



· 高等学校辅导教材 ·

高等数学辅导

同济·第七版
(上下合订本)

编著 北京大学 李正元

- 讲解基本内容
- 解惑易错易混淆点
- 提炼典型题型
- 诠释重难点
- 归纳重要结论
- 总结解题方法与技巧



中国政法大学出版社



大学数学辅导丛书

高等数学辅导

同济·第七版

(上下合订本)

编著 北京大学 李正元



中国政法大学出版社

- 声 明
1. 版权所有, 侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题, 由出版社负责退换。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/李正元编著. —北京:中国政法大学出版社, 2014. 8
ISBN 978-7-5620-5610-2

I. ①高… II. ①李… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 205807 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地 址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址	http://www.cuplpress.com (网络实名:中国政法大学出版社)
电 话	010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印	北京旺都印务有限公司
开 本	787mm × 960mm 1/16
印 张	38.75
字 数	890 千字
版 次	2014 年 8 月第 1 版
印 次	2014 年 8 月第 1 次印刷
定 价	36.00 元



前 言

高等数学课程对于大学生来说，其重要性是不言而喻的，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。然而，一方面，近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面，后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接，为此作者根据在北京大学多年的教学实践以及硕士研究生入学考试高等数学辅导的经验，听取了广大学员的意见，以同济·第七版为蓝本，参考了北京大学、清华大学、复旦大学、上海交通大学、武汉大学、华中科技大学、浙江大学、四川大学、西安交通大学、哈尔滨工业大学、大连理工大学、东北大学、湖南大学、重庆大学、华南理工大学等高等院校的现行教材，认真编写了这本《高等数学辅导》。

本书每章设有**基本内容诠释与重要结论归纳**、**典型题型归纳及解题方法与技巧**。本书以讲清讲透**基本概念**为主线，希望能帮助同学们把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式；并通过选编的**典型例题**，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出同学们解题中常犯的错误，或是介绍高等数学中常用解题思路与技巧，并且许多题目给出

了多种解法，通过这些希望同学们能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通，提高分析解决问题的能力。

要写好一本教材实非易事，疏漏错误在所难免，欢迎全国同行批评指正！

李正元

于北大燕北园

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
一、基本内容诠释与重要结论归纳	1
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	3
第二节 数列的极限	7
一、基本内容诠释与重要结论归纳	7
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	9
第三节 函数的极限	11
一、基本内容诠释与重要结论归纳	11
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	12
第四节 无穷小与无穷大	14
一、基本内容诠释与重要结论归纳	14
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	15
第五节 极限运算法则	18
一、基本内容诠释与重要结论归纳	18
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	19
第六节 极限存在问题 两个重要极限	25
一、基本内容诠释与重要结论归纳	25
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	26
第七节 无穷小的比较	37
一、基本内容诠释与重要结论归纳	37
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	37
第八节 函数的连续性与间断点	41
一、基本内容诠释与重要结论归纳	41
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	42
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	45
一、基本内容诠释与重要结论归纳	45
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	46
第十节 闭区间上连续函数的性质	53
一、基本内容诠释与重要结论归纳	53

二、典型题型归纳及解题方法与技巧	53
第二章 导数与微分	61
第一节 导数概念	61
一、基本内容诠释与重要结论归纳	61
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	62
第二节 函数的求导法则	69
一、基本内容诠释与重要结论归纳	69
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	71
第三节 高阶导数	83
一、基本内容诠释与重要结论归纳	83
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	84
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 导数的简单应用	91
一、基本内容诠释与重要结论归纳	91
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	93
第五节 函数的微分	99
一、基本内容诠释与重要结论归纳	99
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	101
第三章 微分中值定理与导数的应用	107
第一节 微分中值定理	107
一、基本内容诠释与重要结论归纳	107
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	110
第二节 洛必达法则	114
一、基本内容诠释与重要结论归纳	114
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	117
第三节 泰勒公式	126
一、基本内容诠释与重要结论归纳	126
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	129
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	136
一、基本内容诠释与重要结论归纳	136
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	137
第五节 函数的极值最大值与最小值问题	150
一、基本内容诠释与重要结论归纳	150
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	151

第六节 函数的凹凸性与拐点	156
一、基本内容诠释与重要结论归纳	156
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	158
第七节 函数图形的描绘	162
一、基本内容诠释与重要结论归纳	162
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	163
第八节 曲率	169
一、基本内容诠释与重要结论归纳	169
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	169
 第四章 不定积分	 171
第一节 不定积分的概念与性质	171
一、基本内容诠释与重要结论归纳	171
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	173
第二节 换元积分法	180
一、基本内容诠释与重要结论归纳	180
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	181
第三节 分部积分法	190
一、基本内容诠释与重要结论归纳	190
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	190
第四节 几种类型函数的积分	196
一、基本内容诠释与重要结论归纳	196
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	198
 第五章 定积分	 206
第一节 定积分的概念与性质	206
一、基本内容诠释与重要结论归纳	206
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	208
第二节 微积分基本公式	215
一、基本内容诠释与重要结论归纳	215
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	216
第三节 定积分的换元法和分部积分法	229
一、基本内容诠释与重要结论归纳	229
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	231
第四节 反常积分	242

一、基本内容诠释与重要结论归纳	242
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	245
第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数	252
一、基本内容诠释与重要结论归纳	252
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	254
第六章 定积分的应用	258
第一节 定积分的元素法	258
一、基本内容诠释与重要结论归纳	258
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	258
第二节 定积分在几何学上的应用	259
一、基本内容诠释与重要结论归纳	259
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	262
第三节 定积分在物理上的应用	267
一、基本内容诠释与重要结论归纳	267
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	268
第七章 微分方程	272
第一节 微分方程的基本概念	272
一、基本内容诠释与重要结论归纳	272
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	273
第二节 可分离变量的微分方程	274
一、基本内容诠释与重要结论归纳	274
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	274
第三节 齐次方程	276
一、基本内容诠释与重要结论归纳	276
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	276
第四节 一阶线性微分方程与微分方程的应用	278
一、基本内容诠释与重要结论归纳	278
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	280
第五节 可降阶的高阶微分方程与微分方程的应用	288
一、基本内容诠释与重要结论归纳	288
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	290
第六节 高阶线性微分方程	300
一、基本内容诠释与重要结论归纳	300

二、典型题型归纳及解题方法与技巧	302
第七节 常系数齐次线性微分方程	304
一、基本内容诠释与重要结论归纳	304
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	305
第八节 常系数非齐次线性微分方程与微分方程的应用	306
一、基本内容诠释与重要结论归纳	306
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	308
第九节 欧拉方程	315
一、基本内容诠释与重要结论归纳	315
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	315
第十节 微分方程的幂级数解法	316
一、基本内容诠释与重要结论归纳	316
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	316
第十一节 全微分方程与积分因子	318
一、基本内容诠释与重要结论归纳	318
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	320
 第八章 向量代数与空间解析几何	 322
第一节 向量及其线性运算	322
一、基本内容诠释与重要结论归纳	322
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	325
第二节 数量积 向量积 混合积	327
一、基本内容诠释与重要结论归纳	327
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	329
第三节 平面及其方程	334
一、基本内容诠释与重要结论归纳	334
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	335
第四节 空间曲线及其方程	336
一、基本内容诠释与重要结论归纳	336
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	337
第五节 曲面及其方程	339
一、基本内容诠释与重要结论归纳	339
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	340
第六节 空间曲线及其方程	342
一、基本内容诠释与重要结论归纳	342

二、典型题型归纳及解题方法与技巧	345
第七节 二次曲面	350
一、基本内容诠释与重要结论归纳	350
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	352
第九章 多元函数微分法及其应用	354
第一节 多元函数的基本概念	354
一、基本内容诠释与重要结论归纳	354
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	357
第二节 偏导数	361
一、基本内容诠释与重要结论归纳	361
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	363
第三节 全微分	370
一、基本内容诠释与重要结论归纳	370
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	371
第四节 多元复合函数的求导法则	377
一、基本内容诠释与重要结论归纳	377
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	380
第五节 隐函数的求导公式	389
一、基本内容诠释与重要结论归纳	389
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	393
第六节 多元函数微分学的几何应用	399
一、基本内容诠释与重要结论归纳	399
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	401
第七节 方向导数与梯度	405
一、基本内容诠释与重要结论归纳	405
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	408
第八节 多元函数的极值及其求法	414
一、基本内容诠释与重要结论归纳	414
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	417
第九节 二元函数的泰勒公式	427
一、基本内容诠释与重要结论归纳	427
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	427
第十节 最小二乘法	430
一、基本内容诠释与重要结论归纳	430

二、典型题型归纳及解题方法与技巧	430
第十章 重积分	432
第一节 二重积分的概念与性质	432
一、基本内容诠释与重要结论归纳	432
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	434
第二节 二重积分的计算法	438
一、基本内容诠释与重要结论归纳	438
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	442
第三节 三重积分	459
一、基本内容诠释与重要结论归纳	459
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	464
第四节 重积分的应用	473
一、基本内容诠释与重要结论归纳	473
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	475
第五节 含参变量的积分	481
一、基本内容诠释与重要结论归纳	481
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	482
第十一章 曲线积分与曲面积分	487
第一节 对弧长的曲线积分	487
一、基本内容诠释与重要结论归纳	487
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	489
第二节 对坐标的曲线积分	492
一、基本内容诠释与重要结论归纳	492
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	495
第三节 格林公式及其应用	499
一、基本内容诠释与重要结论归纳	499
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	503
第四节 对面积的曲面积分	513
一、基本内容诠释与重要结论归纳	513
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	515
第五节 对坐标的曲面积分	521
一、基本内容诠释与重要结论归纳	521
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	523

第六节 高斯公式 通量与散度	530
一、基本内容诠释与重要结论归纳	530
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	533
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	538
一、基本内容诠释与重要结论归纳	538
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	541
第十二章 无穷级数	549
第一节 常数项级数的概念和性质	549
一、基本内容诠释与重要结论归纳	549
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	550
第二节 常数项级数的审敛法	554
一、基本内容诠释与重要结论归纳	554
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	557
第三节 幂级数	571
一、基本内容诠释与重要结论归纳	571
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	574
第四节 函数展开成幂级数	579
一、基本内容诠释与重要结论归纳	579
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	581
第五节 函数的幂级数展开式的应用	587
一、基本内容诠释与重要结论归纳	587
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	588
第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	590
一、基本内容诠释与重要结论归纳	590
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	592
第七节 傅里叶级数	596
一、基本内容诠释与重要结论归纳	596
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	598
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	602
一、基本内容诠释与重要结论归纳	602
二、典型题型归纳及解题方法与技巧	604

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 函数概念

(1) 函数的定义 设在某一过程中有两个变量 x 与 y , 若对变量 x 在其变化域 X 中的每一个值, 依照某一对对应关系, 变量 y 都有唯一确定的一个值与之对应, 我们就称变量 y 是变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时 x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量 x 的变化域 X 称为函数的定义域, 记为 $D(f)$, 而相应的因变量 y 的变化域 Y 称为函数的值域, 记为 $R(f)$.

(2) Y 是函数的值域的充要条件 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X , 则 Y 是 $f(x)$ 的值域的充要条件是: $\forall x \in X$, 有 $f(x) \in Y$, 且 $\forall y \in Y$, 至少 $\exists$ 一个 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$.

(3) 函数定义中的两个要素 定义域与对应规则是函数定义中的两个要素. 值域随定义域与对应规则而确定. 两个函数当且仅当定义域相同且对应规则相同时, 这两个函数才是相同的. 若函数有分析表达式, 使分析表达式有意义的自变量的取值范围就是函数的自然定义域. 在具体问题中, 自然定义域不一定就是定义域.

(4) 函数概念的实质 函数表示法 (如分析表示法, 图示法, 列表法等) 只是两个变量间函数关系的表现形式, 变量之间是否存在函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得其中一个量定了, 另一个量就被唯一确定, 它不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可以没有分析表达式, 即使有分析表达式, 在整个定义域上也不一定有统一的表达式. 如所谓分段函数, 在整个定义域上自变量的不同变化范围, 对应规则用不同的式子来表示.

(5) 常量与变量 自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量, 在另一过程中可以是变量. 一个量在某个过程中是自变量, 在另一个过程中可以是因变量, 这一点既简单又重要.

2. 几类常见的函数

(1) 有界函数 若 $\exists$ 常数 $M > 0$, $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 称 $f(x)$ 在 X 上有界, 也称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数.

几何意义是: $y = f(x)$ 的图形位于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

(2) 奇偶函数 设 X 关于原点对称 (若 $x \in X \Rightarrow -x \in X$), 若 $\forall x \in X$, 有

$$f(x) = f(-x) \quad (f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是偶 (奇) 函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(3) 单调函数 设 $f(x)$ 定义在区间 X 上, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加 (单调减少), 它们统称为单调函数. 单调增加 (单调减少) 也称为单调上升或单调递增 (单调下降或单调递减).

$\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减 (单调不减).

(4) 周期函数 设 $f(x)$ 定义在 X 上, 若 $\exists$ 常数 $T \neq 0$, 满足: $\forall x \in X$, 有 $x \pm T \in X$, 且 $f(x+T) = f(x)$ ($\forall x \in X$), 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 它的几何意义是: 自变量每增加或减少一个固定的距离 T 后图形重复出现.

周期函数一定有无多个周期, 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $\forall$ 自然数 n , $\pm nT$ 均是它的周期. 若无穷多个周期中, 有一个最小的正数, 则称它为最小周期, 简称为周期.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含函数 $u = \varphi(x)$ 的值域, 则在函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[\varphi(x)]$ ($x \in X$), 称为由 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量. 中间变量 u 在函数 $y = f(u)$ 中是自变量, 而在函数 $u = \varphi(x)$ 中是因变量.

4. 反函数

(1) 反函数的定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 Y . 若 $\forall y \in Y$, 有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 由此对应关系在 Y 上确定了一个函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

(2) 函数与其反函数的关系 设 $y = f(x)$, 定义域为 X , 值域为 Y . 若 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则它的定义域为 Y , 值域为 X , 且有

$$f[f^{-1}(y)] = y \quad (\forall y \in Y), \quad f^{-1}[f(x)] = x \quad (\forall x \in X).$$

$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(3) 反函数的存在性 $f(x)$ 在 X 上存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

单调函数一定存在反函数, 且反函数有相同的单调性.

5. 基本初等函数

常数函数 ($y = c$), 幂函数 ($y = x^a$), 指数函数 ($y = a^x$), 对数函数 ($y = \log_a x$),

三角函数 ($y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$), 反三角函数 ($y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccsc} x$) 称为基本初等函数.

要熟悉这些函数的函数关系, 定义域, 函数图形和一些性质 (包括有界性、奇偶性、单调性与周期性等).

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而得到的函数称为初等函数.

7. 双曲函数与反双曲函数

$$\text{双曲正弦 } y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$$

$$\text{双曲余弦 } y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$$

$$\text{双曲正切 } y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$$

它们的反函数分别是

$$\text{反双曲正弦 } y = \operatorname{ars} h x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$$

$$\text{反双曲余弦 } y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \in [1, +\infty)),$$

(双曲余弦的反函数是双值的, 它的反函数有两支: $y = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$), 取正值的一支作为该函数的主值.)

$$\text{反双曲正切 } y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in (-1, 1)).$$

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 函数的有界性, 奇偶性, 单调性与周期性

【例 1.1.1】 指出下列函数的定义域, 值域, 奇偶性, 周期性 (若是周期函数, 指出其周期即最小周期) 和有界性.

$$(1) \quad y = |x|; \quad (2) \quad y = \sqrt{x(4-x)};$$

$$(3) \quad y = \cos^2 x + 2; \quad (4) \quad y = |\sin x| + |\cos x|.$$

【解】 (1) $D(f) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, $R(f) = \{y | y \geq 0\}$, 偶函数, 非周期, 无界.

(2) $D(f) = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $R(f) = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 非奇非偶函数, 非周期的有界函数.

(3) $D(f) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, $R(f) = \{y | 2 \leq y \leq 3\}$, 偶函数, 周期函数 (周期 π), 有界.

(4) $D(f) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, $R(f) = \{y | 1 \leq y \leq \sqrt{2}\}$, 偶函数, 周期函数 (周期 $\frac{\pi}{2}$), 有界.

评注 若 $y = f(x)$ 的定义域 $D(f) = X$, 要证它的值域 $R(f) = Y$, 即证: $1^\circ \forall x \in X, f(x) \in Y$; $2^\circ \forall y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$.

对于题(1), (3) 易得到它们的值域.

对于题(4), 考察 $y^2 = 1 + 2|\sin x \cos x| = 1 + |\sin 2x|$, 由此得 y^2 的值域为 $[1, 2]$. 于是 y 的值域为 $[1, \sqrt{2}]$.

对于题(2), 可用配方法得 $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$, 由此可得相应的值域.

或者, $\forall x \in [0, 4] \Rightarrow y \geq 0$. 又对 $y \geq 0$, 考察方程

$$\sqrt{x(4-x)} = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2},$$

当 $y \geq 0$ 时, 仅当 $y \in [0, 2]$ 才有解 $x \in [0, 4]$. 因此求得值域为 $[0, 2]$.

【例 1.1.2】 设 $f(x) = x \sin x e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$, 则 $f(x)$ 是

(A) 有界函数.

(B) 单调函数.

(C) 周期函数.

(D) 偶函数.

【分析】 由 $\sin x, \cos x$ 分别是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数和偶函数, 于是 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(-x) = [-x \sin(-x)] e^{\cos(-x)} = (-1)^2 x \sin x e^{\cos x} = f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为偶函数. 故应选 (D).

评注 ① 我们也可用奇偶函数的运算性质: “两个奇函数之积是偶函数, 两个偶函数之积为偶函数, 任一函数 $g(u)$ 与偶函数 $u = h(x)$ 的复合 $g[h(x)]$ 也是偶函数” 等来证明该例中的 $f(x)$ 是偶函数.

② 要证 $f(x)$ 在定义域 X 上无界, 则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 的界, 也就是要证: 对于任意给定的 $M > 0$, 都存在点 $x_M \in X$, 使得 $|f(x_M)| > M$ 成立.

③ 若存在 $x_1, x_2, x_3 \in X$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 但 $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_3)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$) 同时成立, 则 $f(x)$ 在区间 X 上不是单调函数.

2. 证明函数的单调性, 有界性与周期性

【例 1.1.3】 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 如 $[3.7] = 3, [-4.35] = -5$, 称 $y = [x]$ 为取整函数. 求证: $f(x) = x - [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是有界周期函数.

【分析与证明】 可通过取整函数 $y = [x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x) = x - [x]$ 是怎样变化的:

当 $n \leq x < n+1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $n+1 \leq x+1 < n+2$, 按定义有

$$[x] = n, \quad [x+1] = n+1,$$

$$0 = n - n \leq f(x) = x - [x] < (n+1) - n = 1,$$

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = x+1 - (n+1)$$

$$= x - n = x - [x] = f(x).$$

因此 $f(x)$ 是有界的, 并且是以 1 为周期的周期函数.

【例 1.1.4】 求证: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加.

【证明】 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), x_2 > x_1$, 则有

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} - \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} \\ &= \frac{(e^{x_2} - e^{-x_2})(e^{x_1} + e^{-x_1}) - (e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_2} + e^{-x_2})}{(e^{x_2} + e^{-x_2})(e^{x_1} + e^{-x_1})} \\ &= \frac{2[e^{x_2-x_1} - e^{-(x_2-x_1)}]}{(e^{x_2} + e^{-x_2})(e^{x_1} + e^{-x_1})} > 0, \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加.

3. 利用函数概念求函数表达式

【例 1.1.5】 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且满足