普通高等院校非数学类研究生教育基础教材

Mathematics Statistics

数理统计

■ 凌能祥　李声闻　宁荣健　编

中国科学技术大学出版社

普通高等院校非数学类研究生教育基础教材

Mathematics Statistics

数理统计

凌能祥　李声闻　宁荣健　编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了工科研究生“数理统计”课程的基本内容，包括：预备知识、抽样分析、参数估计、假设检验、方差分析、正交实验设计、回归分析和多元统计分析初步等，同时还介绍了 SAS 及其在统计分析中的应用。本书各章末均配有适量习题，书末附有部分习题参考答案。

本书可作为工科各专业研究生的教学用书，也可作为具有一定数学基础的读者的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数理统计/凌能祥，李声闻，宁荣健编.—合肥：中国科学技术大学出版社，2014.9
ISBN 978-7-312-03590-[illegible]

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①凌…②李…③宁…　Ⅲ. 数理统计—研究生—教材
Ⅳ. O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196734 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥学苑印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　20.75
字数　407 千
版次　2014 年 9 月第 1 版
印次　2014 年 9 月第 1 次印刷
定价　36.00 元

前　　言

数理统计学是研究怎样用有效的方法去收集和使用具随机性影响的数据的科学。当今信息时代是充满数据的时代，数据是信息的载体，数理统计作为一门分析数据并从数据中寻找规律的学科，随着计算机的广泛使用，必然会发挥越来越重要的作用。本书的理论和方法为解决实际问题中的数据分析问题提供了有力的工具。

“数理统计”课程是工科院校硕士研究生重要的学位课程之一。本书根据全国工科院校硕士研究生“数理统计”课程教学的基本要求，在合肥工业大学数学学院的老师多年从事工科研究生“数理统计”课程教学的基础上编写而成。在编写过程中，针对工科院校研究生的数学基础和教学特点，在选材方面，突出数理统计的基本理论和方法；在文字叙述方面，尽量做到由浅入深、循序渐进、言简意赅、分析透彻；在应用方面，通过典型例子的分析及统计软件的使用，增强本课程的实用性。除预备的知识外，全书共分 8 章，内容包括：抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交试验设计、多元统计分析初步等，考虑到实际应用的需要，第 8 章还介绍了 SAS 及其在统计分析中的应用。本书各章末有适当习题，书末附有部分习题参考答案。

本书的编写由凌能祥、李声闻和宁荣健 3 位作者共同完成，具体分工如下：第 1 章、第 3 章和第 8 章由李声闻编写；预备知识和第 2 章由宁荣健编写，第 4 章至第 7 章由凌能祥编写。全书由凌能祥整理统稿。

本书的编写得到了合肥工业大学数学学院的大力支持，并得到了“合肥工业大学研究生精品教材建设项目”的资助，与此同时，中国科学技术大学出版社做了大量的服务工作，在此，编者致以衷心的感谢！另外，在编写本书的过程中，引用了国内外同行专家的相关书籍，均已列入参考文献中，谨向这些书籍的作者一并致以衷心的谢忱！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏或错误之处，敬请同行专家读者多提宝贵意见，以便今后进一步修改与完善！

编　者

2014 年 8 月于合肥工业大学

目　　录

预 备 知 识

0.1 随机事件及其概率

0.1.1 随机试验、样本空间、随机事件

1. 随机试验

对随机现象进行一次观察，观察的过程称为试验。如果该试验满足：

(1) 在相同条件下可重复进行(重复性)；

(2) 试验有多种可能结果事先已知(明确性)；

(3) 每次试验的具体结果在试验前无法预知(随机性)，

就称此试验为随机试验，简称为试验，记为 E。

2. 样本点

每一个试验结果称为一个**样本点**；试验的所有样本点的全体称为**样本空间**，记为 S。

3. 随机事件

在随机试验中可能发生也可能不发生，但其发生的可能性可以度量的事件称为**随机事件**。由此可知随机事件为样本点的集合，记为 A,B,C 等。

4. 必然事件和不可能事件

每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，即为全集 S；每次试验中都不可能发生的事件称为**不可能事件**，即为空集，记为$\varnothing$。

0.1.2 事件的关系与运算

1. 事件的关系

(1) 子事件(事件的包含)$A\subset B$：A 发生必然导致 B 发生；

(2) 相等事件 $A=B$：若 $A\subset B$，$B\subset A$，就称 A,B 相等(样本点完全相同)；

(3) 并事件 $A\cup B$：A,B 中至少发生一个；

(4) 交(积)事件 AB 或 $A\cap B$：A,B 都发生；

(5) 差事件 $A-B$：A 发生而 B 不发生；

(6) 互不相容(互斥)事件：$AB=\varnothing$，即 A,B 不可能同时发生；

(7) 对立事件：在每次试验中，A 不发生的事件记为 $\bar{A}$，即若 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，则有 $B=\bar{A}$。

2. 事件的运算

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

(4) 摩根律：$\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B},\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}$。

0.1.3 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0, P(S)=1, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC);$$

特别地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$；

(4) $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$，特别地，当 $B\subset A$ 时，$P(B)\leqslant P(A)$。

0.1.4 三种常见概型

1. 古典概型

(1) 特征：S 中样本点有限且每个样本点等可能发生；

(2) 公式：$P(A)=\dfrac{A\text{ 中所含样本点总数}}{S\text{ 中所含样本点总数}}$。

2. 几何概型

(1) 特征：S 中样本点无限且构成一个区域，每个样本点发生是等可能的；

(2) 公式：$P(A)=\dfrac{A\text{ 的几何测度}}{S\text{ 的几何测度}}$，其中测度为长度或面积。

3. 伯努利概型

在每次试验中，事件 A 发生的概率为 p，则在 n 次重复独立试验(或称 n 重伯

努利试验)中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$。

0.1.5 条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

设 $P(A)>0$,则在 A 发生的前提下 B 发生的概率为 $P(B|A)$,并有 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$。

2. 概率的乘法公式

(1) $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$;

(2) $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$,其中 $P(A_1A_2)>0$;

(3) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$。

0.1.6 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 全概率公式:如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容;且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$,就称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 S 的一个完备事件组,并有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

(2) 贝叶斯公式: $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_iB)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$。

0.1.7 事件的独立性

(1) 事件 A 与 B 独立:若 $P(AB)=P(A)P(B)$,就称 A 与 B 独立。

定理 0.1 下列 4 个命题是等价的:

① A 与 B 独立;

② A 与 $\bar{B}$ 独立;

③ $\bar{A}$ 与 B 独立;

④ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立。

(2) A,B,C 相互独立:若 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(AC)=P(A)P(C)$,$P(BC)=P(B)P(C)$,就称 A,B,C 两两独立;若 A,B,C 两两独立,且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,就称 A,B,C 相互独立。

0.2 一维随机变量及其分布

0.2.1 随机变量

(1) 随机变量:设随机试验 E 的样本空间 $S=\{\omega\}$,若对每一个 $\omega\in S$,均有一个唯一的实数 $X(\omega)$与之对立,则称 $X(\omega)$为一个**随机变量**,记为 $X=X(\omega)$;

(2) 设 L 为任意实数集合,则$\{X\in L\}$表示一个随机事件。

0.2.2 分布函数

(1) 分布函数:称 $F(x)=P\{X\leqslant x\}\ (-\infty<x<+\infty)$为随机变量 X 的**分布函数**;

(2) 分布函数的性质:① $0\leqslant F(x)\leqslant 1$;② $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;③ $F(x)$是处处单调不减的函数;④ $F(x)$是处处右连续的函数;

(3) 概率的计算:$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$。

0.2.3 离散型随机变量

(1) 离散型随机变量:若随机变量 X 的取值为有限或可列无穷个,就称 X 为**离散型随机变量**。

(2) 离散型随机变量的概率分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i\quad(i=1,2,\cdots)$$

或

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

或

$$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

(3) 分布律的性质:① $p_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots)$;② $\sum\limits_i p_i=1$。

(4) 概率的计算:设 L 为任意实数集合,则 $P\{X\in L\}=\sum\limits_{x_i\in L}p_i$。

0.2.4 连续型随机变量

1. 连续型随机变量

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若存在非负函数 $f(x)$，使得对任意实数 x 均有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，则称 X 为**连续型随机变量**，$f(x)$是 X 的概率密度函数。

结论：若 X 为连续型随机变量，则其分布函数 $F(x)$必为连续函数。

2. 概率密度的性质

(1) $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$；

(3) $F'(x)=f(x)$。

其中 x 为$f(x)$的连续点。

3. 概率的计算

(1) $P\{x=a\}=0\,[a\in(-\infty,+\infty)]$；

(2) $$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x。$$

0.2.5 常见分布

1. 常见的离散型分布

(1) 0-1 两点分布：$X\sim B(1,p)$：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，其中 $k=0,1$ 或 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$ $(0<p<1)$；

(2) 二项分布：$X\sim B(n,p)$：$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，其中 $k=0,1,\cdots,n$；X 表示在n 重独立重复试验中事件A 发生的次数，$P(A)=p$；

(3) 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，其中 $k=0,1,2,\cdots$；参数$\lambda>0$。

2. 常见的连续型分布

(1) 均匀分布：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x\geqslant b;\end{cases}$

(2) 指数分布：$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

(3) 正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$，

其中 $-\infty < x < +\infty$，$-\infty < \mu < +\infty$，$\sigma > 0$。

可见 $f(x)$ 的图像关于 $x=\mu$ 对称；$F(x)$ 为 x 的单调增函数。若 $\mu=0,\sigma=1$，即 $X\sim N(0,1)$，就称 X 服从标准正态分布，其密度函数和分布函数分别记为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 $\Phi(x)$ 的值可通过查标准正态分布表求得，并且有 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$。

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $(X-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$，从而有

$$P\{a < X \leqslant b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

0.2.6 随机变量函数的分布

1. 离散型随机变量函数的分布

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，则离散型随机变量函数 $Y=g(X)$ 也为离散型随机变量，其分布律为 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i(i=1,2,\cdots)$[需要对 $g(x_i)$ 进行合并]。

2. 连续型随机变量函数的分布

设随机变量 X 率密度为 $f_X(x)$，则连续型随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y\leqslant y\} = P\{g(X)\leqslant y\} = \int_{\{x:g(x)\leqslant y\}} f_X(x)dx$$

若 Y 为连续型随机变量，则其密度函数为 $f_Y(y)=F_Y'(y)$。

0.3 二维随机变量及其分布

0.3.1 二维随机变量的联合分布函数

1. 二维随机变量的分布函数

设 (X,Y) 为二维随机变量，对于任意的实数 x,y，称二元函数 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$ 为 (X,Y) 的分布函数。

2. 二维随机变量分布函数的性质

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=0$。

3. 边缘分布函数

(1) 称 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=F(x,+\infty)\ (-\infty<x<+\infty)$ 为关于 X 的**边缘分布函数**；

(2) 称 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=F(+\infty,y)\ (-\infty<y<+\infty)$ 为关于 Y 的**边缘分布函数**。

0.3.2　二维离散型随机变量

(1) 二维离散型随机变量：若二维随机变量(X,Y)的取值为有限或可列无穷个，就称(X,Y)为**二维离散型随机变量**；

(2) 二维离散型随机变量的联合分布律：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$；

(3) 二维离散型随机变量的联合分布律的性质：① $p_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$；② $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$；③ 设 D 是 xOy 平面上任一区域，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$。

(4) 边缘分布律(见表 0.1)：

$$P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}\overset{\mathrm{d}}{=}p_{i\cdot}\quad(i=1,2,\cdots)$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\overset{\mathrm{d}}{=}p_{\cdot j}\quad(j=1,2,\cdots)$$

表 0.1　边缘分布表

$Y\backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

(5) 条件分布律：

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad(i=1,2,\cdots)$$

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad (j = 1,2,\cdots)$$

0.3.3 二维连续型随机变量

(1) 二维连续型随机变量：设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，若存在$f(x,y)\geqslant 0$，使得$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则称$(X,Y)$为**二维连续型随机变量**，$f(x,y)$为$(X,Y)$的概率密度，或$X$和$Y$的联合密度函数。

(2) 二维连续型随机变量概率密度的性质：

① $f(x,y)\geqslant 0$；② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；③ $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$。

(3) 设D是xOy平面上任一区域，则$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

(4) 边缘密度函数：① $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\ (-\infty<x<+\infty)$为关于$X$的边缘密度函数；② $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\ (-\infty<y<+\infty)$为关于$Y$的边缘密度函数。

(5) 条件密度函数：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad (-\infty<y<+\infty)$$

0.3.4 随机变量的独立性

(1) 定义：若对任意的x,y均有$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，就称X与Y**独立**。

(2) 独立的充要条件：若(X,Y)为二维离散型随机变量，则X与Y独立的充要条件为，对任意的i,j均有$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$；若$(X,Y)$为二维连续型随机变量，则$X$与$Y$独立的充要条件为，对任意的$x,y$均有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

(3) 关于随机变量独立性的两个结论：① 若X与Y独立，则对任意实数集合L_1,L_2有$P\{X\in L_1,Y\in L_2\}=P\{X\in L_1\}P\{Y\in L_2\}$；② 若$g_1(x),g_2(y)$是连续函数，$X$与$Y$相互独立，则$g_1(X)$与$g_2(Y)$也独立。

0.3.5 两个常见分布

(1) 平面区域D上的均匀分布：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他；}\end{cases}$

(2) 二维正态分布：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)\quad(\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

0.3.6 二维随机变量函数的分布

1. 二维离散型随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$，则二维离散型随机变量函数$Z=G(X,Y)$的分布律为$P\{Z=G(x_i,y_j)\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$［需要对$G(x_i,y_j)$进行合并］。

2. 二维连续型随机变量函数的分布

(1) 设二维随机变量(X,Y)概率密度为$f(x,y)$，则二维连续型随机变量函数$Z=G(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{G(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{G(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若Z为连续型随机变量，则其密度函数为$f_Z(z)=F_Z'(z)$，特别地：① $Z=X+Y$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$；② 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，$X_i$的密度函数为$f_i(x)$，分布函数为$F_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$，$M=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，则

$$F_M(x)=F_1(x)F_2(x)\cdots F_n(x),\quad f_M(x)=F_M'(x)$$

$$F_N(x)=1-[1-F_1(x)][1-F_2(x)]\cdots[1-F_n(x)]$$

$$f_N(x)=F_N'(x)$$

当$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布时，有

$$f_i(x)=f(x),\quad F_i(x)=F(x)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$F_M(x)=[F(x)]^n,\quad f_M(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_N(x)=1-[1-F(x)]^n,\quad f_N(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$$

0.4 随机变量的数字特征

0.4.1 数学期望

1. 离散型随机变量的数学期望

(1) 设离散型随机变量 X 的分布律为$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$。若$\sum\limits_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称$\sum\limits_i x_i p_i$ 为X 的**数学期望**，记为$E(X)$，即$E(X)=\sum\limits_i x_i p_i$；若$\sum\limits_i g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]=\sum\limits_i g(x_i)p_i$，特别地有 $E(X^2)=\sum\limits_i {x_i}^2 p_i$。

(2) 设二维离散型随机变量(X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$。若$\sum\limits_i\sum\limits_j G(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则 $E[G(X,Y)]=\sum\limits_i\sum\limits_j G(x_i,y_j)p_{ij}$，特别地，$E(X)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i p_{ij}$，$E(Y)=\sum\limits_i\sum\limits_j y_j p_{ij}$，$E(XY)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i y_j p_{ij}$ 等。

2. 连续型随机变量的数学期望

(1) 设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 为 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$；若$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$，特别地，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x$。

(2) 设二维连续型随机变量(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则 $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，特别地，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

3. 数字期望的性质

(1) $E(C)=C$;

(2) $E(aX)=aE(X)$;

(3) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$;

(4) 若 X,Y 相互独立,则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

0.4.2 方差

1. 方差的定义

若 $E[X-E(X)]^2$ 存在,就称 $E[X-E(X)]^2$ 为随机变量 X 的**方差**,记为 $D(X)$,即有 $D(X)=E[X-E(X)]^2$,将 $\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的**标准差**。由此可得 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$。

2. 方差的性质

(1) $D(X)\geqslant 0$;

(2) $D(C)=0$,并且 $D(X)=0$ 的充要条件为 $P\{X=C\}=1$;

(3) $D(aX)=a^2D(X)$,$D(aX+b)=a^2D(X)$;

(4) 若 X,Y 相互独立,则有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$。

0.4.3 常见分布的期望与方差

(1) 两点分布:$E(X)=p$,$D(X)=p(1-p)$;

(2) 二项分布:$E(X)=np$,$D(X)=np(1-p)$;

(3) 泊松分布:$E(X)=D(X)=\lambda$;

(4) 均匀分布:$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$,$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

(5) 指数分布:$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$,$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$;

(6) 正态分布:$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$。

0.4.4 协方差

1. 协方差的定义

若 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在,就称 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 为随机变量 X 和 Y 的**协方差**,记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,即有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$。由此可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$。

2. 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$;