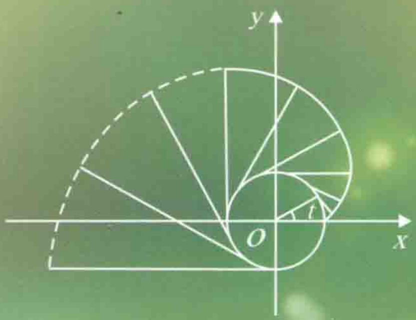
高等学校“十二五”规划教材

高等数学

上册

主编　王树勋　曹吉利



西北工業大學出版社

高等学校“十二五”规划教材

高 等 数 学

上 册

主 编 王树勋 曹吉利

副主编 田 壤 杨立夫

编 者 王树勋 曹吉利 田 壤 杨立夫
李 哲 高 云 苏晓海 刘莉君
田京京

主 审 张文鹏

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的.全书分为上、下两册,共十一章.上册内容包括:函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与数学建模初步;下册内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、最优化方法初步和变分法简介.

本书既可作为高等学校理工科本科生各专业的高等数学课程教材,也可供工程技术人员、教师、其他专业的学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王树勋,曹吉利主编.—西安:西北工业大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-5612-3422-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②曹… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第195353号

出版发行:西北工业大学出版社
通讯地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:727 mm×960mm 1/16
印　　张:40
字　　数:740千字
版　　次:2012年8月第1版 2012年8月第1次印刷
定　　价:56.00元(上、下册)

前　言

随着科学技术的发展与进步,数学和其他学科一样,都面临着教学思想的转变及内容体系的更新,浓缩经典内容,渗透现代数学思想、方法,将单纯的知识传授变为知识传授与素质教育相结合,是摆在我们面前亟待解决的重大课题.根据“教育部非数学类数学基础课程教学基本要求和高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革精神”,我们结合多年教学改革工作的体会和经验,在充分研讨的基础上,编写了本教材,并力求体现下述特点.

(1)浓缩经典极限理论,淡化运算技巧,突出极限思想,以够用为原则.

(2)从实例出发引入导数的概念,突出导数概念的背景,加强变化率问题,强调导数与微分的关系,突出微分的应用.

(3)中值定理的证明采用几何直观与代数分析证法,突出证明思想,注重定理的应用.

(4)对于弧微分采用了直观图形与夹逼准则相结合的新的处理方法,避免了传统教材中的某些不足.

(5)在积分学中,突出求原函数的方法及牛顿-莱布尼兹公式,淡化积分计算技巧,加强积分学在实际中的应用.对于重积分采用行列式统一处理积分元素,在曲线积分与曲面积分中引入向量形式,使得概念清晰,计算简捷,两类线、面积分之间的联系直观明了,高斯公式、斯托克斯公式的证明较为简便.

(6)对于微分方程、空间解析几何、多元函数微分学及无穷级数,均不同程度地吸收了教学研究的成果,并结合微分方程介绍数学建模的基本方法,培养学生的创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

(7)介绍了一些现代数学方法,如最优化方法及工程中常用的变分法等内容.

(8)为了控制学时数,书中部分章节加有“*”号,其内容老师可根据实际学时数选讲或供学生自学.

全书由王树勋、曹吉利拟订编写大纲及编写规划,并担任主编.王树勋编写了第一、六章并绘制了全书插图,曹吉利编写了第三、五、八章,田壤编写了第二

章，杨立夫编写了第七章，田京京编写了第九章及下册的习题与答案，李哲、高云、苏晓海、刘莉君等编写了第四、十、十一章及上册的习题与答案. 全书由王树勋、曹吉利、田壤负责统稿.

本书自 2000 年开始筹划，并专门成立了教改小组，参阅了国内外大量改革教材及教改成果，在总结多年教学经验的基础上，初稿编写成讲义，经过连续多年使用、修改、充实，今正式出版与读者见面. 本书在编写过程中得到陕西理工学院领导和同志们的大力支持. 西北工业大学聂铁军教授、叶正麟教授给本书提出了宝贵的意见. 西北大学张文鹏教授在百忙中审阅了全书. 在此对各位领导、专家及同志们表示衷心的感谢.

由于水平有限，书中不足和考虑不周之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2012 年 7 月

目　　录

上　册

第一章　函数、极限与连续

高等数学与初等数学的显著区别是，初等数学是研究常量和固定的图形，研究的方法是静止的、孤立的，而高等数学是研究变量、变量的依赖关系(函数)和变化的图形，研究的方法必然就要求是动态的、发展的和联系的. 数学分支中有许多是属于高等数学范畴的，我们这门课所指的是通常意义下的高等数学，它以微积分为主要内容，主要研究对象是函数，基本方法是极限的方法. 本章主要介绍函数的概念、极限及相关知识，并在此基础上讨论函数的一种性态——连续性问题.

第一节　函　　数

一、区间、邻域

区间是高等数学中常用的实数集. 关于区间有以下几种：

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

其中 a 和 b 称为开区间的端点，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，类似地有半开区间

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$$

以上这些区间均称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 另外还有所谓的无限区间. 引入记号 $+\infty$(读作：正无穷大) 及 $-\infty$(读作：负无穷大)，并定义：

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x, x \in \mathbf{R}\}$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$$

我们知道，实数和数轴上的点是一一对应的，以后将点“x”和实数“x”作同义语. 所以区间也可以在数轴上表示，而区间长度的几何直观即为两端点间的

距离.区间在数轴上可用图 1－1 表示.

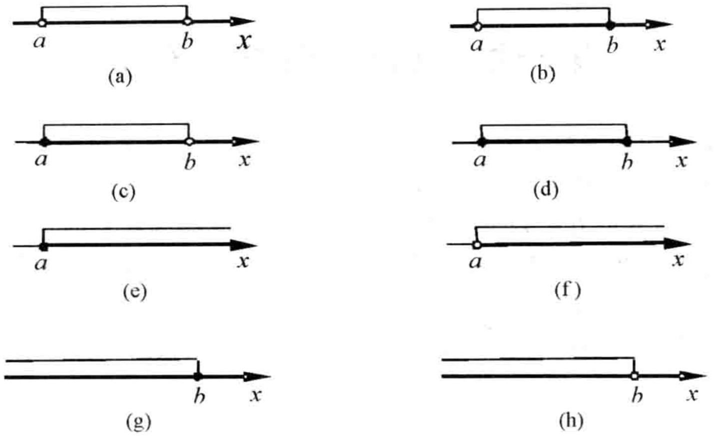


图 1－1

以后在不需要明辨区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，简称它为“区间”，常用 I 表示.

现在介绍一个较为特殊且常用的区间——邻域.

称实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径(图 1－2).

有时用到的邻域要把中心去掉.在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$，亦即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)$$

如图 1－2 所示.今后在不关心邻域的半径时，点 a 的邻域可简记作 $U(a)$.

图 1－2

二、常量与变量

我们在观察自然现象或研究某些实际问题时或从事生产的过程中，总会遇到许多量，如面积、体积、长度、时间、温度、压力等. 这些量一般分为两类，常量与变量. 如果一个量在某过程中保持不变，总取一个值，则称这种量为常量，常量通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示. 如果一个量在某过程中是变化的，即可取不同的数值，则称这种量为变量，变量通常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 等表示.

常量与变量都是对某一过程而言的. 例如，重力加速度，在地球近表来说可看作是常量，在大范围来说是变量. 但常量可看做是变量的特殊情形.

三、函数的概念

在中学已学过映射与函数的定义，并把函数看成一类特殊的映射.

定义 1(映射)　设 X 和 Y 为两个非空集合，若对每个元素 $x \in X$，按照某种法则 f，有唯一确定的元素 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射. 记为

$$f:X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

并称 y 是 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 在映射 f 下的一个原像(或逆像).

与映射相关的几个概念：

(1)映射 $f:X \to Y$ 叫做单射是指不同的原像有不同的像. 由此可知，Y 中某元素如果有原像，则原像是唯一的.

(2)映射 $f:X \to Y$ 叫做满射(到上的)，是指对任何 $y \in Y$，在 X 中都存在原像与之对应. 也就是说，Y 中每个元素都是 X 中某元素的像.

(3)如果一个映射既是单射又是满射，则称之为双射或者说 $1-1$ 映射.

(4)设映射 $f:X \to Y$ 是 $1-1$ 映射，则对任一 $x \in X$，有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，反之亦然. 此时视 $y \in Y$ 为原像，$x \in X$ 为 y 的像，则确定了一个由 Y 到 X 的 $1-1$ 映射，称之为映射 $f:X \to Y$ 的逆映射，记为

$$f^{-1}:Y \to X$$

定义 2(函数)　设 X 和 Y 为两个非空实数集，f 为 X 到 Y 的一个映射，则称 $f:X \to Y$ 为定义在实数集 X 上的函数. 记为

$$f: x \to y, x \in X;\text{简记为 } y=f(x), x \in X$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，X 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$，当 x 取遍定义域中的每一值时，所对应的 $y=f(x)$ 的集合 $W(f)=\{y \mid y=f(x), x \in D(f)\} \subset Y$，称为函数的值域.

在函数的定义中，须注意以下几点：

（1）构成函数需要两个要素，即定义域和对应法则，可以看出值域是随着定义域和对应法则的确定而确定. 因此，两个函数只要定义域和对应法则相同就认为是同一函数或说两函数相等.

例如，$f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, x\in(-\infty,+\infty)$ 表面形式不同，实际上是相等的；而 $f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数，因为两个函数的定义域不同.

（2）在映射的定义中，任一 $x\in X$，要求有"唯一确定"的 y 与 x 对应，故由此定义的函数称为单值函数；而如果允许有"多个确定"的 y 与 x 对应，就可以称为多值函数. 事实上，多值函数可以分成若干单值分支来研究，在本书范围内，只讨论单值函数.

（3）为了加深对函数概念的理解，对函数的两个基本要素做一些简要的说明：

1）定义域 $D(f)$：函数的定义域就是自变量所能取得的那些数构成的集合. 在实际问题中，可以根据实际问题的具体意义来确定，例如，真空中自由落体的运动规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-1}$$

确定了 s 与 t 的一个函数关系，其中 t 表示的变化范围是从物体开始下落的时刻（设 $t=0$）到物体到达地面的时刻（设 $t=T$），故该函数的定义域 $D(f)=[0,T]$；在理论研究中，如果函数是由数学式子给出，又无须考虑它的实际意义，那么，函数的定义域是使该表达式有意义的自变量 x 的所有值构成的数集（通常称为自然定义域），例如，如果不考虑实际意义，那么式（1－1）中函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又如函数 $y=\sqrt{1-|x|}+\lg(2x-1)$ 的定义域是由使右端两项都有意义的那些 x 所构成的数集，所以 $D(f)=[-1,1]\cap\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)=\left(\dfrac{1}{2},1\right]$. 若函数的定义域构成区间，则函数的定义域常称为定义区间.

2）对应法则 f：对应法则是 y 与 x 之间函数关系的具体表现，它的表示法很多，常用的有三种：列表法、图示法和公式法（也称解析法）.

所谓列表法就是将自变量与因变量的对应数据列成表格，它们之间的函数关系从表格上一目了然. 例如三角函数表、对数函数表等. 很多生产部门常采用图示法来表示函数关系. 例如，气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系；工厂中用温度压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等.

理论研究中常用公式法，即用具体数学表达式表示函数关系的方法. 这种方法读者在中学已接触很多，这里不再重复.

平面点集 $C=\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-3).

在函数的定义中,并不要求在整个定义域上只能用一个表达式表示对应法则,在很多问题中常常会遇到这种情况,就是在定义域的不同部分上用不同的表达式来表示对应法则,这种函数称为分段函数.下面举一些分段函数的例子.

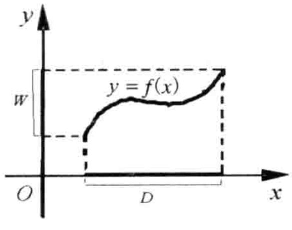


图 1-3

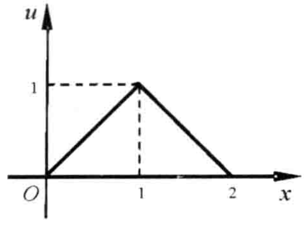


图 1-4

例 1 在电子技术中经常遇到三角波,它的波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2-t, & 1<t \leqslant 2 \end{cases}$$

它是一个分段函数,不能认为是两个函数(图 1-4).

例 2 符号函数(图 1-5)

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例 3 取整函数 $y=[x]$ $(x \in R)$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(图 1-6).

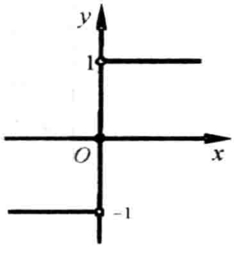


图 1-5

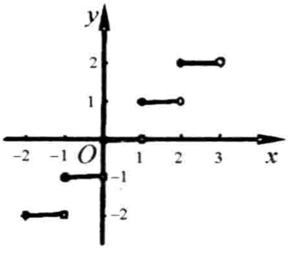


图 1-6

例 4 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg \sin x$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义,必须使

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0 \\ \sin x>0 \end{cases}$$

成立,即

$$\begin{cases}-4 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\end{cases}$$

解此不等式组，得

$$-4 \leqslant x < -\pi \text{ 与 } 0 < x < \pi$$

故函数的定义域为 $[-4,-\pi)$ 与 $(0,\pi)$.

例 5 旅客携带行李乘火车旅行时，行李重量不超过 20 kg 时不收费，若超过 20 kg，每超过 1 kg 收运费 k 元. 试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系式.

解 因为，当 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；而当 $x>20$ 时，此时只有超过部分 $x-20$ 按每公斤收取运费 k 元，即

$$y=k(x-20)$$

所以运费 y 与行李重量 x 的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ k(x-20), & x>20\end{cases}$$

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x \leqslant 0 \\ x^2, & 0<x \leqslant 1 \\ 3-x, & 1<x \leqslant 2\end{cases}$$

(1) 作出函数的图形.

(2) 写出函数的定义域，并求出 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 (1) 该分段函数的图形如图 1-7 所示.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,2]$.

当 $x \in (0,1]$ 时，$f(x)=x^2$；当 $x \in (1,2]$ 时，$f(x)=3-x$. 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

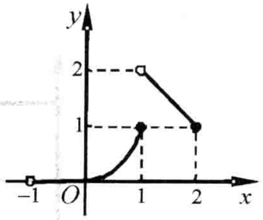


图 1-7

四、函数的几种性态

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对一切 $x \in X$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 若对无论多么大的正数 M，在 X 上至少存在一点 x_0，使得

$$|f(x_0)|>M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

如果函数 $f(x)$ 在其自然定义域内有界,则称 $f(x)$ 是有界函数.

例 7 试证

(1) $f(x)=\sin x$ 是有界函数.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 内无界.

证明 (1) 取 $M=1$,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant M$,即 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(2) 对无论多么大的 $M>1$,在$(0,1)$ 内总存在有使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$ 的 x,事实上,只要取 $x<\dfrac{1}{M}$,就恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$,故 $\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 内无界.

注 (1) 讨论函数的有界性必须注意其变化范围.

(2) 对于定义在 X 上的函数 $f(x)$,如果存在数 M,使得对于一切 $x\in X$,恒有 $f(x)\leqslant M$ 成立,则称 M 是 $f(x)$ 的一个上界;如果存在数 m,使得对于一切 $x\in X$,恒有 $f(x)\geqslant m$ 成立,则称 m 是 $f(x)$ 的一个下界. 这样函数在 X 上有界就等价于既有上界又有下界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).

注 函数在 I 上单调增加或单调减少统称 $f(x)$ 在 I 上单调.

例 8 试证明 $y=x^3$ 是单调增加的.

证明 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$. 由于

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=$$

$$\frac{1}{2}(x_2-x_1)[(x_2+x_1)^2+x_1^2+x_2^2]>0$$

故函数 $y=x^3$ 在其定义域上是单调增加函数.

例 9 试证 $f(x)=3^{x-1}$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

证明 设 x_1,x_2 是$(0,+\infty)$ 内任意两点,且 $x_1<x_2$,于是有

$$x_1-x_2<0$$

因为 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}=\dfrac{3^{x_1-1}}{3^{x_2-1}}=3^{x_1-x_2}<1$,且 $f(x)>0$,所以

$$f(x_1)<f(x_2)$$

故 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

并非所有函数都是单调的，如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，而在 $(-\infty,+\infty)$ 内是非单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对一切 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数；若恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数. 否则，称 $f(x)$ 在 D 上为非奇非偶函数.

设函数 $f(x)$ 是奇函数，(x_1,y_1) 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点，则

$$f(-x_1)=-f(x_1)=-y_1$$

即 $(-x_1,-y_1)$ 也在这条曲线上，又 (x_1,y_1) 和 $(-x_1,-y_1)$ 关于原点对称，故函数的图形关于原点对称. 类似可知，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 10 研究下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(2) $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $h(x)=\sin x+\cos x$；

(4) $R(x)=\ln x$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，又

$$f(-x)=\frac{1}{2}[a^{-x}+a^{-(-x)}]=f(x)$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $g(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，又

$$g(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-g(x)$$

故 $g(x)$ 是奇函数.

(3) $h(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，但

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0,\qquad h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

故 $h(x)$ 是非奇非偶函数.

(4) $R(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 不是对称区间，故 $R(x)$ 不谈奇偶性.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D，如果存在非零常数 l，使得对一切 $x\in D$，恒有

$$f(x+l)=f(x)$$