21世纪复旦大学研究生教学用书
复旦大学数学研究生教学用书

代数曲线

杨劲根 编著

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

21 世纪复旦大学研究生教学用书

代 数 曲 线

杨劲根 编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数曲线/杨劲根编著. —上海:复旦大学出版社, 2014.10
21 世纪复旦大学研究生教学用书　复旦大学数学研究生教学用书
ISBN 978-7-309-10991-7

Ⅰ. 代…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 代数曲线-研究生-教材　Ⅳ. O187.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219383 号

代数曲线
杨劲根　编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
常熟市华顺印刷有限公司

开本 787×960　1/16　印张 11.5　字数 202 千
2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10991-7/O · 553
定价: 29.00 元

内 容 提 要

本书由作者在复旦大学数学研究所开设的硕士研究生学位课程“代数曲线”的讲稿整理而成. 全书共分 7 章,内容包括:紧 Riemann 面、代数簇、一维代数函数域、Riemann-Roch 定理、平面代数曲线、椭圆曲线、曲线的典范映射等.

本书适合基础数学专业低年级研究生使用.

编辑出版说明

21 世纪,随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展,世界将发生深刻变化,国际间的竞争日趋激烈,高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战.

研究生教育是教育结构中高层次的教育,肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任,是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑.为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平,必须加强研究生的教材建设,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上,必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书.

“21 世纪复旦大学研究生教学用书”正是为适应这一新形势而编辑出版的.“21 世纪复旦大学研究生教学用书”分文科、理科和医科三大类,主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材,同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材.这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外,还可以供有关学者和人员参考.

收入“21 世纪复旦大学研究生教学用书”的教材,大都是作者在编写成讲义后,经过多年教学实践、反复修改后才定稿的.这些作者大都治学严谨,教学实践经验丰富,教学效果也比较显著.由于我们对编辑工作尚缺乏经验,不足之处,敬请读者指正,以便我们在将来再版时加以更正和提高.

复旦大学研究生院

术语和记号

记号 $f:S\to T$, $x\mapsto z$ 表示一个把元素 x 映成 z 的映射. 集合 S 的一个子集常常用 $\{x\in S|P\}$ 来定义,这里 P 是 x 在这个子集中所需要满足的条件. 例如 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 表示闭区间$[0, 1]$. 集合的并和交按通常的记号 $\bigcup$ 和 $\bigcap$, 集合 A 和 B 的差 $\{x\in A\mid x\notin B\}$ 记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$. 元素个数不多的集合常常用 $\{\cdots\}$ 表示,这里 $\cdots$ 为具体的元素列表,例如,由一个元素 a 构成的集合记为 $\{a\}$,由 0, 1 两个元素组成的集合记为 $\{0, 1\}$. 空集记为 $\varnothing$.

一个集合中的一个等价关系通常用$\sim$表示,由元素 a 代表的等价类用$[a]$或 $\tilde{a}$. 最常见的等价类出现在商结构(如商群、商环、商模)中,例如,含素数 p 个元素的有限域 $\mathbb{F}_p$ 中的元素可以用$[n]$或 $\bar{n}$ 表示,这里 n 是一个整数.

如果 K 是一个域,则 K^* 记由 K 中全体非零元素组成的乘法群.

如果 $f(z)$是一个可导函数,它的导函数记作 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 或 $f'(z)$.

对一些常用集合约定使用下面记号:

自然数集合 $\mathbb{N}$;

整数集合 $\mathbb{Z}$;

有理数集合 $\mathbb{Q}$;

实数集合 $\mathbb{R}$;

复数集合 $\mathbb{C}$;

含 q 个元素的有限域 $\mathbb{F}_q$.

前　言

代数曲线在数学和其他学科的各分支中经常出现.解析几何中的直线以及圆锥曲线(包括椭圆、双曲线和抛物线)是最简单的代数曲线.在微积分中出现的曲线通常是分段光滑的,它们主要由可导函数定义,如果把定义的函数限制为多项式函数,那么对应的曲线就是代数曲线.例如,三角函数、指数函数、对数函数的图像不是代数曲线.

研究高维空间中由多项式函数定义的几何对象的数学分支叫"代数几何".代数曲线又是代数几何的一个分支.按照学习的规律,学习代数几何应当先从代数曲线开始.但是它的内容和方法远没有想象那么简单,有两个重要因素必须考虑.

首先是"域"的问题,也就是定义曲线的多项式的系数所在的域.解析几何和微积分中的曲线基本上是实曲线,即由实系数多项式定义的曲线,它们在实 *Euclid* 空间里存在,几何图像比较直观.但是实代数曲线有一个严重缺陷,比方说设 C_λ 是平面上由方程 $x^2+y^2=\lambda$ 定义的依赖于实参数 λ 的曲线.当 λ 的值从大到小变化时,在 $\lambda=0$ 时有一个质变,曲线从圆变成了一个点;当 $\lambda<0$ 时,曲线是空集.这个现象产生的原因在于实数域不是代数封闭的,如果把域换成复数域,这个缺陷可以弥补,因为不管 λ 是什么复数,方程 $x^2+y^2=\lambda$ 有足够多的复数解.然而一个新的问题又产生了,一个 n 维的复空间是 2n 维的实空间,即使 $n=2$,实维数也是 4.肉眼看不见曲线的图像了,只能凭空想象,似乎比线性代数里的线性子空间还难把握.尽管如此,复的代数曲线的良好性质比实的代数曲线多得多.除了实数域、复数域外,在数论和离散数学中需要有限域上的代数曲线,它的几何图像就更加看不见了.有限域不是代数封闭的,因此有必要把域扩大到有限域的代数闭包.所以凡是遇到代数曲线时,先要明白是不是代数封闭域以及这个域的特征是 0 还是素数 p.

第二个要考虑的重要因素是曲线的完备性.这得从平面几何的平行线谈起:平面上任何两条不同的直线有一个交点,除非这两条直线平行.两条平行直线真的没有交点吗?射影几何给出肯定的答复:两条不同的相互平行的直线也有一个交点,该交点位于无穷远处.最简单的复代数曲线是复平面,从拓扑上看它是非紧的,加上一个无穷远点后便成了 *Riemann* 球面,那是个紧致的集合了.粗略

地说,射影空间是普通的欧氏空间加上所有的无穷远点而成的空间,虽然它没有欧氏空间那么简单,但在其中的几何对象的性质更好一些. 射影空间中的闭代数曲线称为射影曲线,复的射影曲线是紧致的.

在数学中同一个东西会以多种完全不同的面目甚至在不同的数学分支中出现,这也是数学的一大魅力. 代数曲线是一个光辉的典范. 本教材的第一个重点是证明下列 3 个概念是完全一样的:

(1) 紧 *Riemann* 面;

(2) 光滑的复射影曲线;

(3) 复数域上的一维代数函数域.

这对于用不同的数学方法(分析方法、几何方法、代数方法)解决同一个问题无疑是有益的. 由于光滑射影曲线和一维代数函数域并不限于复数域,因此本书中的更多内容将侧重于此.

第二个重点是曲线的 *Riemann-Roch* 定理,它可列为代数曲线中最强大的定理. 定理的证明基于任意代数封闭域上的一维代数函数域,用 *A. Weil* 首创的 *adéle* 方法,这是一个纯代数的证明. 如上所述,它可以翻译成紧 *Riemann* 面或射影曲线中的 *Riemann-Roch* 定理.

阅读本书的预备知识是:近世代数、基础拓扑、复变函数论、泛函分析、交换代数以及微分几何的初步知识.

本书根据作者多年在复旦大学开设的研究生学位课程"代数曲线"的讲稿整理而成,缺点和错误难免,欢迎读者批评指正. 对吴泉水教授指出的一个实质性错误深表感谢. 本教材的出版获得复旦大学研究生院和复旦大学出版社的大力支持. 范仁梅同志为本书的编辑和校对付出了辛勤的劳动,特此致谢.

作 者

2014 年 2 月

目　录

第 1 章　紧 Riemann 面 ······ 1
1.1　紧 Riemann 面的定义和初步性质 ······ 1
1.2　紧 Riemann 面上的亚纯函数 ······ 3
1.2.1　预备知识 ······ 3
1.2.2　紧 Riemann 面上的微分形式 ······ 16
1.2.3　定理 1.2.1 的证明 ······ 19

第 2 章　代数簇 ······ 23
2.1　几个代数定理 ······ 23
2.2　仿射空间中的代数集 ······ 29
2.3　射影空间中的代数集 ······ 36
2.4　准代数簇 ······ 40
2.5　准代数簇的局部环和函数域 ······ 44
2.6　代数簇的积 ······ 48
2.7　准代数簇的维数理论 ······ 56
2.8　射影簇的 Hilbert 多项式 ······ 59
2.9　有理映射 ······ 63
2.10　代数簇的光滑性 ······ 65

第 3 章　一维代数函数域 ······ 70
3.1　有限可分扩张的范和迹 ······ 70
3.2　域的超越扩张 ······ 73
3.3　离散赋值环和 Dedekind 整区 ······ 78
3.4　射影曲线与一维代数函数域 ······ 94
3.5　曲线的正规化 ······ 99
3.6　紧 Riemann 面的亚纯函数域 ······ 104

第 4 章 Riemann-Roch 定理 ······ 107
4.1 除子 ······ 107
4.2 adéle ······ 109
4.3 典范除子 ······ 112
4.4 形式 Laurent 级数 ······ 115
4.5 微分形式和留数 ······ 117
4.6 紧 Riemann 面的亏格 ······ 131
4.7 Hurwitz 公式 ······ 134
4.8 有理曲线 ······ 135

第 5 章 平面代数曲线 ······ 137
5.1 Bézout 定理 ······ 137
5.2 平面代数曲线的奇点 ······ 140
5.3 平面代数曲线的亏格 ······ 147

第 6 章 椭圆曲线 ······ 149
6.1 曲线的二重覆盖 ······ 149
6.2 椭圆曲线的 j-不变量 ······ 150
6.3 椭圆曲线上的群结构 ······ 153
6.4 椭圆函数理论 ······ 155
6.5 模形式与椭圆曲线 ······ 158

第 7 章 曲线的典范映射 ······ 161
7.1 曲线的射影映射 ······ 161
7.2 射影曲线的次数 ······ 164
7.3 典范线性系 ······ 164

参考文献 ······ 166

索引 ······ 168

第 1 章 紧 Riemann 面

1.1 紧 Riemann 面的定义和初步性质

定义 1. 一个连通的第二可数[①]的 Hausdorff 空间 X 称为 n 维**拓扑流形**，如果存在 X 的一个开覆盖 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$，并且对每个 i 都有一个从 U_i 到 $\mathbb{R}^n$ 的某个连通开集 V_i 的同胚 $f_i:U_i\to V_i$. 如果更进一步对于任意两个 U_i，U_j 映射 $f_jf_i^{-1}$：$f_i(U_i\cap U_j)\to f_j(U_i\cap U_j)$ 是 C^∞ 的，则 X 称为 n 维**微分流形**.

定义 2. 一个连通的第二可数的 Hausdorff 空间 X 称为 n 维**复流形**，如果存在 X 的一个开覆盖 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$，并且对每个 i 都有一个从 U_i 到 $\mathbb{C}^n$ 的某个连通开集 V_i 的同胚 $f_i:U_i\to V_i$ 满足下列条件：对于任意两个 U_i，U_j 映射 $f_jf_i^{-1}$：$f_i(U_i\cap U_j)\to f_j(U_i\cap U_j)$ 是全纯映射. 一维的复流形称为 Riemann 面. X 的开子集 U 上的 $\mathbb{C}$ 值函数 g 称为**全纯(亚纯)函数**，如果对每个 i，gf_i^{-1} 都是 $f_i(U\cap U_i)$ 上的全纯(亚纯)函数.

出现在 Riemann 面定义中的 f_i 通常记作 z_i，它是 U_i 上的一个全纯函数，称为**坐标函数**.

定义 3. 设 $\phi:X\to Y$ 是 Riemann 面间的一个连续映射，如果下面条件满足，则称 ϕ 为一个**全纯映射**：对任意点 $x\in X$，z_i，w_j 分别为 X 和 Y 在 x 和 $\phi(x)$ 的(任意)坐标函数 z_i 和 w_j，函数 $w_j\phi z_i^{-1}$ 在 $z_i(x)$ 附近是全纯的.

在本书中，一个取常数值的函数称为平凡函数，否则叫作非平凡的. 设 f：$X\to Y$ 是一个映射，如果 $f(X)$ 只含一个点，则称映射 f 是平凡的，否则称作非平凡的.

定理 1.1.1. 设 $\phi:X\to Y$ 是 Riemann 面间的一个全纯映射，X 是紧的，若 ϕ 是非平凡映射，则 Y 也是紧的且 ϕ 是满的.

证 先来证明 $\phi(X)$ 是 Y 的紧子集. 设 y_1，y_2，$\cdots$ 是 $\phi(X)$ 中的任意一个点列，则存在 X 中的一个点列 x_1，x_2，$\cdots$，使 $y_i=\phi(x_i)$ 对所有 i 成立. 由于 X 是紧的，存在 x_1，x_2，$\cdots$ 的一个收敛子列 x_{j_1}，x_{j_2}，$\cdots$. 设

① 具有可数开基的拓扑空间叫做第二可数的拓扑空间.

$$x = \lim_{i \to \infty} x_{j_i}.$$

因 ϕ 是连续映射,故

$$\phi(x) = \lim_{i \to \infty} \phi(x_{j_i}) = \lim_{i \to \infty} y_{j_i}.$$

因此 $\phi(X)$是 Y 的紧子集,从而是闭子集. 根据单复变函数论中的开映射原理,非平凡的全纯映射是开映射. 如果 ϕ 的像不是一个点,则 $\phi(X)$是 Y 的开子集,由 Y 的连通性得知 $\phi(X) = Y$. □

系 1.1.2. *紧 Riemann 面上的全纯函数是平凡函数.*

证法一 紧 Riemann 面 X 上的全纯函数 f 是从 X 到 $\mathbb{C}$ 的全纯映射. 由于 $\mathbb{C}$ 非紧,根据定理 1.1.1, f 只能是平凡映射.

证法二 由于 X 是紧的, $|f|$ 在 X 的某一点 a 达到最大值. 任取 a 的一个坐标开邻域 U. 根据复分析中的极大模原理, f 在 U 中是平凡函数. 所以 f 在整个 X 上是平凡函数. □

设 $\phi: X \to Y$ 是紧 Riemann 面间的一个非平凡全纯映射,则 ϕ 局部由函数 $z^n u(z)$ 给出,其中 $u(0) \neq 0$. 当 $n > 1$ 时, X 上坐标为 0 的点称为 ϕ 的**分歧点**, n 称为该分歧点的**分歧指数**. 记 R 为分歧点全体的集合,则 R 是离散点集,因而是有限的. 令 $U = \phi^{-1}(Y - \phi(R))$,则 $\phi: U \to \phi(U)$ 是一个非分歧覆盖映射. 对于任意点 $y \in \phi(U)$, $\phi^{-1}(y)$ 是离散的闭子集,因而是有限集,其元素个数 N 不依赖于 y 的选取, N 称为 ϕ 的**次数**,一般记作 $\deg \phi$. 对于任何点 $q \in Y$,设 $\phi^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_r\}$. 设 n_i 为 ϕ 在点 p_i 的分歧指数,则有如下公式

$$\deg \phi = \sum_{i=1}^{r} n_i. \tag{1.1}$$

记 $\phi^*(q) = \sum_{i=1}^{r} n_i p_i$, 这里的求和符号是形式的.

紧 Riemann 面连同非平凡的全纯映射构成一个范畴.

命题 1.1.3. *复流形是可定向的.*

证 只要证明坐标变换的 Jacobi 行列式处处为正就可以了.

为简单起见我们只就 Riemann 面来证明. 设 w 和 z 是同一个点附近的坐标,则 w 是 z 的解析函数. 设

$$w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$. 根据 Cauchy-Riemann 方程,等式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

成立. 因此该坐标变换的 Jacobi 行列式是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2>0. \quad \square$$

作为拓扑流形，紧 Riemann 面是 X 一个可定向的二维紧流形，它同胚于带若干个孔的环面，孔的个数 g 称为这个紧 Riemann 面的(拓扑)亏格. 同调群 $H_1(X, \mathbb{Z})$是秩为 $2g$ 的自由 Abel 群. 可参见[16, 19].

例如，亏格等于零的紧 Riemann 面是通常的球面，在复分析中称 Riemann 球面. 亏格等于 1 的紧 Riemann 面是环面.

1.2　紧 Riemann 面上的亚纯函数

本节目标是证明下面定理.

定理 1.2.1.　*任何一个紧 Riemann 面上存在一个非平凡的亚纯函数.*

这个定理没有想象中那么简单，它不能推广到高维复流形，事实上，存在紧的二维复流形不具有非平凡的亚纯函数.

1.2.1　预备知识

复平面 $\mathbb{C}$ 的一个开子集称为一个**开区域**，它不一定有界，也不一定连通①.

设 U 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个开区域. U 中的任意一个点 $z=x+\sqrt{-1}y$ 都有实坐标(x, y). 因此 U 也可以看成实平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域. 这样 U 上的一个复值函数 $f(z)$ 也可以看作两个实变量的复值函数 $f(x, y)$，它由两个实值函数 $\mathrm{Re}(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 决定，$f=\mathrm{Re}(f)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}(f)$.

开区域 U 上的一个复值函数 f 是 C^∞-复值函数，若 $\mathrm{Re}(f)$和 $\mathrm{Im}(f)$对实变元 x, y 的任意高阶混合偏导数存在. 很明显，全纯函数是 C^∞ 函数，但 C^∞ 函数不一定是全纯函数. U 上的所有 C^∞-复值函数全体形成一个 $\mathbb{C}$-代数，记作 $C^\infty(U)$. 一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $D: C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ 称为 U 上的一个**向量场**，若

$$D(fg)=fD(g)+gD(f) \tag{1.2}$$

对任何 f, $g\in C^\infty(U)$成立.

复平面上最典型的向量场是$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$，即通常的偏导数算子.

记 $T(U)$为 U 上的向量场全体. 对任意 D_1, $D_2\in T(U)$. 令 D_1+D_2 为作为线性映射的 D_1 和 D_2 的和，即

① 很多书上关于开区域的定义中要求连通性，这里更一般些.

$$(D_1+D_2)(f)=D_1(f)+D_2(f)$$

对任意 $f\in C^\infty(U)$成立,则 $D_1+D_2\in T(U)$ 并且 $T(U)$ 在这样定义的加法下形成 Abel群. 对于任意 $f\in C^\infty(U)$ 和任意 $D\in T(U)$,将 $fD:C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ 按照$(fD)(g)=f\cdot D(g)$ 来定义, 则在如此定义的运算下 $T(U)$ 成为一个 $C^\infty(U)$-模.

设 $D\in T(U)$. 根据(1.2)式对任意 $c\in\mathbb{C}^*$,都有

$$2cD(c)=D(c^2)=cD(c).$$

因此 $D(c)=0$ 对任意 $c\in\mathbb{C}$ 成立.

引理 1.2.2. *设 V 是开区域 U 的一个非空开子集, $f\in C^\infty(U)$满足 $f(z)=0$ 对所有 $z\in V$ 成立. 则对任意 $D\in T(U)$ 及任意 $z\in V$ 都有$(Df)(z)=0$.*

证 设 z_0 是 V 中任意一个点,取足够小的 $\varepsilon>0$,使 $B(z_0,\varepsilon)\subset V$. 这里 $B(z_0,\varepsilon)$ 是以 z_0 为圆心以 ε 为半径的闭圆盘. 任取函数 $g\in C^\infty(U)$ 满足 $g(z_0)=0$ 且 $g(z)=1$ 对所有 $z\in U-B(z_0,\varepsilon)$ 成立,则 $gf=f$. 利用(1.2)式推得

$$Df=gDf+fDg.$$

在等式两边同取在 z_0 处的值得 $(Df)(z_0)=0$. 由于 z_0 是 V 中任意点,因此 $(Df)(z)=0$ 对任意 $z\in V$ 成立. □

立刻有如下推论.

系 1.2.3. *设 V 是开区域 U 的一个非空开子集, $f,\ g\in C^\infty(U)$ 满足 $f(z)=g(z)$ 对所有 $z\in V$ 成立,则对任意 $D\in T(U)$ 及任意 $z\in V$,都有 $(Df)(z)=(Dg)(z)$.*

对于开区域 U 的任意一个非空开子集 V,都可以用如下方式定义映射 ρ_{UV}: $T(U)\to T(V)$:设 $D\in T(U)$ 并且 $f\in C^\infty(V)$. 对任意点 $p\in V$,取充分小的 $\varepsilon>0$,使圆盘 $B(p,\varepsilon)$ 包含在 V 中. 任取 $g\in C^\infty(U)$ 满足 $g(z)=1$ 对所有 $z\in B(p,\varepsilon/2)$ 且 $g(z)=0$ 对所有 $z\notin B(p,\varepsilon)$ 成立. 这样的函数的存在性是众所周知的. 令

$$F(z)=\begin{cases}f(z)g(z), z\in V,\\ 0, z\in U-V,\end{cases}$$

则 $F\in C^\infty(U)$. 根据系 1.2.3 $(DF)(p)$的值不依赖于 g 的选取,将这个值记为 $h(p)$,则 $p\mapsto h(p)$给出 V 上的函数. 容易看出 $h\in C^\infty(V)$. 容易验证映射 $f\mapsto h$ 是 V 上的向量场,它完全由 D 决定,将它定义为 $\rho_{UV}(D)$.

假如 W 又是 V 的开子集,很明显 $\rho_{UW}=\rho_{VW}\circ\rho_{UV}$ 成立.

复平面的一个子集 U 称为凸的,若对任意 $x,\ y\in U$ 连接两点 $x,\ y$ 的直线段上的所有点都属于 U.

命题 1.2.4. 复平面 $\mathbb{C}$ 的一个开区域 U 上的全体向量场全体 $T(U)$ 是一个秩为 2 的自由 $C^{\infty}(U)$-模,

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}$$

是它的一组基.

证　显然

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\in T(U).$$

令 M 为它们在 $T(U)$ 中生成的子模. 设 $f(x,\ y),\ g(x,\ y)\in C^{\infty}(U)$,使

$$f(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x}+g(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y}=0.$$

将左式分别作用在函数 x 和 y 上得 $f(x,\ y)=g(x,\ y)=0$. 因此 M 是以

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}$$

为基的自由模.

剩下只需证明 $T(U)=M$.

先假定 U 是凸的. 设 $D\in T(U)$.

令 $f(x,\ y)=Dx,\ g(x,\ y)=Dy$,设 $h(x,\ y)\in C^{\infty}(U)$. 记

$$h_1(x,\ y)=\frac{\partial h(x,\ y)}{\partial x},\ h_2(x,\ y)=\frac{\partial h(x,\ y)}{\partial y}.$$

再设 $(x_0,\ y_0)$ 是 U 中任意点. 由于 U 是凸的,对于任何 $(x,\ y)\in U$ 和任意 $t\in[0,\ 1]$ 函数 $h(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))$ 是有意义的,故有

$$\begin{aligned}
h(x,\ y)&=h(x_0,\ y_0)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\mathrm{d}t\\
&=h(x_0,\ y_0)+(x-x_0)\int_0^1 h_1(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\mathrm{d}t\\
&\quad+(y-y_0)\int_0^1 h_2(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\mathrm{d}t\\
&=h(x_0,\ y_0)+(x-x_0)a(x,\ y)+(y-y_0)b(x,\ y),
\end{aligned}$$

其中

$$a(x, y) = \int_0^1 h_1(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\mathrm{d}t,$$

$$b(x, y) = \int_0^1 h_2(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\mathrm{d}t.$$

于是

$$D(h) = (x - x_0)D(a) + a(x, y)f(x, y) + (y - y_0)D(b) \\ + b(x, y)g(x, y)$$

对所有$(x, y)\in U$成立. 取左右两式在点(x_0, y_0)的函数值,得

$$\begin{aligned} D(h)(x_0, y_0) &= a(x_0, y_0)f(x_0, y_0) + b(x_0, y_0)g(x_0, y_0) \\ &= h_1(x_0, y_0)f(x_0, y_0) + h_2(x_0, y_0)g(x_0, y_0), \end{aligned}$$

恰好等于

$$\left(f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right)h(x, y)$$

在(x_0, y_0)的值. 由于(x_0, y_0)是U中任意点,

$$D(h) = \left(f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right)h$$

对任意$h(x, y)\in C^\infty(U)$成立,h是任意取的,因此有

$$D = f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

所以$T(U) = M$.

设U是一个一般的开区域(甚至可以是不连通的). 取它的一个开覆盖$U = \bigcup_{i\in\Lambda}U_i$,其中$U_i$是开圆盘,则所有$U_i$和$U_i\cap U_j$都是凸的. 设$D\in T(U)$. 根据已证结果,对每个$i\in\Lambda$,有

$$\rho_{UU_i}(D) = a_i(z)\frac{\partial}{\partial x} + b_i(z)\frac{\partial}{\partial y},$$

其中$a_i(x, y)$, $b_i(x, y)\in C^\infty(U_i)$. 由

$$\rho_{U_i, U_i\cap U_j}\circ\rho_{UU_i}(D) = \rho_{U, U_i\cap U_j}(D) = \rho_{U_j, U_i\cap U_j}\circ\rho_{UU_j}(D)$$

推得$a_i(z) = a_j(z)$和$b_i(z) = b_j(z)$对所有$z\in U_i\cap U_j$都成立,这是因为$T(U_i\cap U_j)$是以$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$为基的自由$C^\infty(U_i\cap U_j)$-模. 因此存在$a(z)$,

$b(z) \in C^{\infty}(U)$，使 $\phi_{UU_i}(a) = a_i$，$\phi_{UU_i}(b) = b_i$ 对所有 $i \in \Lambda$ 成立. 由此推得 $D = a(z)\dfrac{\partial}{\partial x} + b(z)\dfrac{\partial}{\partial y}$. 所以 $T(U) = M$. □

$T(U)$的另一组非常有用的基是

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big),\ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

例 1.　设 $f = x^2 + \sqrt{-1}xy$，则

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}f(z) = \frac{1}{2}(2x + \sqrt{-1}y + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{-1}y).$$

命题 1.2.5.　开区域 U 上的复值函数 $f(z)$ 是解析函数当且仅当 $\partial f/\partial \bar z = 0$.

证　设 $f(z) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar z}f(z) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \sqrt{-1}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big).\end{aligned}$$

因此 $\partial f/\partial \bar z = 0$ 当且仅当

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

这正是解析函数的 Cauchy - Riemann 条件. □

对于开区域 U，$T(U)$的对偶模 $A^1(U)$也是秩为 2 的自由 $C^{\infty}(U)$-模，其中的元素叫做微分 1-形式. $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ 的对偶基记作 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 而$\partial/\partial z$，$\partial/\partial \bar z$的对偶基记作 $\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}\bar z$. 不难验证

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\bar z = \mathrm{d}x - \sqrt{-1}\,\mathrm{d}y.$$

$A^1(U)$中由 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}\bar z$ 张成的子模分别记作 $A^{(1,0)}(U)$和 $A^{(0,1)}(U)$，它们中的元素分别称为(1, 0)-形式和(0, 1)-形式.

外积$\wedge^2 A^1(U)$是秩为 1 的自由 $C^{\infty}(U)$-模，其中的元素叫做微分 2-形式，$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z$都是它的基. 把$\wedge^2 A^1(U)$记作 $A^2(U)$.

若 C 是 U 中的有向逐段光滑曲线，$\eta \in A^1(U)$，则积分 $\int_C \eta$ 是有意义的. 事实上，若