \tan x \tan\Delta x} - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan\Delta x(1+\tan^2 x)}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}$$

$$= 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

(7) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan x - \tan(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\tan x\tan(x+\Delta x)}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

(8) 由三角函数公式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\cdot x\right]}{\Delta x}.$$

令 $\quad t = (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x,$

则当 $\Delta x \to 0$ 时，$t \to 0$. 从而

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2) - x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $\quad \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\arcsin t}{t} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\sin u} = 1.$

(9) 由三角函数公式，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}.$$

令　$t=x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}$,

则当 $\Delta x\to 0$ 时，$t\to 0$. 于是

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}+(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)},$$

于是　$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=1$.

【829】　若 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$.

解　$f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$$= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是　$f'(1) = (-1)^2(-2)^3 = -8,$

$f'(2) = f'(3) = 0.$

【830】　若:$f(x) = x^2\sin(x-2)$,求 $f'(2)$.

解　$f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2),$

于是　$f'(2) = 2^2\cos 0 = 4.$

【831】　$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

解　法一:

$$f'(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}},$$

所以　$f'(1) = 1 + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{\pi}{4}.$

法二:当 $x = 1$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x + \Delta x\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x}$$

$$= 1 + \arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

于是　$f'(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1 + \arcsin\sqrt{\dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)$

$$= 1 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

【832】　若函数 $f(x)$ 在点 a 可微分,求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

解　设 $x - a = \Delta x$,则当 $x \to a$ 时,$\Delta x \to 0$,于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

【833】　证明:如果函数 $f(x)$ 可微分,且 n 为自然数,则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x), \qquad ①$$

反之，如果对于函数 $f(x)$ 存在极限 ①，能否断定此函数有导函数？

研究狄利克雷函数的例子（参阅第一章，题 734）.

证　$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

反之，$f(x)$ 不一定可导. 例如，对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

在任一有理数点是不连续的，当然在这些点也不可导. 但当 x 为有理数时，$x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0 \qquad (x \text{ 为有理数}),$$

从而　$$\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0.$$

利用导数表，求下列函数的导函数（834 ～ 843）.

【834】　$y=2+x-x^2$，

问 $y'(0)$；$y'\left(\frac{1}{2}\right)$；$y'(1)$；$y'(-10)$ 等于多少？

解　$y'(x)=1-2x$，

所以　$y'(0)=1, y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$

$y'(1)=-1, y'(-10)=21.$

【835】　$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x.$

问当 x 为何值时：

(1) $y'(x)=0$；(2) $y'(x)=-2$；(3) $y'(x)=10$？

解　$y'(x)=x^2+x-2.$

(1) 由 $y'(x)=0$，得

$$x^2+x-2=0.$$

解之得 $x=-2$ 或 $x=1$.

(2) 由 $y'(x)=-2$，得

$$x^2+x=0.$$

解之得 $x=-1$ 或 $x=0$.

(3) 由 $y'(x)=10$，得

$$x^2+x-12=0.$$

解之得 $x=-4$ 或 $x=3$.

【836】 $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

【837】 $y=\dfrac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\dfrac{a}{a+b}$.

【838】 $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=(x-b)+(x-a)=2x-(a+b)$.

【839】 $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解
$$\begin{aligned}y'&=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3\\&\quad+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\\&=(x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)\\&\quad+2(x+1)(x+3)+3(x+1)(x+2)]\\&=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).\end{aligned}$$

【840】 $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

解
$$\begin{aligned}y'&=\sin\alpha(x\cos\alpha-\sin\alpha)+(x\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha\\&=x\sin2\alpha+\cos2\alpha.\end{aligned}$$

【841】 $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

解
$$\begin{aligned}y'&=mnx^{m-1}(1+mx^n)+(1+nx^m)n\cdot mx^{n-1}\\&=mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(n+m)x^{n+m-1}].\end{aligned}$$

【842】 $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解
$$\begin{aligned}y'&=-(1-x^2)^2(1-x^3)^3-4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3\\&\quad-9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2\end{aligned}$$

$$=-(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$$
$$=-(1-x)^5(1+x)(1+2x)\cdot(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2.$$

【842.1】 $y=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$

解 $$y'=20(5+2x)^9(3-4x)^{20}-80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19}$$
$$=20(5+2x)^9(3-4x)^{19}\cdot[3-4x-4(5+2x)]$$
$$=-20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19}.$$

【843】 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}.$

解 $y'=-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}\right)\qquad(x\neq 0).$

【844】 证明公式：

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'$$
$$=\frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}$$
$$=\frac{a(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2}$$
$$=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}\qquad(cx+d\neq 0).$$

求下列函数的导函数(845～971).

【845】 $y=\dfrac{2x}{1-x^2}.$

解 $$y'=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$$
$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\qquad(x\neq\pm 1).$$

【846】 $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$

解 $y'=\left[\dfrac{2}{1-x+x^2}-1\right]'=\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$

【847】 $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解 $y'=\dfrac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1-x)^2(1+x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}$

$=\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}\quad(x\neq\pm1)$.

【848】 $y=\dfrac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$.

解 $y'=\dfrac{[-2x(2-x^3)-3x^2(2-x^2)](1-x)^2+2(2-x^2)(2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4}$

$=\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}\quad(x\neq1)$.

【849】 $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

解 $y'=\dfrac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1-x)^p(1+x)^{q-1}}{(1+x)^{2q}}$

$=-\dfrac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}(x\neq-1)$.

【850】 $y=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

解 $y'=\dfrac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$

$=\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$

$(x\neq-1)$.

【851】 $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

解 $y'=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\quad(x>0)$.

【852】 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $y'=-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)\quad(x>0)$.

【853】 $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.