

好玩的

数学

修订版

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

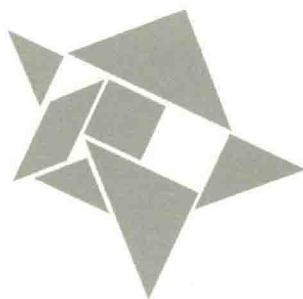
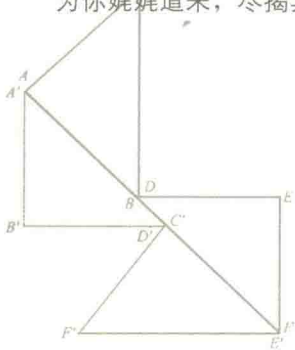
张景中 主编

七巧板、九连环和 华容道

吴鹤龄 著

——中国古典智力 游戏三绝

你知道吗，在千姿百态的七巧板、千变万化的九连环、不可思议的华容道这三大蜚声世界的中国古典智力游戏背后，有许多有趣的数学问题，本书为你娓娓道来，尽揭其中奥妙。



科学出版社

子
元
的

数学

(修
订
版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”
科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

七巧板、九连环和华容道

——中国古典智力游戏三绝



吴鹤龄 著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍蜚声世界的我国三大古典智力游戏，即七巧板、九连环和华容道。对这三个游戏的起源、发展和演变有详尽的叙述和考证，重点讨论其中的数学问题，如七巧板能构成多少凸多边形，九连环状态与格雷码的对应，解华容道的网络图等。本书题材广泛，材料丰富、翔实，文笔流畅，内容生动、有趣、有益，读来引人入胜。

本书适于有高中及高中以上文化程度的各阶层、各年龄段人群阅读。

图书在版编目 (CIP) 数据

七巧板、九连环和华容道：中国古典智力游戏三绝/吴鹤龄著. —修订本. —北京：科学出版社，2015.3

（好玩的数学/张景中主编）

ISBN 978-7-03-043574-3

I. ①七… II. ①吴… III. ①数学—普及读物 ②智力游戏—普及读物 IV. ①O1-49 G898.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 044251 号

责任编辑：李 敏 霍羽升 / 责任校对：胡小洁

责任印制：张 倩 / 整体设计：黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 4 月第 三 版 开本：720×1000 1/11

2015 年 4 月第一次印刷 印张：14

字数：222 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自 2004 年 10 月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印 10 余次，平均发行量近 45000 套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于 2004 年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006 年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009 年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为 B5 开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编者
2015 年 3 月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是

人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无学生版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中

外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4) / 5$$

$$b = 4(x+4) / 25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1 / (113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

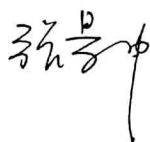
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

A handwritten signature in black ink, appearing to read '张华' (Zhang Hua) with a stylized flourish extending downwards.

2004 年 9 月 9 日

第二版说明

本书第一版已多次重印，每次重印都有若干修订。这次再版更有几个重大的修订：

(1) 第3章第3.3节关于七巧板能构成多少五边形，第一版根据马丁·伽德纳在《科学美国人》杂志上的专栏，介绍了里德解决这个问题的方法和结果，结论是有16个正规五边形，2个常规五边形。后来发现，里德的证明方法有误，结论也不正确，可能的七巧五边形不止18个，而是53个。据报道，欧美和日本都有人拼出了53个七巧五边形，但是都没有给出相关图形资料。为了弥补这一缺憾，笔者和广东深圳的中学生莫海亮合作，经过努力，终于也拼出了53个七巧五边形，现在把它们奉献给读者，相信会给七巧板爱好者一个惊喜。此外，莫海亮在七巧图空洞等方面也有一些独创性的研究成果，一并介绍给读者。

(2) 第3章第3.5节关于七巧图扩展成凸多边形最大面积是多少，第一版未作结论，书中给出一个余数为40的七巧图，希望有读者打破这个记录。2007年4月，笔者收到暨南大学王紫微老师的来信，才知道王老师在念大学时就彻底研究过这个问题，通过计算机编程证明余数最大为41，并且获得了3个这样的七巧图。现在我们高兴地把王老师的研究成果介绍给读者。

(3) 第3章关于用立体七巧板拼成正立方体的问题，第一版介绍了康韦和盖伊的研究成果。他们的方法是科学的，结果也是正确的。但由于他们用以标志拼法的 Somatype 比较抽象和难以理解，因此第一版未能明辨康韦关于用立体七

巧板拼成正立方体共有 240 种拼法只是指基本拼法，此外还有根据基本拼法的镜像而可获得的 240 种派生拼法。在基本拼法和派生拼法中，互为镜像的红色组块和蓝色组块交换了位置，因此是不同的拼法。2006 年底，笔者收到了安徽潜山县罗汉小学的李汪应老师的来信和他绘制的 480 种拼法图解，才对这个问题有了一个明确的、清晰的看法，从而也纠正了以往国内外文献中对有关问题的含混表述。在第二版中，我们高兴地把李老师的拼法图解介绍给读者，相信这会有助于人们对立体七巧板的理解和进一步研究。

本书问世只有短短 3 年，但已 4 次重印，至今保持着每月约 1000 册的销售记录，这说明在电脑和网络游戏风靡世界的情况下，七巧板、九连环和华容道这些中国古典智力游戏由于其丰富的内涵，仍然拥有广阔的生存空间，仍然受到广大人群的喜爱，这使笔者深感欣慰。借此机会，笔者向关心、爱护和支持本书的读者表示深深的谢意。

吴鹤龄

2008 年 1 月

第一版前言

本书是《好玩的数学——娱乐数学经典名题》（已改书名为《幻方及其他——娱乐数学经典名题》（第二版））的续篇。《好玩的数学——娱乐数学经典名题》于2003年11月由科学出版社推出以后，受到广泛的欢迎和好评。中国幻方研究者协会副主席、兰州交通大学黄均迪先生来信“为其丰富的内容叫好”，并将其推荐给幻方研究者协会会员。北京应用物理与计算数学研究所研究员王明锐读后认为该书具有一定的广度和深度，并有自己的见解，是一本值得一读的好书。广东省梅州市的中学生莫海亮来信说：“买到《好玩的数学——娱乐数学经典名题》令我欣喜不已。我对智力游戏很感兴趣，可惜有关书籍很少看到，更别提如此高质量的了。”同时，他们 also 对该书的不足和缺点提出了许多批评和意见。读者的肯定和爱护使笔者深受感动和鼓舞。在科学出版社的热情支持下，笔者完成了《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》，现作为“好玩的数学”丛书之一把它奉献给读者。

被称为中国古典智力游戏三绝的七巧板、九连环和华容道不但在我国有极高的知名度，在国际上也享有盛誉，被认为是中国对人类文明的重要贡献。有关七巧板、九连环和华容道的专著不少，但就笔者所见，这些专著大多是从“玩具”这一角度出发去介绍它们的，而对其中所蕴含的数学问题缺乏深入的讨论。例如，用七巧板可以拼出多少个凸多边形？有关七巧板的这一重要数学问题，曾经引起中外数学家广泛关注，最后由两位中国学者在20世纪40年代给出了答案，并利用巧妙方法给予了严格证明。一般的七巧板书籍中

都会提到这一事实，给出用七巧板拼成的凸多边形，但是笔者没有见过哪本书详细介绍过那两位中国学者是如何解决这个难题的。又如荷兰学者约斯特·埃尔费尔斯在七巧板研究上成绩突出，他主编的《七巧板——中国古老的拼板游戏》一书中给出了1600多个精美的七巧板图案，是大多数七巧板书籍引用的对象。但是埃尔费尔斯独创的这些奇特的七巧板图案蕴含着什么数学意义？却是被大多数七巧板书籍忽略的一个问题。又如九连环的解开步数和环数之间存在公式，但未见有哪本书对公式予以证明。此外如立体七巧板，除了谈祥柏先生在《数学百草园》中曾作简单介绍外，似乎还没有人涉及过。由于本书的重点是探讨七巧板、九连环和华容道中的数学问题，因此对类似以上的这些问题都有详尽介绍，恰恰在一定程度上填补了这方面的空白，宣传了在这些智力玩具中的数学知识，相信是会受到读者欢迎的。

本书中，笔者本着实事求是的精神，对存在于七巧板、九连环和华容道资料中的一些不太准确和科学的说法发表了自己的看法。例如，对华容道的来历，众口一词认为它古已有之，历史悠久。笔者认真分析了已有文字资料，大胆提出了华容道是20世纪以后的“舶来品”经本地化的观点，希望得到专家的指正。关于七巧板，流传着一个说法：荷兰作家古利克在小说《中国的钉杀案》中塑造了一个哑巴男孩，每当手势不够用时，他就用七巧图表达自己的意思。在小说的结尾，男孩用七巧板拼成的图案成为侦破钉杀案的关键所在。笔者查阅了原著的英文版以后，澄清了事实，纠正了上述说法中的不实之处。

笔者不是学数学的，对智力玩具也知之甚少，涉足数学与玩具，只是出于个人兴趣与爱好，为的是退休后做一点有益的工作，为科普、为提高全民族的文化素质尽一份力量。热诚欢迎专家和读者对本书内容提出批评。

本书写作过程中，张卓立、崔林、赵小林和孙宏波同志分别在搜集资料、整理插图上提供了许多帮助。在此，向他们表示衷心的感谢。

吴鹤龄

2004年7月