面向“十二五”高等院校人才培养规划教材

主　编 / 吴炳烨
主　审 / 黄玉笙
副主编 / 吴丽萍　赖军将　范振成

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

面向“十二五”高等院校人才培养规划教材

高等数学（下册）

主　编　吴炳烨

主　审　黄玉笙

副主编　吴丽萍　赖军将　范振成

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书以教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委会新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为指导，结合普通高等学校理工类专业数学教学的特点，以严密、通俗的语言，较系统地介绍了高等数学的知识.全书分为上、下册两册.上册共分六章，内容包括函数、极限与连续，导数和微分，微分中值定理和导数的应用，不定积分，定积分及空间解析几何概要；下册共分四章，内容包括多元函数微分法及其应用，多元函数积分学，无穷级数及常微分方程.

本书体系完备，详略得当，例题丰富，难度适中，可作为普通高等学校理工类专业高等数学教材使用，也可作为非数学类专业学生考研的参考材料，还可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/吴炳烨主编. —杭州：浙江大学出版社，2014.6

ISBN 978-7-308-13249-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第096914号

高等数学(下册)

主　编　吴炳烨

责任编辑　邹小宁

文字编辑　沈巧华　曹明浩

封面设计　王聪聪

出　　版　浙江大学出版社

(杭州市天目山路148号　邮政编码310007)

(网址：http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州教联文化发展有限公司

印　　刷　浙江国广彩印有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　12.75

字　　数　295千

版 印 次　2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-13249-7

定　　价　27.60元

版权所有　翻印必究　印装差错　负责调换

编委名单

主　　编　吴炳烨
主　　审　黄玉笙
副主编　郭　晶　孙　锋　郑书富
编　　委　(按照姓氏笔画排序)
孙　锋　吴丽萍　吴炳烨
范振成　郑书富　郭　晶
赖军将

前　言

高等数学是理、工科专业一门重要的基础课程，是非数学类理工科专业学生的必修数学课，对于提高文科类专业学生的综合素质也有重要作用. 作为一门基础学科，数学有其固有的特点，这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性. 数学的高度抽象性及严密的逻辑性在很大程度上造成了非数学类专业学生学习数学的困难. 随着高等教育的大众化，这一问题显得越来越突出. 高等数学课程教学如何适应应用型人才培养的需要，是当前普通本科高校教学改革与研究的一个重要课题.

本书就是在这一背景下，结合编写者多年的教学实践和教改成果，以教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为基础而编写的，以满足普通高等学校理工类专业高等数学课程教学的需要，同时在教材内容与习题编排上兼顾非数学类专业学生考研的需求.

与其他同类教材相比，本书有以下特色:

1. 体系完备清晰，知识叙述循序渐进，难度适中. 内容编排上，引入数学概念时注重介绍相应的数学或物理等的背景，并围绕基本内容构造了丰富的例题. 此外，几何图形对于学生理解与掌握数学概念与方法起到十分重要的作用，与同类教材相比，本书配有丰富的插图，有利于学生理解与掌握数学知识.

2. 一定量的习题训练是学生学习与掌握数学知识不可或缺的重要环节. 本书根据教学内容精心编制习题，在习题编排上分为 A 题与 B 题两类. A 题为基础题，以帮助学生掌握基础知识与基本方法为目的，可作为课后书面作业选用; B 题为提高题，其中包含部分历年来非数学类专业的考研真题，适合对数学有兴趣的学生进一步学习及考研的需求. 与目前同类教材通常附有习题解答或参考答案的做法不同，本书没有附上习题解答，目的在于培养学生独立思考的能力.

3. 全书书稿用数学编辑软件 LATEX 编写而成，使得版面看起来更专业、更美观. 因为书稿用 LATEX 编写而成，处理数学公式是它的专长，生成的数学公式符合国际标准格式，规范美观; 同时LATEX 自带的 PGF 宏包具有强大的作图功能，全书的插图均由该宏包精确绘制而成，使得图形标准且富于变化，有利于提高教学效果.

4. 与全书配套的教学课件也用LATEX 编制而成，在形式上模拟“黑板+粉笔”的传统教学模式，具备“擦黑板”、标注、打草稿、按步骤作图、图文交替演示等功能，同时充分体现多媒体课件书写规范美观、富于变化、图形准确、动态演示形象直观等特点，十分适合教师教学及学生学习的需要.

本书上、下册由吴炳烨主编，参加编写的专业教师为: 郭晶(第1、2、3章)，孙锋(第4、5章)，吴炳烨(第6章)，吴丽萍(第7章)，赖军将(第8章)与范振成(第9、10章). 本书在编写过

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

程中参考了国内有关著作、教材，主要参考书目已列在书末，在此表示感谢. 本书的编写得到编者单位及浙江大学出版社的大力支持与热情帮助，在此谨致谢意. 限于编者的水平，本书难免存在错漏之处，敬请专家和读者批评指正.

编 者

2014 年 6 月

目　录

第 7 章　多元函数微分法及其应用

在上册中, 讨论的函数都只有一个自变量, 这种函数称为一元函数. 但在自然科学和工程技术中, 经常会遇到一个变量依赖于多个变量的问题, 反映到数学上就是多元函数. 本章讨论多元函数的微分法及其应用, 它们与一元函数微分法既紧密联系, 又有很大区别, 在学习中应注意加以比较. 在讨论过程中主要以二元函数为主, 所得的结论大都可以类推到二元以上的多元函数.

7.1　多元函数的极限与连续

7.1.1 平面点集

一元函数的定义域是实数轴上的点集, 二元函数的定义域则是坐标平面上的点集. 因此以下先介绍平面点集的一些基本概念.

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合 E, 称为**平面点集**, 记作

$$E=\{(x,y)|(x,y)\text{具有性质}P\}.$$

例如, 平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点的集合是

$$S=\{(x,y)|x^2+y^2<r^2\}.$$

坐标平面上的所有点组成的集合是

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}.$$

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点, δ 是一个正数, 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ **邻域**, 记作 $U(P_0,\delta)$, 即

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

在几何上, $U(P_0,\delta)$ 表示圆心在 P_0, 半径为 δ 的圆的内部(如图 7-1 所示, 其中虚线表示该圆周不包含在邻域内).

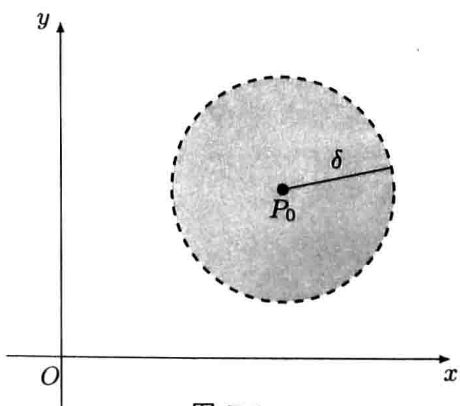

图 7-1

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

点 P_0 的**去心 δ 邻域**, 记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$, 它的定义是

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

在不需要强调邻域半径 δ 时, 可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域, $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域. 下面利用邻域来描述点与点集之间的关系.

设 E 为平面点集, 相对于 E, 平面上的点可以分为三类:

(1) **内点**: 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\subset E$, 则称点 P 为 E 的内点.

(2) **外点**: 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\bigcap E=\emptyset$, 则称点 P 为 E 的外点.

(3) **边界点**: 如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称点 P 为 E 的边界点.

E 的边界点的全体, 称为 E 的**边界**, 记作 ∂E.

注 E 的内点必属于 E; E 的外点必不属于 E; 而 E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E.

如果点 P 的任一 去心邻域 $\mathring{U}(P)$ 内总有 E 中的点, 则称 P 是 E 的**聚点**. 聚点本身可能属于 E, 也可能不属于 E, 但从定义易知, E 的内点必定是聚点. 例如, 设平面点集

$$E=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2<4\},$$

则满足 $1<x^2+y^2<4$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点; 满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点, 它们都属于 E; 满足 $x^2+y^2=4$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点, 但它们不属于 E; 满足 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的聚点.

如果点集 E 中的点都是 E 的内点, 则称 E 为**开集**; 如果点集 E 的边界 $\partial E\subset E$, 则称 E 为**闭集**. 例如, 集合 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集, 集合 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集; 而集合 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2<4\}$ 既非开集, 也非闭集.

如果点集 E 中任意两点之间都可用一条完全含于 E 的折线连接起来, 则称 E 为**连通集**. 连通的开集称为**区域**或**开区域**. 区域与它的边界的并集称为**闭区域**. 例如, 集合 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开区域, 集合 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭区域; 而集合 $\{(x,y)||x|>1\}$ 虽然是开集, 但不连通, 所以它不是区域.

对于平面点集 E, 如果存在某一正数 r, 使得

$$E\subset U(O,r),$$

其中 O 为坐标原点, 则称 E 为**有界集**, 否则称为**无界集**. 例如, 集合 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域; 集合 $\{(x,y)|x>0\}$ 是无界开区域.

2. n 维空间

一般地, 对于确定的正整数 n, 称有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n **维空间**, 记为 $\mathbf{R}^n$. 每个有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**, x_i 称为该点的**第 i 个坐标**. $\mathbf{R}^n$ 中的两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

当 $n=1,2,3$ 时, 上式就是数轴上、平面上及空间中两点间的距离公式.

前面针对平面点集给出的一系列概念都可推广到 n 维空间中去. 例如, 设 P_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点, $\delta>0$, 则点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{P||PP_0|<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}.$$

7.1.2 多元函数的概念

多元函数就是含有两个或两个以上自变量的函数, 在许多实际问题中是经常遇到的. 下面给出二元函数的定义.

定义 7.1.1 设点集 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集, 如果对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$, 按照一定的对应法则 f, 都有唯一确定的实数 z 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的**二元函数**, 有时也称 z 是 x,y 的**二元函数**, 记作

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

或

$$z=f(P),P\in D.$$

这里点集 D 称为该函数的**定义域**, x,y 称为**自变量**, z 称为**因变量**. 与 (x,y) 对应的值 z 称为 f 在点 (x,y) 的**函数值**, 记为 $f(x,y)$. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

上述表示二元函数的字母 f 也可以用其它字母表示. 例如记 $z=z(x,y),z=\varphi(x,y)$ 等等.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$, 对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样, 以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 遍取 D 上一切点时, 得到一个空间点集

$$S=\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为**二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形**(如图 7-2 所示).

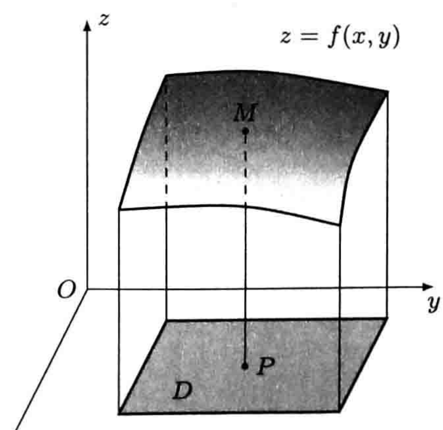

图 7-2

今后遇到的二元函数的图形大部分是三维空间中的一张曲面. 例如, 由空间解析几何知道, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为中心的单位球面的上半部分, $z=x^2+y^2$ 的图形是以原点为顶点开口向上的旋转抛物面.

如果将定义 7.1.1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集, 就可类似地定义 n 元函数. 当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数. 当 $n \geqslant 2$ 时, n 元函数统称为**多元函数**.

n 元函数通常记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或

$$u=f(P),\ P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

例如, 当 $n=3$ 时, 习惯上将点 (x_1,x_2,x_3) 记为 (x,y,z), 因此三元函数可记作

$$u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D\subset\mathbf{R}^3.$$

与一元函数类似, 对于多元函数的定义域, 我们约定: 如果仅用算式 $u=f(P)$ 表示函数, 而没有明确指出定义域, 则该函数的定义域理解为使算式有意义的所有点 P 组成的集合, 也称作该函数的**自然定义域**.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $z=\ln(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

(2) $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2-1)$.

解 (1) 为使算式有意义, 则

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0, \\ 4-x^2-y^2>0. \end{cases}$$

所以该函数的定义域为 $D=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$, 如图 7-3 所示.

(2) 由反正弦函数的定义域, 得 $-1\leqslant x^2+y^2+z^2-1\leqslant 1$, 所以该函数的定义域为 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 2\}$, 如图 7-4 所示.

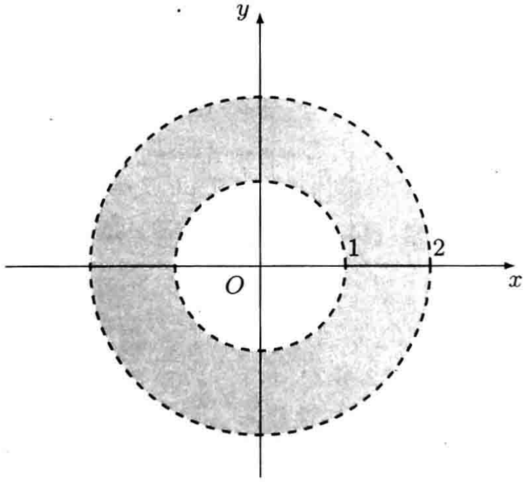

图 7-3

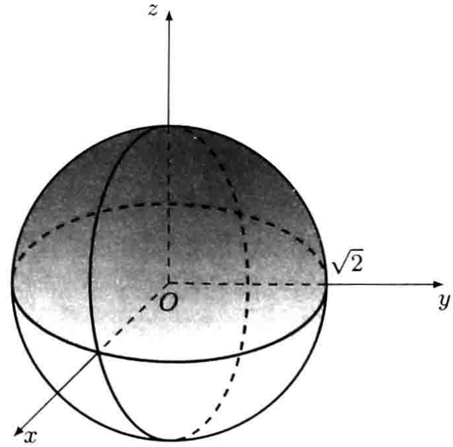

图 7-4

7.1.3 多元函数的极限

与一元函数的极限概念类似, 如果当点 $P(x,y)$ 无限趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 对应的函数值无限接近于一个确定的常数 A, 就说 A 是二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 7.1.2 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D, 点 (x_0,y_0) 是 D 的聚点. 如果存在常数 A, 使得对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 使得对于适合不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切属于 D 的点 (x,y), 都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立, 则称 A 为函数 $f(x,y)$ **当** $(x,y)\to(x_0,y_0)$ **时的极限**, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

也可记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A\ \big((x,y)\to(x_0,y_0)\big).$$

注 在上面的定义中, 条件 "$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$" 也可以用 "$|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta, (x,y)\neq(x_0,y_0)$" 替代.

区别于一元函数的极限, 称二元函数的极限为**二重极限**.

例 2 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证 由于

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

于是 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

注 对一元函数 $f(x)$ 而言, 只要 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限存在且相等, 那么 $f(x)$ 在点 x_0 的极限就存在. 但在二重极限定义中, 要求动点 (x,y) 以任意的方式趋于点 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 都无限接近于 A. 因此如果点 (x,y) 沿不同的直线或曲线趋于点 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 趋于不同的值, 或点 (x,y) 沿某一特殊的直线或曲线趋于点 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 的极限不存在, 那么就可以断定 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的极限不存在. 这就给我们提供了判别二元函数在某一点极限不存在的一种常用方法.

例 3 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

当点 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限是否存在.

解 当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

该极限值随着 k 的值的不同而不同, 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

以上关于二元函数的极限概念, 可以相应地推广到 n 元函数上去. 多元函数极限的定义在形式上与一元函数的极限定义相同, 因此多元函数的极限有与一元函数极限类似的性质, 如极限的唯一性、四则运算法则及夹逼准则等.

例 4 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left[\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim\limits_{xy\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 2}y=2.$

例 5 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0,\qquad \left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,$$

所以由有界量与无穷小量的乘积仍为无穷小量可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例 6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 因为

$$0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0.$$

所以由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

7.1.4 多元函数的连续性

以下以二元函数为例, 将一元函数连续的概念推广到多元函数.

定义 7.1.3 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D, 点 (x_0,y_0) 是 D 的聚点, 且 $(x_0,y_0)\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数在 $f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) **连续**. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续, 则称点 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的定义域 $D=\mathbf{R}^2$, 由例 3 知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在, 所以点 (0,0) 是 $f(x,y)$ 的间断点. 又如函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y},$$

其定义域为

$$D=\{(x,y)|x+y\neq 0\},$$

直线 $x+y=0$ 上的点都是 D 的聚点, 而 $f(x,y)$ 在该直线上无定义, 所以直线 $x+y=0$ 上的点都是 $f(x,y)$ 的间断点.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续, 则称函数 $f(x,y)$ **在 D 上连续**, 或称 $f(x,y)$ **是 D 上的连续函数**.

类似地, 可定义 n 元函数的连续性. 和一元函数一样, 多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)仍为连续函数; 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

类似于一元初等函数, **多元初等函数**是指由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的可用一个式子表示的多元函数. 例如, $\ln(x^2+y^2)$, $\dfrac{xy}{x^2+z^2}$, e^{y+z} 等都是多元初等函数.

根据上面的讨论, 可得一般结论: **一切多元初等函数在其定义区域内是连续的**. 所谓**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域. 因此, 多元初等函数在其定义区域内一点的极限值就是函数在该点的函数值.

例 7 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是多元初等函数, 在点 $(1,0)$ 的某邻域内有定义, 从而在点 $(1,0)$ 连续. 所以

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=\ln 2.$$

例 8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$.

解 分母有理化, 得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}{1+x^2+y^2-1}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)\\&=2.\end{aligned}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com