21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（第二版）

主编◎武京君

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（第二版）

主　编◎武京君
副主编◎傅　爽　高　云
陈素玲　郝　涛

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/武京君主编. —2 版. —北京：中国人民大学出版社，2015.2
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-20581-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 003121 号

21 世纪高等院校创新教材
高等数学（第二版）
主　编　武京君
副主编　傅　爽　高　云　陈素玲　郝　涛
Gaodeng Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司	**版　　次**	2011 年 3 月第 1 版
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本		2015 年 3 月第 2 版
印　　张	12.25 插页 1	**印　　次**	2015 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	281 000	**定　　价**	25.00 元

内容简介

本书主要讲解微积分学的基础部分（一元微积分），它是科学技术的一个基本工具，它的奠基人是著名科学家牛顿和莱布尼茨；微积分的方法和思想深刻影响着近现代科学技术的各个方面. 全书共分八章，包括极限理论，函数的导数、微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程及其解法，无穷级数，多元函数微积分等内容. 编写本书的过程中，我们既注重科学性和系统性，又注重实用性，例题较多，书后附有答案.

全书文字简洁，内容精练，由浅入深，可供高等院校各类专业的学生使用，也可作为科技工作者的参考用书.

第二版前言

高等数学又称微积分，它于近代初期（约 17 世纪）由大科学家牛顿和莱布尼茨发现，并逐步完善. 它开创了科学技术的新纪元，并深刻地影响着近现代科学技术的各个方面；它是学习科学技术知识的基础，在科学研究和工程问题中科学家常常把微积分形象地比作日常生活中的“加减乘除”.

本书是在《高等数学》（基础篇）第 1 版基础上经过大量修改与系统整理而完成. 它汇集了我们几十年的教学经验和总结，参考了许多同行专家的建议，在此感谢他们无私的帮助.

本书重点突出，系统性强，按照大学学习“高等数学”知识的不同要求，分层次地阐明了微积分的基本理论和方法，注重培养、训练学生的基本运算、分析与解决问题的能力.

本书系统介绍了一元微积分，对二元微积分只介绍了它的定义和计算，没有展开多元微积分的系统讨论，欲详细了解多元微积分请参阅同济大学《高等数学》第 6 版下册.

本书主要内容包括极限理论，函数的导数、微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程及其解法，无穷级数，多元函数微积分等.

完成本书全部内容的教学大约需要 60 学时. 对于课时在 40 学时左右的教学情况也可以使用本书，只要适当选取本书前 5 章的主干内容安排教学即可. 在实际教学和编写本书的过程中充分考虑了各种专业的不同使用情况，因此本书具有较强的教学适应性.

本书可以作为高等学校各类专业的学生学习“高等数学”课程的教材或教学参考书. 本书也是自学者学习高等数学知识的一本好书.

在使用本书的学习过程中，建议大家这样做：老师在讲述完每节课的基本内容后请你在 24 小时之内仔细阅读一遍，然后在一周内再看一遍（第一遍费时较多，以后耗时很少），这时便可以做与学习内容相关的习题，并及时与习题解答核对. 待某章讲授完之后尽量在较短时间内把本章内容再通读一遍，以便更好地巩固和熟练本章知识. 期末复习时全书再通读一遍，这样你就掌握了本书的基本内容，当然也能通过考试. 学习知识没有通用的法则，每一个人都有自己的学习习惯和方法，希望大家一并和老师交流，祝同学们学习进步.

由于编者的水平有限，书中难免会有不妥、错误之处，恳请专家、广大读者批评指教.

武京君（wujingj123456@163. com）
2014 年 3 月于济南长清大学城

目　　录

第一章

函数的极限和连续

高等数学是研究变量及其关系的一门科学. 极限方法是高等数学的基础，它表现出高等数学不同于初等数学的本质特点. 本章内容是中学数学知识的继续和加深，将介绍函数及其极限的基本知识，为后续内容做好准备. 本章知识要点：复合函数和初等函数的概念，函数极限的运算，无穷小和无穷大的概念与运算，函数连续的概念.

§1.1 函　　数

一、函数的定义与性质

1. 常量和变量

我们观察和研究某一变化过程时，常常会遇到两种不同的量：一种量在变化过程中保持同一数值而不发生变化，这样的量称为**常量**，常用字母 a，b，c 等表示. 另一种量则在某变化过程中不断发生变化，这种量称为**变量**，常用字母 x，y，z，t 等表示.

例如，一架民航客机在飞行过程中，机内乘客人数 n 是一个常量，而飞机的高度 h 和速度 v 在飞行过程中都是不断发生变化的变量.

2. 集合和映射

集合是数学中的一个基本概念. 例如，一个教室里的所有学生就构成一个集合，全体自然数也构成一个集合，等等.

定义 1.1　所谓**集合**是指具有某种特定性质的事物所组成的总体. 组成这个集合的每一事物称为该集合的**元素**. 若 a 是集合 M 中的元素，记为 $a\in M$，读作 a 属于 M；若 a 不是集合 M 中的元素，记作 $a\notin M$，读作 a 不属于 M.

由有限个元素组成的集合称为**有限集**，例如，集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；由无穷多个元素组成的集合称为**无限集**. 比如，集合 $N=\{x|x$ 是自然数$\}$，则 N 是一个无限集；又如集合 $B=\{x|x$ 所具有的特征 $P\}$，任何具有这个特征 P 的事物 a 都是集合 B 的元素. 反之，不是这个集合 B 的元素都不具有这个特征.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，**数集**是表示变量取值范围的一种常用方法. 本书中所讨论的变量总假定是在实数范围内变化.

常用的数集除了自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R** 外，还有各种类型的区间. 假设 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，则各种类型的区间如下：

开区间：$(a, b)=\{x\in\mathbf{R}|a<x<b\}$；

闭区间：$[a, b]=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开区间：$[a, b)=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x<b\}$，$(a, b]=\{x\in\mathbf{R}|a<x\leqslant b\}$；

无穷区间：$(a, +\infty)=\{x\in\mathbf{R}|a<x\}$，$[a, +\infty)=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\}$，

$(-\infty, b)=\{x\in\mathbf{R}|x<b\}$，$(-\infty, b]=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant b\}$，$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$.

此外，为了讨论函数在一点附近的某些形态，需要引入点的邻域概念.

定义 1.2 假设 a，$\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集 $\{x: x\in\mathbf{R}$ 且 $|x-a|<\delta\}$，即数轴上与 a 点的距离小于 δ 点的全体，称为以点 a 为中心的 δ **邻域**，记作 $N(a, \delta)$. 如图 1—1 所示.

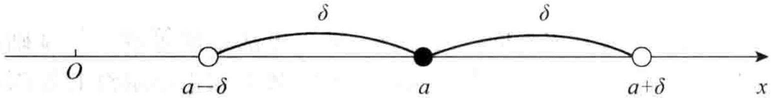


图 1—1

显然，$N(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)$.

类似的，还有点的去心邻域，即数集 $\{x: x\in R$ 且 $0<|x-a|<\delta\}$，称为以点 a 为中心、半径为 δ 的**去心邻域**，记为 $N(\mathring{a}, \delta)=\{x: x\in R, x\neq a$ 且 $|x-a|<\delta\}$.

定义 1.3 假设 X，Y 为非空集合，如果存在从集合 X 到 Y 的一个对应关系 f：$\forall x\in X$，在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与 x 相对应，记为 $y=f(x)$，则 f 称为 X 到 Y 的一个**映射**，记作 $f: X\to Y$. 其中 $\forall$ 表示任意，X 称为映射 f 的**定义域**，映射 f 又称为**对应法则**. 显然，集合 $D_f=\{y|y=f(x): \forall x\in X\}\subseteq Y$，这里 D_f 称为映射 f **的值域**.

例 1 设集合 $X=\{x|x$ 是甲班的同学$\}$，$Y=\mathbf{N}$，则甲班某同学的年龄 f 就是从集合 X 到 Y 的一个映射，对于 $\forall x\in X$，Y 中都有唯一的元素 $y\in Y$ 与 x 相对应.

3. 函数的概念

先看几个例子.

例 2 一个圆柱形容器，底面半径为 a，高为 h，其内所盛溶液的体积 V 随着溶液高度 x 的变化规律为

$$V=\pi a^2 x\ (0\leqslant x\leqslant h).$$

例 3 某大型商场某年每一个月的销售利润（单位：万元）与顾客人数（单位：万人）的统计情况如下表所示. 由下表可以看出，第 i ($i=1, 2, \cdots, 12$) 个月的销售利润 L_i 与顾客人数 N_i 之间的关系就是一种函数关系. 显然，它很难用一个函数式表达.

顾客人数 N_i(万人)	40	30	26	25	35	28	24	23	27	39	31	37
销售利润 L_i(万元)	200	140	120	95	180	130	98	90	110	195	159	190

例 4 某心电图仪记录某病号的心率 f 和时间 t 之间的关系曲线如图 1—2 所示. 它表示了心率 f 随时间 t 变化而变化的函数关系.

例 5 表达式 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 表明 y 是 x 的函数（分段函数），如图 1—3 所示.

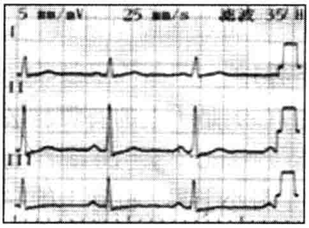


图 1—2

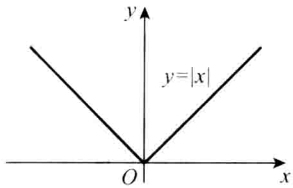


图 1—3

上面几个例子，虽然实际意义各不相同，变量之间的对应关系是用不同方式来表达的；但是，它们都表达了两个变量之间的相依关系. 这种相依关系给出了一种对应法则，依据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量之间的这种对应关系，称为函数关系，它是函数概念的本质.

定义 1.4 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 x 的取值范围为数集 D，如果对于每一个 $x\in D$，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的值与 x 对应，则对应法则 f 称为 x 到 y 的**函数**，记作 $y=f(x)$. D 称为函数 f 的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

全体函数值的集合 $D_f=f(D)=\{y|y=f(x): \forall x\in D\}$称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中，表示对应关系的记号 f 也可用其他字母来表示，例如“φ”，“F”，…. 这时函数就可记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$，….

在实际问题中，函数的定义域通常根据问题的实际意义来确定. 例如，例 2 中的定义域为 $D=[0, h]$；例 3 中，定义域 $D=[0,N]$；例 4 中，定义域 $D=[0, +\infty)$.

数学中有时并不考虑函数的实际意义，而研究抽象的用算式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是自变量所取的而使算式有意义的一切实数.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是 $[-1, 1]$，而函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是 $(-1, 1)$.

当自变量在函数的定义域内任取一值时，对应的函数值也只有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则就叫做**多值函数**. 上述例子都是单值函数. 特别地，本书研究的函数都是单值函数.

假设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于 $\forall x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样以 x 为横坐标，以 y 为纵坐标在 xOy 平面上可确定一点 $P(x, y)$. 当 x 取遍 D 上的每一值时，可得点 $P(x, y)$ 的一个集合 $C=\{(x, y)|y=f(x), x\in D\}$；此集合 C 称为 $y=f(x)$ 的图像.

函数的表示方法通常有三种：

(1)解析法（公式法）：用一个公式（表达式）表示变量之间的函数关系，如例 2.

(2)列表法：用一张表格表示变量之间的函数关系，如例 3.

(3)图像法：就是借助坐标系用图形表示变量之间的函数关系，如例 4.

4. 函数的几个特性

(1) **有界性** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subseteq D$. 如果存在常数 K，使得

$$f(x)\leqslant K(\text{或 } f(x)\geqslant K)$$

对于$\forall x\in I$都成立，则称函数$f(x)$在I上有**上界**（或**下界**）.

若函数$f(x)$在I上既有上界，又有下界，则称函数$f(x)$是I上的**有界函数**.

例如，对于$\forall x\in R$，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，则$y=\sin x$，$y=\cos x$在实数域上是有界函数；显然，常数1是$\sin x$和$\cos x$的一个上界，它是最小上界，也称**上确界**.

容易证明：函数$f(x)$在X上有界的充要条件是$f(x)$在X上既有上界，又有下界.

(2) **奇偶性**　设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，即若$\forall x\in D$，则有$-x\in D$.

若对于$\forall x\in D$，$f(-x)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**偶函数**.

若对于$\forall x\in D$，$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**奇函数**.

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$都是奇函数；而$y=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数.

注　偶函数的图像关于y轴对称，而奇函数的图像关于原点对称.

(3) **单调性**　设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subseteq D$. 若对于$\forall x_1, x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在区间I上**单调增加**（**减少**）. 单调增加或减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数$y=x^2$在$[0, +\infty)$上单调增加，在$(-\infty, 0]$上单调减少；但是在$(-\infty, +\infty)$内函数$y=x^2$就不是单调函数了.

(4) **周期性**　设函数$f(x)$的定义域为D，若存在一个不为零的数l，使得对于$\forall x\in D$有$(x+l)\in D$，且$f(x+l)=f(x)$恒成立，则$f(x)$称为**周期函数**，l称为$f(x)$的**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指其**最小正周期**.

例如，函数$\sin x$，$\cos x$的周期都是2π，而函数$\tan x$的周期是π，函数$\sin\omega x$的周期是$\dfrac{2\pi}{|\omega|}(\omega\neq 0, x\in(-\infty, +\infty))$.

二、初等函数

1. 反函数

在研究两个变量的函数关系时，可根据问题的需要选定其中一个为自变量，另一个就是因变量. 如函数$y=2x+3$中，x是自变量，y是因变量. 如果从这个函数式中解出x，即

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2},$$

则称它为函数$y=2x+3$的反函数. 显然，$y=2x+3$也是$x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{2}$的反函数.

一般地说，有如下定义：

定义 1.5　设函数$y=f(x)$的定义域是D，值域为$f(D)$，若对于$\forall y\in f(D)$，通过关系式$y=f(x)$都能唯一确定D中的一个x值，这样便可得到定义在$f(D)$上并以y为自变量，x为因变量的函数$x=\varphi(y)$，称它是函数$y=f(x)$的**反函数**，记作$x=f^{-1}(y)$. $y=f(x)$称为**直接函数**. 事实上$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$**互为反函数**.

例如，$y=\sin x$，$y=a^x$的反函数分别是$x=\arcsin y$和$x=\log_a y$.

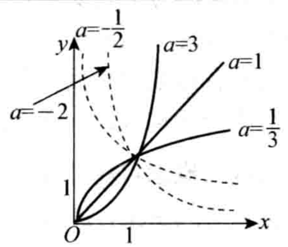
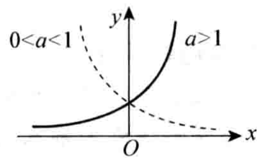
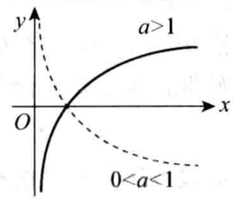
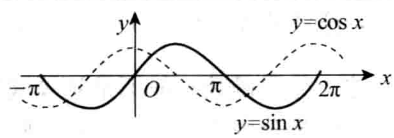
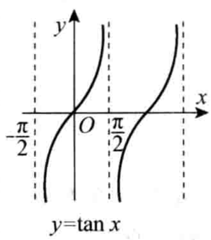
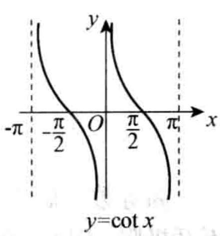
一般地，严格单调函数都有反函数，例如 $y=x^3$ 的反函数为 $x=\sqrt[3]{y}$；$y=x^3$ 和 $x=\sqrt[3]{y}$ 互为反函数且都是单调函数．而 $y=x^2$ 在其定义域内不是单调函数，也就没有反函数．

2．复合函数

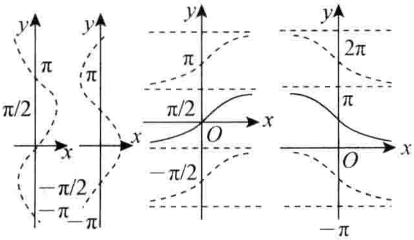
在实际问题中，经常会遇到两个变量之间不是直接相联系，而是通过一个中间变量联系起来的情况．

例如，有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知识可知，动能 E 是速度 v 的函数 $E=(mv^2)/2$，速度 v 在不计空气阻力的情况下是 $v=v_0-\mathrm{g}t$，g 是重力加速度，因此，E 通过 v 成为 t 的函数 $E=\frac{1}{2}m(v_0-\mathrm{g}t)^2$，它由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-\mathrm{g}t$ 复合而成．如表 1—1 所示．

表 1—1

类别及解析式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^a$	$a>0$ a 次抛物线	因 a 而异， 但$[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 a 而异， 但$[0,+\infty)$ 是公共值域	（在第一象限内）
	$a<0$ 令 $a=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$ m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$ 余弦函数 $y=\cos x$ 正切函数 $y=\tan x$ 余切函数 $y=\cot x$		$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	

续前表

类别及解析式	定义域	值　域	图形
反三角函数			
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	

定义 1.6 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域（或其一部分）上取值时，对应的 u 使 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 与 x 建立了函数关系，即 $y=f(u)=f(\varphi(x))$，并把它称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 称为中间变量，$y=f(u)$ 称为**外层函数**，$u=\varphi(x)$ 称为**内层函数**.

例如，函数 $y=\arcsin(x^2)$ 可以看作由 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数.

形成复合函数的中间变量可以有两个或更多个. 例如，由 $y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+5$ 经过两次复合所构成的 x 的复合函数为 $y=\lg\tan(x^2+5)$.

利用这一概念，有时可把函数分解为几个独立的函数. 例如，$y=e^{\sqrt{1+x^2}}$ 可以看成由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$ 三个函数复合而成的.

注 复合函数定义中 $u=\varphi(x)$ 的值域不能超出 $y=f(u)$ 的定义域 U，这是极其重要的.

3. 基本初等函数

在中学数学中已详细研究过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这六类函数统称为**基本初等函数**. 现在就将它们综述在表 1—1 中.

4. 初等函数

通常情况下，把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成并能用一个解析式所表达的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\ln(\sin x+4)$，$y=e^{2x}\sin(3x+1)$，$y=\sqrt[3]{\sin x}$，…，都是初等函数.

初等函数虽然是常见的最重要的函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到. 例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\dfrac{|x|}{x}$，取整函数 $y=[x]$ 等分段函数都是非初等函数.

注 分段函数一般不是初等函数，但是，函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 却是初等函数.

在微积分中常把初等函数分解为基本初等函数，学会分析初等函数的结构十分重要.

§ 1.2　极　　限

高等数学研究的主要对象是函数，而研究方法是极限. 高等数学中几乎所有概念都离不开极限，因此，极限是高等数学中最基本的一个概念，极限方法也是研究函数、解决许多

实际问题的基本思想方法和主要工具.

一、数列的极限

极限概念最早产生于求某些实际问题的精确解. 例如，我国古代（公元3世纪）数学家刘徽利用圆内接正多边形推算圆面积的方法（割圆术）就是极限思想在几何上的典型应用. 计算方法如下（如图1—4所示）.

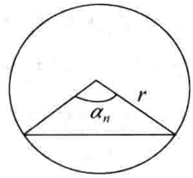


图1—4

设圆的半径为 r，则内接正 n 边形的面积 A_n 和周长 L_n 分别为

$$A_n=\frac{1}{2}nr^2\sin\alpha_n,\ L_n=2nr\sin\frac{1}{2}\alpha_n\left(\alpha_n=\frac{2\pi}{n}\right),$$

其中 α_n 是圆内接正 n 边形的任一边所对的圆心角. 当 $n\to\infty$ 时，则内接正 n 边形的边数无限增加，内接正 n 边形就无限地接近于圆，即 L_n 无限接近于圆的周长. 同时内接正 n 边形的面积 A_n 也无限接近于某一确定的数，这个数就是圆的面积. 数学上称它为 A_1，A_2，…，A_n，…当 $n\to\infty$ 时的极限，也正是这个数列的极限值才精确表达了圆的面积.

前人在解决实际问题的过程中逐渐形成的这种极限方法，已经成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明. 首先，说明数列的概念.

定义1.7　若按照某一法则，有第一个数 x_1，第二个数 x_2，…，这样依自然数的次序排列的一组数，使得对于任一自然数 n 都有一个确定的数 x_n 与 n 对应，则这一列有次序的数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{x_n\}$，在不引起混淆的情况下也可以记为 x_n. 数列中的每一个数叫做数列的**项**，第 n 项 x_n 叫做数列的**通项**（或**一般项**）.

下面通过几个例子说明数列的一般情况.

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，上述数列的通项 $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\to 0$.

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，上述数列的通项 $x_n=\frac{n+1}{n}\to 1$.

$$2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，上述数列的通项 $x_n=2^n\to+\infty$.

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \cdots,\ 0.33\cdots3,\ \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，上述数列的通项 $x_n=0.33\cdots3\to\frac{1}{3}$.

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，上述数列的通项 $x_n=(-1)^{n+1}$ 在 1 和 -1 之间来回跳动.

一般地，若数列 $\{x_n\}$ 当 n 无限增大时，x_n 的取值能无限接近于常数 a，就称 a 是数列 x_n 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

下面给出数列极限的精确定义.

定义 1.8 若数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系：对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a$. 如图 1—5 所示.

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就说数列 $\{x_n\}$ 发散.

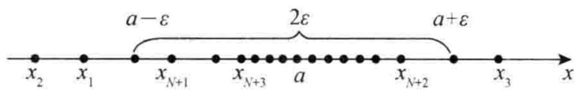


图 1—5

例 6 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

证明 对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，则 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，那么当 $n>N$ 时，有 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，于是 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$，这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

可以证明不同于 1 的其他数都不是 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 的极限，因此有如下定理 1.1.

定理 1.1 收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

证明 (用反证法) 设数列 $\{x_n\}$ 存在两个相异的极限 a，b，不妨设 $a<b$；因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故对于正数 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

同理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则对 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$，$\exists N_2\in\mathbf{N}$，当 $n>N_2$ 时，恒有 $|x_n-b|<\varepsilon$ 成立.

现在取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 和 $|x_n-b|<\varepsilon$ 同时成立，于是

$$|a-b|=|(a-x_n)-(b-x_n)|\leqslant|x_n-a|+|x_n-b|<2\varepsilon=|a-b|$$

矛盾. 因此假设不成立，即收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

定理 1.2 收敛数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证明 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义可知：若取 $\varepsilon=1$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<1$. 即当 $n>N$ 时，$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$；这说明 $1+|a|$ 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n>N$ 时的一个上界. 显然 $\{x_n\}$ 的前 N 项都有限. 因此，若取 $K=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|, 1+|a|\}$，则对于 $\forall n\in N$，恒有 $|x_n|\leqslant K$，故数列 $\{x_n\}$ 有界.

定理 1.2 的逆命题不成立，即有界数列未必收敛. 例如 $\{(-1)^n\}$ 有界，但无极限.

二、函数的极限

1. 函数当 $x\to\infty$ 时的极限

对于数列 $\{x_n\}$，也可以这样理解：对于 $\forall n\in\mathbf{N}$(自然数集)，则有唯一的 $x_n\in\{x_n\}$，使得 x_n 与 n 相对应，即 $x_n=f(n)$；因此，数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 又可以写成 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$，若把其中的 n 换成 x，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，这就是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限.