复旦大学数学研究生教学用书

算子理论基础

郭坤宇 编著

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

复旦大学数学研究生教学用书

算子理论基础

郭坤宇　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

算子理论基础/郭坤宇编著.—上海:复旦大学出版社，2014.10
复旦大学数学研究生教学用书
ISBN 978-7-309-10990-0

Ⅰ.算…　Ⅱ.郭…　Ⅲ.算子-研究生-教材　Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219391 号

算子理论基础
郭坤宇　编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 787×960　1/16　印张 13.5　字数 237 千
2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10990-0/O·552
定价: 35.00 元

内容提要

本书前 3 章概述线性泛函分析的基本内容. 第四、第五章建立在前 3 章的基础上，重点讲述算子理论、算子代数的一些基本概念、理论和方法. 在第六章，我们综合运用前 5 章的知识研究 3 类具体的算子 —— Toeplitz 算子、 Hankel 算子和复合算子，这 3 类算子具有广泛的应用价值. 书中列举了大量的应用实例，并配备了一定数量的习题.

本书内容精炼，叙述简明扼要，可作为数学院系高年级学生和研究生的教学用书或教学参考书，特别可用于算子理论与算子代数方向研究生的入门用书.

前 言

算子理论的诞生和发展，一方面源于数学内部矛盾解决的需求，另一方面，很大程度上受到来自于物理和工程领域中实际问题的驱动. 上世纪初，量子物理的蓬勃发展揭示了许多令人惊异的微观现象，对这些现象的研究需要新的数学工具. 为建立量子物理的数学基础需要研究非交换的变量来描述微观系统中的可观测量，作用在有限维空间上的矩阵算子自然成为了人们的首要选择. 但矩阵并不能准确地刻画量子力学中所揭示的非交换性，其中最具代表性的当属Heisenberg 测不准原理，所以必须要研究作用在无限维空间上的线性算子. 同时，积分微分方程的求解、Dirichlet 问题和调和分析中不断涌现的各种算子的研究，加速了算子论这门学科的成熟.

让我们从有限维空间谈起，在有限维空间上，线性变换的表现形式就是矩阵. 矩阵的特征值、特征向量、Jordan 标准型等是矩阵研究的基本内容. n 阶矩阵的行列式是矩阵的一个重要不变量，用它就可以完全决定一个矩阵是否可逆. 一般说来，有限维空间上的线性变换理论就是矩阵理论. 线性算子理论主要研究无限维空间上的线性变换. 在本书中，我们主要强调无限维 Hilbert 空间上的算子理论和算子代数. 当选定 Hilbert 空间一个基后，每个有界线性算子可用一个无穷阶矩阵来实现，一个典型的例子是 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子，它的表示矩阵有非常特殊的形式 (见第六章). 但一般来说，通过无穷阶矩阵很难看清算子的性质，因此在研究无限维 Hilbert 空间上的算子时，很少通过矩阵的方法. 从算子论的发源到算子论的逐渐成熟，Volterra，Fredholm 和 Hilbert 等数学家做出了重要贡献. 100 年前，积分- 微分方程的求解，特别是 Dirichlet 问题的研究是数学的热点，这些问题自然转化成算子的研究，如 Volterra 算子和 Fredholm 算子. Fredholm 为研究这些算子而发展的 Fredholm 理论，后经 Hilbert 的公理化方法逐渐建立起了现代的 Hilbert 空间上的算子理论. 大家知道，有限阶的自伴矩阵可对角化，von Neumann 首先将它推广到紧的自伴算子，后来到一般的正规算子，形成了正规算子的谱定理. 谱定理表明每个正规算子可通过 L^2 空间上的乘法实现，这是谱理论核心内容之一. von Neumann 对自伴算子的研究影响深远，他当初的动机之一是为 Schrödinger 和 Heisenberg 等人发现的量子力学提供数学基础，他的思想方法已普遍地渗透到现代物理的各个方面. 在 20 世纪 40 年

代，Gelfand 以更加抽象的形式将谱理论推广到算子代数. 从那时起，算子理论逐渐成为纯粹数学和应用数学的一个重要分支. 现代算子理论已演变成一个庞大的数学体系，呈现出与其他数学分支、其他学科深入交融、联动发展的趋势. 因此学习和掌握一些基本的算子理论显得十分必要.

近年来，在复旦大学算子理论和算子代数方向的硕士、博士生入学考试面试中，我们发现不少学生没能很好地掌握算子理论的基本概念和方法，更谈不上灵活运用这些方法解决问题. 这本书简要介绍了算子理论的一些重要概念和方法，并列举了大量应用实例，以帮助读者掌握这些必须的内容. 前 3 章是泛函分析的基本内容，许多命题、定理的证明希望读者自己完成，学数学的最好方法是自己动手. 前 3 章是学习算子理论的必备基础. 第四章、第五章讲述算子理论、算子代数的一些基本概念、理论和方法. 很多理论和方法在 Hilbert 空间的框架下展开，如紧算子和 Fredholm 理论. 使用 Banach 空间的对偶理论，读者可以平行地将这些理论和方法推广到 Banach 空间，这是掌握数学的一种方法. 在第六章，我们综合运用前 5 章的知识讨论 3 类具体的算子 —— Toeplitz 算子、Hankel 算子和复合算子，这 3 类算子具有广泛应用价值.

本书在酝酿过程中得到孙顺华教授和陈晓漫教授的鼓励和支持；郑德超教授、方向教授、童裕孙教授以及黄昭波副教授、徐胜芝副教授、姚一隽副教授等和作者就有关内容进行过有益交流；徐宪民教授、严从荃教授、胡俊云教授、侯绳照教授、王勤教授等在用本书的初稿进行教学时提出了不少修改意见；也在长期的教学科研过程中得到了国内外同行的关心和支持；复旦大学出版社范仁梅女士为本书的顺利出版提供了热情的帮助；对各位的关心和帮助在此致以诚挚的感谢. 感谢我的学生王凯、段永江、王鹏辉、赵连阔、黄寒松、何薇、陈泳、陈立、程国正、朱森、赵翀、余佳洋、王子鹏、王绪迪、王奕等先后帮我修改、打印、校对了部分手稿.

在编著本书过程中，作者参考了大量文献，其中包括一些数学网站上的材料，在此不一一列举 (见文献部分). 限于作者的水平，错误之处在所难免，欢迎读者批评指正.

郭坤宇

2014年8月于复旦大学

目　录

第一章　Banach 空间、Hilbert 空间和度量空间

在这章, 将简要介绍 Banach 空间、Hilbert 空间和度量空间的基本概念和方法，这是泛函分析研究的基本对象.

§1.1　Banach 空间

设 X 是复的线性空间，如果泛函 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+(\geq 0)$ 满足

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;　　(三角不等式)

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \alpha \in \mathbb{C}, x \in X$.　(齐次性)

称 X 是赋范空间，$\|x\|$ 叫 x 的范数. (类似地可定义实的赋范空间)

赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 列 (基本列)，如果对任何 $\epsilon > 0$，存在自然数 N，使得 $m, n \geq N$ 时，成立

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon.$$

赋范空间 X 称为完备的，如果每个 Cauchy 序列收敛. 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

例子1.1.1　$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. 对 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，定义范数 $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. 它们是 Banach 空间.

设 X 是一个赋范空间，Y 是 X 的一个闭子空间. 在 X 上定义等价关系 $\sim$: $x_1 \sim x_2$ 当且仅当$x_1 - x_2 \in Y$. 商空间 X/Y 是等价类的全体，它是一个线性空间. 事实上，它是赋范空间，其范数

$$\|\dot{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y).$$

定理1.1.2　如果 X 是 Banach 空间，并且 Y 是 X 的闭子空间，那么 X/Y 是 Banach 空间.

证：　设 $\{\dot{x}_n\}$ 是 X/Y 中的 Cauchy 序列. 可选取子序列 $\{\dot{x}_{n_k}\}$，使得

$$\|\dot{x}_{n_k} - \dot{x}_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

先取 $y_1 = 0$，选 $y_2 \in Y$，使得

$$\|x_{n_1} - (x_{n_2} + y_2)\| < 2^{-1},$$

并选 $y_3 \in Y$，使得

$$\|(x_{n_2} + y_2) - (x_{n_3} + y_3)\| < 2^{-2},$$

$$\cdots\cdots$$

那么 $\{x_{n_k} + y_k\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 记 $x = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_k)$. 易见 $\{\dot{x}_n\}$ 收敛到 $\dot{x}$. □

若 X 是一个赋范空间，同时 X 是一个代数，其乘法满足

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

则称 X 是一个赋范代数. 完备的赋范代数又称 Banach 代数.

例子1.1.3　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 中的一个紧子集. $C(\Omega)$ 表示 Ω 上连续函数全体，定义

$$\|f\| = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

容易验证 $C(\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 在 $C(\Omega)$ 上定义乘法为函数乘法，那么 $C(\Omega)$ 是一个 Banach 代数.

例子1.1.4　序列空间 l^p $(1 \leq p \leq \infty)$.

(i) 当 $1 \leq p < \infty$，$l^p = \{\{x_n\} : \|\{x_n\}\| = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$;

(ii) 当 $p = \infty$，$l^\infty = \{\{x_n\} : \|\{x_n\}\| = \sup_n |x_n| < \infty\}$.

证明: l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ 是 Banach 空间.

例子1.1.5　$L^p(\Omega)$ 空间. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开集.

(i) 当 $1 \leq p < \infty$，定义

$$L^p(\Omega) = \{ f \text{ 是 Lebesgue 可测的 } : \|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p\, \mathrm{d}V)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

这里 $\mathrm{d}V$ 是体积测度;

(ii) 当 $p=\infty$，定义

$$L^\infty(\Omega)=\{f \text{ 是 Lebesgue 可测的 }: \|f\|_\infty=\mathrm{Esup}_{x\in\Omega}|f(x)|<\infty\},$$

这里 $\mathrm{Esup}_{x\in\Omega}|f(x)|=\inf\limits_{E\subset\Omega,\, V(E)=0}\sup_{x\in\Omega\setminus E}|f(x)|$.

使用 Hölder不等式，可以证明 $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间，证明可参见文献 [XWYS, 下册].

注记1.1.6 (Hölder不等式) 设 $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果 $f\in L^p(\Omega), g\in L^q(\Omega)$, 那么 $fg\in L^1(\Omega)$，并且

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}V\right|\le\left(\int_\Omega|f(x)|^p\,\mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega|g(x)|^q\,\mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{q}}.$$

例子1.1.7 用 $H^\infty(\mathbb{D})$ 记开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上有界解析函数全体，作为 $L^\infty(\mathbb{D})$ 的闭子代数，它也是一个 Banach 代数.

例子1.1.8 考虑 Banach 空间 $L^1(\mathbb{R})$，在其上通过卷积定义乘法

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t,\quad f,g\in L^1(\mathbb{R}).$$

由 Fubini 定理，这是交换 Banach 代数，但无单位元.

例子1.1.9 矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 表示 $n\times n$ 复矩阵全体，它是有单位元的代数. 定义范数 $\|(a_{ij})\|=\sum_{i,j}|a_{ij}|$. 那么它是一个 Banach 代数. 当 $n\ge 2$ 时，它是非交换的，并且无非平凡的理想.

§1.2 Hilbert 空间

设 H 是复数域上的一个线性空间，如果泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle: H\times H\to\mathbb{C}$ 满足

(i) $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$； (对第一个变量线性)

(ii) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$； (共轭对称性)

(iii) $\langle x,x\rangle\ge 0$，若 $\langle x,x\rangle=0$，则 $x=0$. (正定性)

称这样的 H 为一个内积空间. 内积空间自然是一个赋范空间，其范数为 $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. 若在此范数下，内积空间是完备的，则称为 Hilbert 空间.

极化恒等式表达了内积和范数之间的关系：

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) + \frac{\mathrm{i}}{4}\Big(\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \|x-\mathrm{i}y\|^2\Big).$$

内积空间也有平行四边形公式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big),$$

和 Schwarz 不等式：

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.$$

Hilbert 空间的一个基本性质是射影定理，亦即：一个点到闭凸集的距离总是可达到的.

定理1.2.1 设 H 是 Hilbert 空间，S 是 H 的一个闭凸子集，$x \in H$，那么存在唯一的 $\bar{x} \in S$，使得

$$\mathrm{dist}(x, S) = \inf_{y\in S}\|x-y\| = \|x-\bar{x}\|.$$

证： 不妨假定 $x = 0$. 因此我们需证明存在 S 的唯一元素 $\bar{x}$ 具有最小范数，即存在唯一的 $\bar{x} \in S$，使得 $\|\bar{x}\| = \inf_{y\in S}\|y\|$. 设 $d = \inf_{y\in S}\|y\|$，并且选取 $x_n \in S$ 满足 $\|x_n\| \to d$. 平行四边形公式给出了

$$\Big\|\frac{x_n - x_m}{2}\Big\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \Big\|\frac{x_n + x_m}{2}\Big\|^2 \le \frac{1}{2}\Big(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\Big) - d^2.$$

这里 $\frac{x_n+x_m}{2} \in S$ 是因为 S 是凸集. 这表明了 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，并且因此存在 $\bar{x} \in S$ ，使得 $x_n \to \bar{x}$. 我们有

$$\|\bar{x}\| = \inf_{y\in S}\|y\|.$$

如果另有 $\tilde{x} \in S$ 使得 $\|\tilde{x}\| = \|\bar{x}\|$，那么 $\|\frac{\tilde{x}+\bar{x}}{2}\| \ge d$，平行四边形公式给出了

$$\|\tilde{x} - \bar{x}\|^2 = 2\|\tilde{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|^2 - \|\tilde{x} + \bar{x}\|^2 \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0. \qquad \square$$

这个与 x 最近的唯一元素 $\bar{x}$ 记为 $P_S x$，称为 x 到 S 上的投影. 注意 P_S 是 H 到 S 的一个映射，具有性质 $P_S P_S = P_S$.

设 L 是 Hilbert 空间 H 的一个闭线性子空间，写

$$L^{\perp} = \{x \in H \,|\, \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in L\},$$

称为 L 的正交补. 那么对每个 $x \in H$，$x - P_L x \in L^{\perp}$. 事实上，对任何 $y \in L$ 及 $t \in \mathbb{R}$，成立

$$\|x - P_L x\|^2 \le \|x - P_L x - ty\|^2 = \|x - P_L x\|^2 - 2t\langle x - P_L x, y\rangle + t^2\|y\|^2,$$

上式右边关于 t 的二次多项式在 $t = 0$ 处达到极小值, 取导数并令 $t = 0$，我们有 $\langle x - P_L x, y\rangle = 0$，即 $x - P_L x \in L^{\perp}$.

上面的推理表明每一个 x 有正交分解 $x = P_L x + (x - P_L x)$，并且因此 H 有正交分解 $H = L \oplus L^{\perp}$，并且 $x - P_L x$ 是 x 到 $L^{\perp}$ 的投影.

习题

1. 在 Hilbert 空间 $L^2[-1,1]$ 上，问偶函数集的正交补是什么？并证明你的结论.

§1.2.1 规范正交基

为了讨论的方便，我们假定 H 是可分的，即存在至多可数个元素，使得其在 H 中稠密.

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 H 中两两正交的单位向量，并且设 $S = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 那么$\forall x \in H$，$\sum\limits_k \langle x, e_k\rangle e_k \in S$，并且 $x - \sum\limits_k \langle x, e_k\rangle e_k \perp S$. 所以

$$P_S x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k,$$

并且因此

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|P_S x\|^2 \le \|x\|^2. \quad \text{(Bessel 不等式)}$$

由 H 的可分性，每个正交集至多是可数的. 如果两两正交的单位向量集 $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ 满足 $\overline{\mathrm{span}}\,\mathcal{E} = H$，称 $\mathcal{E}$ 是 H 的一个规范正交基. 对规范正交基，容易验证：

定理1.2.2 设 $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ 是 H 的一个规范正交基，那么

(i) 每个 $x \in H$ 关于 $\mathcal{E}$ 的 Fourier 级数收敛于 x，即$x = \sum\limits_n \langle x, e_n\rangle e_n$；

(ii) $\sum\limits_n |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$. (Parseval 等式)

使用 Zorn 引理，人们可以证明每个 Hilbert 空间都有规范正交基. 对可分的 Hilbert 空间，可以通过 Gram – Schmidt 正交化过程构造规范正交基.

例子1.2.3 $\mathbb{C}^n$，$\langle z,w\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i$, $\{e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基.

例子1.2.4 l^2, $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{n} x_n\bar{y}_n$，$e_n=(0,\cdots,1,0,\cdots)$，第$n$个位置是1, 其余均为零，那么$\{e_n\}$ 是 l^2 的规范正交基.

例子1.2.5 $L^2(\mathbb{T},\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta)$, $\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta/2\pi$，具有典型的规范正交基 $e_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例子1.2.6 单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上的 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$L_a^2(\mathbb{D})=\{f(z)\text{在}\mathbb{D}\text{上解析}:\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)<\infty\},$$

这里 $\mathrm{d}A(z)$表示面积测度. 那么$L_a^2(\mathbb{D})$ 是一个 Hilbert 空间，它有一个典型的规范正交基

$$e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

例子1.2.7 Legendre 多项式 $L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, n=0,1,2,\cdots$, 构成 $L^2[-1,1]$ 的一个规范正交基.

习题

1. 验证 $\{f_n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}:n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是复 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$ 的规范正交基，写出函数 $f(\theta)=\theta$ 在这组基下的 Fourier 展开，并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
2. 设 $\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个规范正交基. 如果 $\{f_1,f_2,f_3,\cdots\}$ 是 H 的一组正交集，且满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|e_i-f_i\|^2<\infty,$$

则 $\{f_1,f_2,f_3,\cdots\}$ 也是 H 的一个规范正交基.

§1.2.2 Hilbert 空间上连续线性泛函

设 H 是一个 Hilbert 空间，一个自然的问题是研究 H 上的连续线性泛函, 即研究连续线性映射 $f : H \to \mathbb{C}$. 连续性是指: 对任何 $x \in H$, $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$，等价地，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

给定 $x \in H$，做线性泛函

$$f_x(y) = \langle y, x\rangle,$$

那么 f_x 是连续的，并且

$$\|f_x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |f_x(y)| = \|x\|.$$

这里 $\|f_x\|$ 称为 f_x 的范数.

下面的 Riesz 表示定理说明 H 上的每一个连续线性泛函都有这种形式.

定理1.2.8 (Riesz 表示定理) 设 H 是一个复 Hilbert 空间，并且 f 是 H 上的连续线性泛函，那么存在唯一的 $x \in H$，使得 $f(y) = \langle y, x\rangle$，并且 $\|f\| = \|x\|$.

证： 假设 $f \neq 0$，并且 y_0 使得 $f(y_0) = 1$. 那么对任何 $y \in H$，$y - f(y)y_0 \in \ker f$，这里 $\ker f = \{h \in H \mid f(h) = 0\}$，称为 f 的核.从这个事实，易见 $[\ker f]^\perp$ 是 1-维的. 取 $[\ker f]^\perp$ 中的一个单位向量 e，那么任何 $y \in H$ 在 $[\ker f]^\perp$ 上的投影是 $\langle y, e\rangle e$. 故 y 可分解

$$y = y_0 + \langle y, e\rangle e,\ \text{这里}\, y_0 \in \ker f.$$

从而 $f(y) = \langle y, e\rangle f(e) = \langle y, \overline{f(e)}e\rangle$，令 $x = \overline{f(e)}e$ 即可. 范数等式易证. □

设 H_1, H_2 是 Hilbert 空间. 如果 $f : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ 关于第一个变量是线性的, 关于第二个变量是共轭线性的, 则称 f 是双线性的. 进一步，如果

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |f(x, y)| < \infty,$$

则称 f 是有界的双线性泛函, 其最小上界为 $\|f\|$.

设 $A : H_1 \to H_2$ 是一个线性算子 (即一个线性映射)，称 A 有界的，如果 $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < \infty$. 数 $\|A\|$ 称为 A 的范数. 容易验证 A 是有界的当且仅当 A 是连续的.

应用 Riesz 表示定理, 易证:

系1.2.9 f 是有界的双线性泛函当且仅当存在有界线性算子 $A : H_1 \to H_2$，使得 $f(x, y) = \langle Ax, y\rangle$，$x \in H_1, y \in H_2$，并且 $\|A\| = \|f\|$.