"十二五"普通高等教育本科规划教材

高等数学

（下册）

主 编 朱开永 王升瑞

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

“十二五”普通高等教育本科规划教材

高等数学

（下册）

主　编　朱开永　王升瑞
副主编　于海波　张　倩

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据高等工程教育的办学定位和工程技术型人才培养的目标，参考“高等院校高等数学教学大纲与基本要求”，结合笔者多年教学实践经验编写而成.

本书分为上、下两册，此为下册，内容包含了常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分. 每一节和每一章后的习题和自测题书中配有答案. 本书附有多媒体课件. 本书在编写过程中着重把握“以应用为主，够用为度”，注意强调学生基本分析问题和运算能力的培养，取材少而精，文字叙述通俗易懂，论述确切；条理清晰，循序渐进；重点突出、难点分散；例题较多，典型性强；深广度合适，非常便于教与学.

本书可作为高等院校(独立学院、民办高校、网络学院)理工科专业应用型人才培养的教材，也可以作为高等工程技术教育、成人教育的本科教材，以及自学者学习《高等数学》的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 朱开永，王升瑞主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5608-5458-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱…②王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 054001 号

“十二五”普通高等教育本科规划教材

高等数学(下册)

主编 朱开永 王升瑞 **副主编** 于海波 张 倩

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂

开　本 787 mm×960 mm 1/16

印　数 1—3 100

印　张 20

字　数 400 000

版　次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-5458-8

定　价 38.00 元

前　言

随着社会对高素质应用型人才大量需求，目前我国对高等工程技术教育日益强化，迫切需要我们编写与这种教学层次特征相适应的优秀教材，其中包含针对高等院校（尤其是独立学院、民办高校、应用技术学院、网络学院）的数学教材.

本书根据“高等数学”课程的教学大纲与基本要求，参考了兄弟院校的有关资料，结合编者多年的教学实践经验，在适度注意本课程自身的系统性与逻辑性的同时，着重把握“以应用为主，必须够用为度”的原则，侧重于学生完整、全面地掌握基本概念、基本方法，强调了培养和提高学生基本运算能力.本书取材精典，文字叙述通俗易懂，论述确切，对超出基本要求的内容一般不编入.对一些理论性较强的内容尽量做好背景的铺垫，并通过典型的例题，简洁细腻的解题方法来帮助学生掌握本课程的知识.

学习本课程需要具备一定的数学基础知识，包括集合论、初等函数、平面解析几何、一元函数微积分等.

本书由朱开永组织策划，制定编写计划和思路.第四、五章由张倩编写，第六章由于海波编写，第七章由朱开永编写，第八、九章由王升瑞编写.全书由王升瑞统稿、定稿及编写配套的多媒体课件.由同济大学刘浩荣对本书进行了全面的审核.本书的编者大都是在中国矿业大学徐海学院教学第一线工作多年，教学经验丰富的教师.在编写和审定教材时，紧扣指导思想和编写原则，准确地定位，注重构建教材的体系和特色，并严谨、细致地对内容的排序、例题和习题的选择深入探讨、斟字酌句，倾注了大量的心血，为本书的编写质量提供了重要的保障.

由于编者水平有限，书中难免有不足与疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2014 年 6 月

目　　录

前言

第四章　常微分方程 …… 1
§4.1　微分方程的基本概念 …… 1
§4.2　一阶微分方程 …… 7
§4.3　可降阶的二阶微分方程 …… 18
§4.4　二阶线性微分方程解的结构 …… 23
§4.5　二阶线性常系数齐次微分方程 …… 27
§4.6　二阶线性常系数非齐次微分方程 …… 32
自测题四 …… 41

第五章　无穷级数 …… 43
§5.1　常数项级数 …… 43
§5.2　常数项级数的判敛法 …… 51
§5.3　幂级数 …… 64
§5.4　函数展开成幂级数 …… 74
§5.5　傅立叶级数 …… 84
自测题五 …… 98

第六章　向量代数与空间解析几何 …… 100
§6.1　空间直角坐标系 …… 100
§6.2　向量代数 …… 104
§6.3　向量的数量积与向量积 …… 113
§6.4　平面及其方程 …… 121
§6.5　直线及其方程 …… 130
§6.6　几种常用的二次曲面与空间曲线 …… 139
自测题六 …… 147

第七章　多元函数微分学 ………………………… 149
§7.1　多元函数的基本概念 ………………………… 149
§7.2　偏导数 ………………………… 157
§7.3　全微分 ………………………… 163
§7.4　多元复合函数的求导法则 ………………………… 170
§7.5　隐函数求导法则 ………………………… 176
§7.6　方向导数与梯度 ………………………… 180
§7.7　多元函数微分学的几何应用 ………………………… 185
§7.8　多元函数的极值与最值 ………………………… 190
自测题七 ………………………… 200

第八章　重积分 ………………………… 202
§8.1　二重积分的概念和性质 ………………………… 202
§8.2　二重积分在直角坐标系中的计算方法 ………………………… 209
§8.3　二重积分在极坐标系中的计算方法 ………………………… 221
§8.4　三重积分的概念和计算方法 ………………………… 228
§8.5　重积分的应用 ………………………… 236
自测题八 ………………………… 245

第九章　曲线积分与曲面积分 ………………………… 247
§9.1　对弧长的曲线积分 ………………………… 247
§9.2　对坐标的曲线积分 ………………………… 255
§9.3　格林公式及其应用 ………………………… 264
§9.4　对面积的曲面积分 ………………………… 275
§9.5　对坐标的曲面积分 ………………………… 280
§9.6　高斯公式 ………………………… 290
自测题九 ………………………… 294

习题答案 ………………………… 296

第四章 常微分方程

微积分中所研究的函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种变化关系.但在大量的实际问题中,往往不能直接找出这种变化关系,但比较容易地建立这些变量与它们的导数(或微分)之间的关系式.这种联系着自变量、未知函数及其导数(或微分)的关系式,就是所谓的微分方程.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见的微分方程的求解方法.

§4.1 微分方程的基本概念

一、引例

例1 设一曲线通过点(1, 2),且曲线上任意点 $M(x, y)$ 处的切线斜率是该点横坐标的两倍,求这曲线的方程.

解 根据导数的几何意义,所求曲线 $y = y(x)$ 应满足等式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x. \tag{1}$$

因为曲线过点(1, 2),曲线 $y = y(x)$ 还应满足条件

$$x = 1 \text{ 时}, \quad y = 2. \tag{2}$$

对等式(1) 两边积分,得

$$y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C \quad (C\text{ 是任意常数}). \tag{3}$$

把条件(2) 代入上式,得

$$2 = 1^2 + C, \quad \text{即} \quad C = 1,$$

由此得所求曲线方程

$$y = x^2 + 1. \tag{4}$$

例2 设质量为 m 的物体,在时间 $t = 0$ 时自由下落,在空气中受到的阻力

与物体的下落速度成正比，求物体下落的距离与时间的关系.

解　建立坐标系如图 4-1 所示，设 $s=s(t)$ 为物体下落的距离，则物体下落的速度与加速度分别为

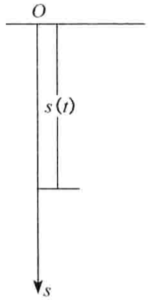

图 4-1

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad a(t)=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

由牛顿第二定律 $F=ma$，可以列出等式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

其中 $k>0$ 为比例常数，g 为重力加速度. 右端第二项的负号表示阻力与运动的方向相反.

由于选取物体的初始位置为坐标原点且物体为自由下落，故当 $t=0$ 时，有 $s(0)=0,\ v(0)=s'(0)=0$，于是问题归结为求等式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

满足条件

$$s(0)=0,\quad s'(0)=0 \tag{6}$$

的未知函数 $s(t)$ 的问题.

现在我们只考虑 $k=0$ 的情形，也就是说物体应在真空中下落，没有阻力，这时式(5) 成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g. \tag{7}$$

为了求出物体下落的距离，将上式积分两次，得到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1, \tag{8}$$

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{9}$$

其中，C_1，C_2 是两个任意常数.

将条件式(6) 代入式(8)、式(9)，可确定 C_1，C_2 分别为

$$C_1=0,\quad C_2=0.$$

于是，物体作自由落体运动的距离公式是

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{10}$$

二、微分方程的基本概念

定义 1　含有未知函数与未知函数的导数(或微分)以及自变量之间的关系的等式称为**微分方程**.

微分方程中出现的未知函数是一元函数,这个方程称为**常微分方程**. 如果未知函数是多元函数,则称为**偏微分方程**. 例 1、例 2 所建立的式(1)、(5)、(7)、(8) 都是常微分方程. 在这一章,我们只讨论常微分方程,简称为**微分方程**或**方程**.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为**微分方程的阶**. 例如,式(1)、式(8) 是一阶微分方程;式(5)、式(7) 是二阶微分方程. 又如,

$$y^{(5)} + (y')^7 - y = \sin 2x$$

是一个五阶微分方程.

一般,n 阶微分方程可以写成

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{11}$$

由例 1 及例 2 我们看到,在研究某些实际问题时,首先是建立微分方程,然后找出满足微分方程的函数(解微分方程). 也就是说,把某个函数代入微分方程使该方程成为恒等式,这个函数就是微分方程的解.

定义 2　如果将函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(11),方程(11) 是恒等式

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,$$

则称函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(11) 的**解**,且称 $y = \varphi(x)$ 的图形为**积分曲线**.

例如,函数(3) 和函数(4) 都是方程(1) 的解,函数(9) 和函数(10) 都是方程(7) 的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,称这样的解为**微分方程的通解**. 例如,函数(3) 是方程(1) 的通解,函数(9) 是方程(7) 的通解.

几何上,一阶微分方程的通解是以常数 C 为参数的曲线簇(其中每一条曲线都称为微分方程的积分曲线);二阶微分方程的通解是以常数 C_1 和 C_2 为参数的曲线簇. 例如,函数(3) 是以 C 为参数的抛物线簇(图 4-2),函数(9) 是以 C_1,C_2 为参数的抛物线簇(图 4-3).

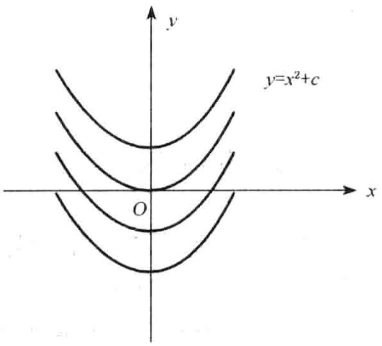

图 4-2

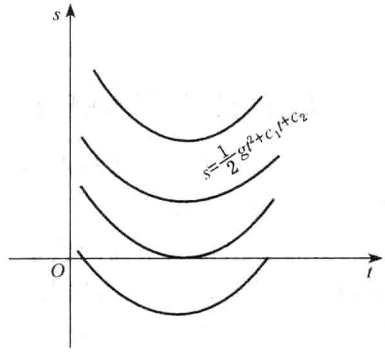

图 4-3

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 要完全确定地反映某一客观事物的规律性，必须提出确定任意常数的条件称为**定解条件**，类似于(2)、(6) 这样的定解条件通常称为**初始条件**或**初值条件**.

如果设微分方程中的未知函数为 $y = y(x)$，则一阶微分方程的初始条件为

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{或} \quad y(x_0) = y_0,$$

二阶微分方程的初始条件为

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

或
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

n 阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ \cdots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

这里，y_0，y'_0，…，$y_0^{(n-1)}$ 都是给定的值.

由定解条件确定了通解中的任意常数后所得出的解，称为**微分方程的特解**. 特解在几何上是通过点(x_0, y_0)的那一条积分曲线. 例如，函数(4)是方程(1) 满足初始条件(2) 的特解，函数(10) 是方程(7) 满足初始条件(6) 的特解.

例 3 已知方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{12}$$

(1) 验证函数 $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ 是方程的通解； (13)

(2) 求方程满足初始条件

$$x\Big|_{t=0} = 1,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{14}$$

的特解.

解 (1) 对函数(13)求导,得

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t, \tag{15}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1\omega^2\cos\omega t - C_2\omega^2\sin\omega t,$$

代入方程(12),得恒等式

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) = 0,$$

所以,函数(13)是方程(12)的解.

又因为函数(13)中含有两个独立的任意常数(由于$\frac{\cos\omega t}{\sin\omega t} \neq$常数,故两个任意常数不能合并),而方程(12)是二阶微分方程,所以函数(13)是方程(12)的通解.

(2) 将初始条件式(14)代入式(13)与式(15),得

$$C_1 = 1,\quad C_2 = 0.$$

再把上式代入通解(13),得所求特解

$$x = \cos\omega t.$$

注意 一般地,对函数 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$,如果在(a, b)内满足

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq 常数,$$

则称函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在区间(a, b)内**线性无关**. 此时,常数 C_1, C_2 相互独立.

例 4 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为Q,且线段 $\overline{PQ}$ 被 y 轴平分,求曲线所满足的微分方程.

解 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线上任一点为 $M(X, Y)$,法线

方程为

$$Y-y=\frac{-1}{y'}(X-x).$$

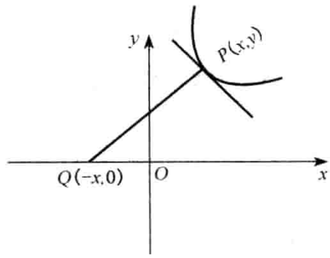

图 4-4

如图 4-4 所示，若令 $Y=0$，得 Q 点的横坐标为 $X=x+yy'$，有 $x+yy'=-x$，得所求曲线对应的微分方程为 $yy'+2x=0$.

例 5 二阶微分方程 $y''-4y'+3y=0$，试问下列函数

（1）$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$；（2）$y=\mathrm{e}^x$；（3）$y=\mathrm{e}^{3x}$；（4）$y=C\mathrm{e}^x$

是否是方程的解，是通解还是特解？

解 分别将这四个函数代入方程，均可得左边 = 右边，则这四个函数均为方程的解.

（1）因为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$，其中有两个独立的任意常数，所以函数是方程的通解；

（2）因为 $y=\mathrm{e}^x(C_1=1,\ C_2=0)$，所以函数是方程的特解；

（3）因为 $y=\mathrm{e}^{3x}(C_1=0,\ C_2=3)$，所以函数是方程的特解；

（4）因为 $y=C\mathrm{e}^x$，其中只有一个任意常数，所以函数既不是方程的通解，也不是方程的特解.

习　题　4.1

1. 指出下列各微分方程的阶数.

（1）$xy''+(y')^2+y=0$；　　（2）$y'''-xy''+x^2y=0$；

（3）$(x+y)\mathrm{d}x-(2x-5y)\mathrm{d}y=0$；　　（4）$(y')^3+2y'+2\cos x=0$.

2. 验证函数 $y=\arcsin x$ 是微分方程 $(1-x^2)y''-xy'=0$ 的解.

3. 验证函数 $y=\frac{1}{9}x^3+x+C_1\ln x+C_2$（$C_1$，$C_2$ 为独立的任意常数）是微分方程 $y''+\frac{1}{x}y'=x+\frac{1}{x}$ 的通解，确定满足初始条件 $y(1)=\frac{10}{9}$，$y'(1)=\frac{10}{3}$ 的积分曲线.

4. 求曲线簇 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意的常数）所满足的微分方程.

5. 下列各组函数哪些是线性无关的？

（1）e^x 与 e^{-x}；　　（2）$\sin x$ 与 $\cos x$；

（3）x 与 $7x$；　　（4）x^2 与 $\sin^2x$.

§4.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y') = 0,$$

当 y' 可以解出时，有

$$y' = f(x, y).$$

一阶微分方程的解法是根据方程类型确定的，因此熟悉几种标准类型方程及解题思路是研究一阶微分方程解法的基本要求. 另外，还要注意学习解微分方程的各种技巧，善于根据已知方程的特点，通过变形把已知方程化成标准类型方程后求解. 一般一阶微分方程是通过积分求解的.

一、可分离变量的微分方程

形如　$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{1}$$

的一阶方程称为**可分离变量型的微分方程**，其中 $f(x)$，$\varphi(y)$ 都是已知的连续函数. 其解题方法如下：

首先　分离变量　把方程(1) 改写成

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \left(其中\ g(y) = \frac{1}{\varphi(y)},\ \varphi(y) \neq 0\right)$$

的形式，设 $y = y(x)$ 是方程(1) 的解，则有恒等式

$$g(y(x))y'(x)dx = f(x)dx.$$

再两边积分　$\int g(y)dy = \int f(x)dx$，

若　$G'(y) = g(y)$，$F'(x) = f(x)$，

则得到方程(1) 的通解为　$G(y) = F(x) + C$　(C为任意常数). 这个关系式所确定的函数 $y = y(x, C)$ 就是方程的通解.

为了便于计算，一般应把解表示成显函数形式. 但当解较复杂时，也可以用隐函数形式表示.

如果是求满足初始条件的特解，那么可根据问题给出的初始条件，定出常数 C，就得到满足初始条件的特解.

严格地讲，在求解时还应考虑 $g(y) = 0$ 是否含有方程(1) 的解，今后对此我

们一般不作要求.

例 1 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y}{1+x}$的通解.

解 显然,方程是可分离变量型的,分离变量得

$$\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,$$

两边积分,得
$$-\int\frac{1}{1-y}\mathrm{d}(1-y)=\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}(1+x),$$

即
$$-\ln|1-y|=\ln|1+x|+\ln|C|=\ln|C(1+x)|,$$

得
$$\frac{1}{1-y}=C(1+x),$$

故通解为 $C(1+x)(1-y)=0$.

这里,将任意常数 C 写成 $\ln|C|$ 是为了结果简明.

注意 通解不一定是方程的全部解.例如,方程$(x+y)y'=0$有解 $y=-x$ 及 $y=C$,后者是通解,但不包含前一个解.

例 2 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解 分离变量,得

$$y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x,\quad 有\quad 2y\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x.$$

两边积分,得
$$y^2=x^2+C,$$

故通解为
$$y=\pm\sqrt{x^2+C}.$$

将初始条件 $x=0,y=1$ 代入通解,显然通解中根式前取负值的那一支不合要求,于是有 $C=1$. 所以,所求特解为

$$y=\sqrt{x^2+1}.$$

例 3 求方程 $x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-x}\sec y\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 分离变量,方程变为

$$x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{\sec y}{\cos y}\mathrm{d}y=0,\quad 即\quad \sec^2 y\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,$$

两边积分,得
$$\tan y=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C,$$

这是方程的隐函数形式的通解.

可分离变量型的方程也常常写成

$$f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x + f_2(x)g_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

的形式.

例 4 求方程$(x + xy^2)\mathrm{d}x - (x^2 y + y)\mathrm{d}y = 0$的通解.

解 原方程化为 $x(1 + y^2)\mathrm{d}x = y(x^2 + 1)\mathrm{d}y$,

分离变量后两边同乘以 2,得 $\dfrac{2y\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \dfrac{2x\mathrm{d}x}{1 + x^2}$,

两边同时积分

$$\int \frac{\mathrm{d}(1 + y^2)}{1 + y^2} = \int \frac{\mathrm{d}(1 + x^2)}{(1 + x^2)}, \quad 得 \quad \ln(1 + y^2) = \ln|C(1 + x^2)|,$$

方程的通解为 $$y^2 = C(1 + x^2) - 1.$$

有些微分方程需通过变量代换可化为可分离变量的方程.

例 5 求下列方程的通解.

(1) $y' = \sin^2(x - y + 1)$; (2) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$.

解 (1) 令 $u = x - y + 1$,则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入原方程,整理得 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u,$$

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int \sec^2 u\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x, \quad 得 \quad \tan u = x + C,$$

故通解为 $\tan(x - y + 1) = x + C$ (C 为任意常数).

(2) 可将方程整理为 $(xy)' = y\ln(xy)$. 令 $u = xy$ 代入上式,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{x}\ln u,$$

分离变量后积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$,得

$$\ln|\ln u| = \ln|Cx|, \quad \ln u = Cx, \quad u = \mathrm{e}^{Cx},$$

原方程的通解为 $xy = \mathrm{e}^{Cx}$.

二、齐次微分方程

有些一阶方程可以根据方程的特点，通过对未知函数作适当的变量代换化为可分离变量型的方程.齐次微分方程就是这样的一类方程.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

的方程称为**一阶齐次微分方程**，简称为**齐次方程**.其中 $\varphi(u)$ 是已知连续函数.

在齐次方程(2)中，引进新的未知函数

$$u=\frac{y}{x},$$

则 $y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，将其代入式(2)，便得方程

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),\quad 即\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

是可分离变量的方程.分离变量可得

$$\frac{1}{\varphi(u)-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{\varphi(u)-u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\quad 即\quad \int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln|Cx|,$$

求出左端的积分后，再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得齐次方程(2)的通解.

例 6 求方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解 方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x},$$

这是齐次方程.令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u,$$

分离变量，得 $$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边同时积分，得 $$\ln|\sin u|=\ln|Cx|,$$

于是 $$\sin u=Cx.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，得原方程的隐函数形式的通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx,$$

故通解为 $$y=x\arcsin Cx.$$

例 7 求微分方程 $y^2\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 根据方程的特点，将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{xy-x^2}{y^2}=\frac{x}{y}-\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

令 $u=\frac{x}{y}$, $x=uy$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, 代入上式并整理后得

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-u^2,$$

分离变量 $-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$ 积分后，得 $$\frac{1}{u}=\ln|Cy|,$$

方程的通解为 $$y=x\ln|Cy|.$$

*__例 8__ 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 令 $\begin{cases}x=X+h,\\ y=Y+k,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}X=x-h,\\ Y=y-k,\end{cases}$ 因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(Y+k)}{\mathrm{d}(X+h)}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}$,

代入原方程整理得 $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{X-Y+(h-k+1)}{X+Y+(h+k-3)}.$$

为了化成齐次方程，可令 $\begin{cases}h-k+1=0,\\ h+k-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}h=1,\\ k=2,\end{cases}$ 得齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{X-Y}{X+Y}=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则 $Y=Xu$, $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，代入上式，得

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{1-u}{1+u},$$