大学数学同步辅导与考研指导用书

微积分习题与试题解析教程（第3版）

南京大学金陵学院　陈　仲　主编

★ 典型习题精讲

★ 历年试题精析

★ 权威专家精著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

微积分习题与试题解析教程

（第3版）

主　编　陈　仲

编　者　陈　仲　张玉莲　林小围

　　　　王夕予　王　培

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书依据普通高校"微积分"课程教学大纲，并参照教育部制定的"考研数学考试大纲"进行编写. 内容分为函数与极限、连续性与导数概念、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、反常积分与定积分的应用、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等 12 个专题. 每个专题含"重要概念与基本方法"、"《大学数学教程》习题选解"、"往年期中与期末试题解析"、"历年硕士生入学试题解析"四个部分. 其中，"习题"选自陈仲编著的《大学数学教程》一书，"期中与期末试题"选自南京大学、南京大学金陵学院往年本科生的期中与期末试卷，"硕士生入学试题"选自全国历年硕士研究生入学试卷和南京大学等高校历年硕士研究生入学(单考)试卷.

本书可供各类高等学校的大学生作为学习"微积分"、"高等数学"课程和考研复习的参考书，也可供相关老师参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题与试题解析教程 / 陈仲主编. —3 版. —南京：东南大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5641-5634-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 064754 号

微积分习题与试题解析教程(第 3 版)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025—83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	18
字　　数	353 千字
版　　次	2015 年 4 月第 3 版
印　　次	2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-5634-3
定　　价	35.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

“微积分”是一门系统性强、结构严谨的课程，是所有高等学校大学生的必修课. 由于内容多，进度快，难度大，致使相当多的刚进入大学校门的大学生学习感到困难. 常常上课时听得懂，课后作业不会做；每学期期中与期末考试前，不知考题题型如何，不知如何复习迎考；对于部分学习成绩优秀的学生，又感到课本上习题的难度不够. 本书的编写宗旨就是为了帮助同学们解决这些学习上的问题.

本书依据普通高校“微积分”课程教学大纲，并参照教育部制定的“考研数学考试大纲”进行编写. 内容分为函数与极限、连续性与导数概念、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、反常积分与定积分的应用、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等12个专题. 每个专题含“重要概念与基本方法”、“《大学数学教程》习题选解”、“往年期中与期末试题解析”、“历年硕士生入学试题解析”四个部分. 其中，“习题”选自陈仲编著的《大学数学教程》丛书中《微积分(上册)》、《微积分(下册)》、《微分方程与线性代数》三本书(东南大学出版社，2013)，“期中与期末试题”选自南京大学、南京大学金陵学院往年本科生的期中与期末试卷，“硕士生入学试题”选自全国历年硕士研究生入学试卷和南京大学等高校历年硕士研究生入学(单考)试卷.

本书由陈仲主编，并编写12个专题的“重要概念与基本方法”和“历年硕士生入学试题解析”. 其余部分，王培编写专题1，2，4；张玉莲编写专题3，8，12；王夕予编写专题5，6，11；林小围编写专题7，9，10.

本书可供各类高等学校的大学生作为学习“微积分”、“高等数学”、“大学数学”等课程以及考研复习的参考书，也可供相关老师参考.

本书此次再版，得到南京大学金陵学院教务处、基础教学部和东南大学出版社的支持和帮助，编者谨此一并表示衷心的感谢.

书中缺点和疏漏难免，敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2015 年 1 月于南京大学浦苑

目　录

专题 1　函数与极限 …… 1

1.1　重要概念与基本方法 …… 1

1.2　《大学数学教程》习题选解 …… 5

1.3　往年期中与期末试题解析 …… 9

1.4　历年硕士生入学试题解析 …… 12

专题 2　连续性与导数概念 …… 18

2.1　重要概念与基本方法 …… 18

2.2　《大学数学教程》习题选解 …… 23

2.3　往年期中与期末试题解析 …… 29

2.4　历年硕士生入学试题解析 …… 35

专题 3　微分中值定理与导数的应用 …… 44

3.1　重要概念与基本方法 …… 44

3.2　《大学数学教程》习题选解 …… 47

3.3　往年期中与期末试题解析 …… 53

3.4　历年硕士生入学试题解析 …… 59

专题 4　不定积分 …… 73

4.1　重要概念与基本方法 …… 73

4.2　《大学数学教程》习题选解 …… 75

4.3　往年期中与期末试题解析 …… 80

4.4　历年硕士生入学试题解析 …… 83

专题 5　定积分 …… 88

5.1　重要概念与基本方法 …… 88

5.2　《大学数学教程》习题选解 …… 90

5.3　往年期中与期末试题解析 …… 95

5.4　历年硕士生入学试题解析 …… 101

专题 6　反常积分与定积分的应用 …… 114

6.1　重要概念与基本方法 …… 114

6.2　《大学数学教程》习题选解 …… 117

6.3 往年期中与期末试题解析 …… 121
6.4 历年硕士生入学试题解析 …… 125

专题 7 空间解析几何 …… 134
7.1 重要概念与基本方法 …… 134
7.2 《大学数学教程》习题选解 …… 137
7.3 往年期中与期末试题解析 …… 142
7.4 历年硕士生入学试题解析 …… 146

专题 8 多元函数微分学 …… 147
8.1 重要概念与基本方法 …… 147
8.2 《大学数学教程》习题选解 …… 153
8.3 往年期中与期末试题解析 …… 160
8.4 历年硕士生入学试题解析 …… 168

专题 9 二重积分与三重积分 …… 178
9.1 重要概念与基本方法 …… 178
9.2 《大学数学教程》习题选解 …… 183
9.3 往年期中与期末试题解析 …… 189
9.4 历年硕士生入学试题解析 …… 194

专题 10 曲线积分与曲面积分 …… 204
10.1 重要概念与基本方法 …… 204
10.2 《大学数学教程》习题选解 …… 211
10.3 往年期中与期末试题解析 …… 218
10.4 历年硕士生入学试题解析 …… 222

专题 11 数项级数与幂级数 …… 229
11.1 重要概念与基本方法 …… 229
11.2 《大学数学教程》习题选解 …… 233
11.3 往年期中与期末试题解析 …… 239
11.4 历年硕士生入学试题解析 …… 248

专题 12 微分方程 …… 260
12.1 重要概念与基本方法 …… 260
12.2 《大学数学教程》习题选解 …… 264
12.3 往年期中与期末试题解析 …… 269
12.4 历年硕士生入学试题解析 …… 276

专题 1　函数与极限

1.1　重要概念与基本方法

1　一元函数基本概念

(1) 函数的奇偶性、周期性、单调性、有界性.

常用的奇函数：

$$y=\sin x,\quad y=\tan x,\quad y=\arctan x$$

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\quad y=f(x)-f(-x),\quad \cdots$$

常用的偶函数：

$$y=x^2,\quad y=\cos x,\quad y=f(x)+f(-x),\quad \cdots$$

常用的有界函数：

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\arctan x,\quad y=\operatorname{arccot} x,\quad \cdots$$

(2) 五类基本初等函数：幂函数 $y=x^\lambda$；指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$；对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；6 个三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,\cdots$.

指数函数的基本公式：

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\quad u(x)=\exp(\ln u(x)),\quad u(x)=\ln(\mathrm{e}^{u(x)})$$

对数函数的基本公式：

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y,\quad \log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$$

三角函数的基本公式(平方和公式、和角公式、倍角公式、半角公式)：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\quad \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

(3) 初等函数与初等函数的分解.

例如，初等函数 $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 可以分解为 $f_1=\mathrm{e}^u,f_2=u^2,f_3=\sin u,f_4=\dfrac{1}{x}$，则

$$y = f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$$

(4) 分段函数.

(5) 常用的数学方法:极坐标变换法($x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$)、数学归纳法、反证法等.

2 极限概念

(1) 数列的极限.

① $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 的"$\varepsilon - N$"定义:$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n - A|<\varepsilon$.

在应用"$\varepsilon - N$"定义证明极限时,常用的方法是放缩法:先求正常数 M,使得 $|x_n - A| < \dfrac{M}{n} < \varepsilon\left(\text{或}\dfrac{M}{\sqrt{n}}<\varepsilon,\cdots\right)$,则有 $n>\dfrac{M}{\varepsilon}\left(\text{或 } n>\dfrac{M^2}{\varepsilon^2},\cdots\right)$,于是 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N=\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]\left(\text{或 } N=\left[\dfrac{M^2}{\varepsilon^2}\right],\cdots\right)$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n - A|<\varepsilon$.

② 收敛数列的三条性质(极限的唯一性、数列的有界性、极限的保向性).

(2) 函数的极限.

① $\lim\limits_{x\to a}f(x) = A$ 的"$\varepsilon - \delta$"定义:$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

应用"$\varepsilon - \delta$"定义证明极限时,常用两种方法.

a. 放缩法:预取 $\delta = 1$,在 $0<|x-a|<1$ 的条件下,先求正常数 K,使得 $|f(x)-A|<K|x-a|<\varepsilon$,则有 $|x-a|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{K}$,于是 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{K}\right\}$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

b. 几何方法:若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域中严格增加(见图 1.1),取 $x=x_1, x_2$,使得 $f(x_1)=A-\varepsilon, f(x_2)=A+\varepsilon$,则 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\{x_2-a, a-x_1\}$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

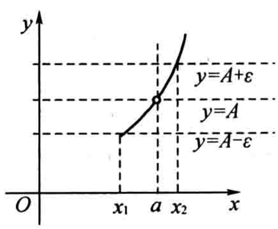

图 1.1

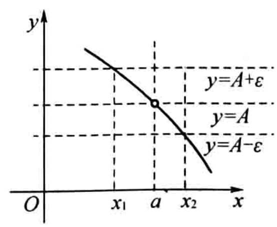

图 1.2

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域中严格减少(见图 1.2),取 $x=x_1, x_2$,使得 $f(x_1)=A+\varepsilon, f(x_2)=A-\varepsilon$,则 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\{x_2-a, a-x_1\}$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

② 函数的左极限与右极限：

$$f(a-)=\lim_{x\to a-}f(x),\quad f(a+)=\lim_{x\to a+}f(x)$$

定理 1　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(a-)=f(a+)=A.$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-K$"定义：$\forall\varepsilon>0,\exists K>0$，当 $x>K$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

在应用"$\varepsilon-K$"定义证明极限时，常用的方法是放缩法：先求正常数 M，使得 $|f(x)-A|<\dfrac{M}{x}<\varepsilon\left(或\dfrac{M}{\sqrt{x}}<\varepsilon,\cdots\right)$，则有 $x>\dfrac{M}{\varepsilon}\left(或 x>\dfrac{M^2}{\varepsilon^2},\cdots\right)$，于是 $\forall\varepsilon>0,\exists K=\dfrac{M}{\varepsilon}\left(或 K=\dfrac{M^2}{\varepsilon^2},\cdots\right)$，当 $x>K$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

④ 函数的极限的六种极限过程：

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a+}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a-}f(x)=A$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

⑤ 函数极限存在时的三条性质(极限的唯一性、函数的局部有界性、极限的保号性).

(3) 无穷小量、无穷小的运算性质、无穷小的比较(高阶、低阶、同阶、等价).

3　极限存在的两个准则

定理 1(夹逼准则 Ⅰ)　已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\},\forall n\in\mathbf{N}^*$，若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$

定理 1′(夹逼准则 Ⅱ)　已知函数 $g(x),f(x),h(x)$，若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A,\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A.$

定理 2(单调有界准则)　设数列 $\{x_n\}$ 单调增加，有上界(或单调减少，有下界)，则该数列 $\{x_n\}$ 收敛.

4　复合函数的极限(求极限的变量代换法则)

定理　设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b,\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$，且在 $x=a$ 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq b$，则有

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=\lim_{u\to b}f(u)=A$$

5　求极限的方法

(1) 应用四则运算法则求函数的极限.

(2) 应用变量代换法则求函数的极限.

(3) 应用夹逼准则求数列与函数的极限.

(4) 应用单调有界准则证明数列的极限存在,再求该数列的极限.

(5) 应用关于 e 的重要极限求 1^{∞} 型的极限:设 $\square = u(x)$,则

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = \mathrm{e},\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}$$

(6) 应用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量来求极限.

(7) 利用等价无穷小因子代换法则求$\dfrac{0}{0}$型的极限.

定理 1(等价无穷小因子代换法则)　若在某极限过程下,例如 $x\to a$ 时,$\alpha(x)\to 0$,$\beta(x)\to 0$,且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot u(x)}{\beta(x)\cdot v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)\cdot u(x)}{\beta_1(x)\cdot v(x)}$$

注意:① α(或 β)必须是整个分子(或分母)的无穷小因子. 譬如分子为 $\alpha\cdot u(x)+h(x)$($h(x)\neq 0$)时,分子不能用 $\alpha_1\cdot u(x)+h(x)$ 代换.

② $u(x)$(或 $v(x)$)中有因子的极限不为 0 时,最好先求出来.

定理 2(等价无穷小基本公式)　若在 x 的某极限过程下,$\square = u(x)\to 0$,则

$$\square\sim\sin\square\sim\arcsin\square\sim\tan\square\sim\arctan\square\sim\mathrm{e}^{\square}-1\sim\ln(1+\square)$$

$$1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2,\quad (1+\square)^{\lambda}-1\sim\lambda\square$$

(8) 利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 求数列$\{x_n\}$的极限.

例　用此法可求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}\right|$.　$\left(答案:\dfrac{1}{2}\right)$

(9) 利用导数的定义求极限(详见专题 2).

(10) 利用洛必达法则求$\dfrac{0}{0}$型与$\dfrac{\infty}{\infty}$型的极限(详见专题 3).

(11) 利用马克劳林展式求极限(详见专题 3).

(12) 利用定积分的定义求极限(详见专题 5).

(13) 利用级数的性质求极限(详见专题 11).

(14) 利用幂级数的和函数求极限(详见专题 11).

(15) 补充一个求极限的方法:利用施笃兹定理求极限.

定理 3(施笃兹)　设数列$\{y_n\}$严格增加,且 $y_n\to+\infty(n\to\infty)$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = A\quad(有限数或\pm\infty)$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = A$(或$\pm\infty$).

例　已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，利用施笃兹定理可求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$.

1.2 《大学数学教程》习题选解

例 2.1（习题 1.2 B 2）　求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\arctan x & (|x|>1);\\ \sin\dfrac{\pi x}{2} & (|x|\leqslant 1)\end{cases}$ 的反函数.

解析　(1) 当 $|x|>1$ 时，$x=\tan\dfrac{\pi y}{4}\Rightarrow y=\tan\dfrac{\pi x}{4}$. 由于

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<-\frac{\pi}{4}\quad 或\quad \frac{\pi}{4}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$$

故 $1<|f(x)|=\left|\dfrac{4}{\pi}\arctan x\right|<2$.

(2) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，$x=\dfrac{2}{\pi}\arcsin y\Rightarrow y=\dfrac{2}{\pi}\arcsin x$，且

$$|f(x)|=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\leqslant 1$$

故原函数为

$$f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi x}{4} & (1<|x|<2);\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x & (|x|\leqslant 1)\end{cases}$$

例 2.2（习题 1.3 A 2.2）　用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-3}=\dfrac{1}{2}$.

解析　用放缩法. 当 $n>3$ 时，$2n-3>n$，则

$$\left|\frac{n+1}{2n-3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{5}{2(2n-3)}\right|<\frac{6}{2n}=\frac{3}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n+1}{2n-3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

例 2.3（习题 1.3 A 3.3）　用函数极限定义证明$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{1+x}=2$.

解析　**方法 Ⅰ**　由于

$$|\sqrt{1+x}-2|=\frac{|x-3|}{\sqrt{1+x}+2}<\frac{|x-3|}{2}<\varepsilon\Leftrightarrow|x-3|<2\varepsilon$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|\sqrt{1+x}-2|<\varepsilon$.

方法 Ⅱ　由

$$|\sqrt{1+x}-2|<\varepsilon\Leftrightarrow 2-\varepsilon<\sqrt{1+x}<2+\varepsilon\Leftrightarrow\varepsilon^2-4\varepsilon<x-3<4\varepsilon+\varepsilon^2$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$(不妨设 $\varepsilon < 4$),取 $\delta = \min\{4\varepsilon - \varepsilon^2, 4\varepsilon + \varepsilon^2\}$,当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时,$|\sqrt{1+x} - 2| < \varepsilon$.

例 2.4(习题 1.3 A 5.4) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解析 原式$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}$$

例 2.5(习题 1.3 B 3) 证明:数列$\{x_n\}$收敛于 A 的充要条件是数列$\{x_{2n}\}$与数列$\{x_{2n+1}\}$皆收敛于 A.

解析 **必要性** 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,由定义,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$. 由于 $2n > n > N$,$2n+1 > n > N$,所以

$$|x_{2n} - A| < \varepsilon, \quad |x_{2n+1} - A| < \varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = A, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$$

充分性 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$,由定义,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists N_1 \in \mathbf{N}$,$\exists N_2 \in \mathbf{N}$,当 $n > N_1$ 时,有 $|x_{2n} - A| < \varepsilon$;当 $n > N_2$ 时,有 $|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$. 取

$$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$$

则当 $n > N$ 时,有 $|x_n - A| < \varepsilon$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

例 2.6(习题 1.4 A 5.9) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$.

解析 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}\cdot\frac{4x}{x-2}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}\right) = \mathrm{e}^4$

例 2.7(习题 1.4 B 3) 设 $x_1 = 1$,$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$($n = 1, 2, \cdots$),证明数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解析 显然 $x_n > 0$. 假设$\{x_n\}$收敛,令 $x_n \to A$,则有 $A = \frac{1}{1+A}$,由此可解得 $A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. 下面证明 $x_n \to \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. 由于

$$|x_{n+1} - A| = \left|\frac{1 - A - Ax_n}{1 + x_n}\right| < A|x_n - A| \quad (\text{因 } 1 - A = A^2)$$

以此类推下去得

$$\left|x_{n+1} - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right| < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\left|x_{n-1} - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right| < \cdots$$

$$< \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \left| x_1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \right|$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

由于$\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| < 1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = 0$,于是$n\to\infty$时,上式右端极限为0,应用夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

例 2.8(习题 1.4 B 4)　应用夹逼准则证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

解析　令$n=[x]$,即$n \leqslant x < n+1(n\in\mathbf{N})$,且$x\to+\infty \Leftrightarrow n\to\infty$.当$n\geqslant 1$时,有

$$n^{\frac{1}{n+1}} < x^{\frac{1}{x}} < (n+1)^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n+1]{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

在(1)式中令$x\to+\infty$,应用夹逼准则得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

例 2.9(习题 1.5 A 1.6)　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{(1-x)^2}$.

解析　应用变量代换法则,令$1-x=t$,当$x\to1$时$t\to0$,于是

$$\text{原式} = \lim_{t\to0}\frac{1+\cos(\pi-\pi t)}{t^2} = \lim_{t\to0}\frac{1-\cos\pi t}{t^2} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}\pi^2t^2}{t^2} = \frac{1}{2}\pi^2$$

例 2.10(习题 1.5 A 1.7)　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}$.

解析　令$x-1=t$,并应用公式$(1+\square)^\lambda-1\sim\lambda\square(\square\to0)$作等价无穷小代换,则

$$\text{原式} = \lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt[3]{1+t}-1)(\sqrt[4]{1+t}-1)}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{3}t\cdot\frac{1}{4}t}{t^3} = \frac{1}{24}$$

例 2.11(习题 1.5 A 1.9)　求$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解析　原式$=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin x+\cos x-1}{x}}$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}\right)$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}\right] = \exp(1+0) = \mathrm{e}$$

例 2.12(习题 1.5 A 2.5) $x\to 0$ 时，求函数 $\sin^2 x-\tan^2 x$ 关于 x 的无穷小的阶数.

解析 设 $k>0$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan^2 x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^4 x}{x^k\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4}{x^k}$$

上式右端有非零极限的充要条件是 $k=4$，且此时极限为 -1，故所求无穷小的阶数为 4.

例 2.13(习题 1.5 B 1.2) 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{-\cos^2 x}\cdot\frac{-\tan x\cdot\cos^2 x}{2}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\tan x\cdot\cos^2 x}{2}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x\cdot\cos x}{2}\right)=\mathrm{e}^0=1$$

例 2.14(习题 1.5 B 1.5) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解析 采用等价无穷小因子代换得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}(\mathrm{e}^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$$

例 2.15(习题 1.5 B 1.6) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x^2}-\sin x)$.

解析 采用和差化积公式得

$$原式=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2}\sin\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2}+x)}$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\cos\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2}$ 为有界量，$\sin\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2}+x)}$ 为无穷小量，因为有界量与无穷小量的乘积为无穷小量，故原式等于 0.

例 2.16(习题 1.5 B 3.1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2})$.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1+1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

例 2.17（习题 1.5 B 3.2）　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解析　原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cdot\cos 2x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+1-\cos 2x}{x^2}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}+2\right)=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$$

1.3　往年期中与期末试题解析

例 3.1（11－12（Ⅰ）期中）　用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0$.

解析　应用二项式定理，有

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=1+n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

故

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n>1+n\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\sqrt{n}$$

由于

$$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}<\frac{1}{1+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow n>\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\varepsilon$.

例 3.2（04－05（Ⅰ）期中）　用函数极限定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2x^2}{2-x^2}=-2$.

解析　用放缩法，当 $x>2\sqrt{3}$ 时，由于

$$\left|\frac{1+2x^2}{2-x^2}-(-2)\right|=\frac{5}{x^2-2}<\frac{6}{x^2}<\varepsilon\Rightarrow x>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}},2\sqrt{3}\right\}$，当 $x>N$ 时，$\left|\frac{1+2x^2}{2-x^2}-(-2)\right|<\varepsilon$.

例 3.3(11－12(Ⅰ)期末)　已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$，求常数 a 与 b.

解析　由题意可知 $x-1$ 是 x^2+ax+b 的一个因式，不妨设

$$x^2+ax+b=(x-1)(x-p)=x^2-(p+1)x+p$$

则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-p}{x+2}=2$，所以 $p=-5$，故 $a=4,b=-5$.

例 3.4(12－13(Ⅰ)期末)　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解析　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=-1$$

例 3.5(03－04(Ⅰ)期末)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$.

解析　应用夹逼准则与等价无穷小因子代换，由于

$$n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}}=\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+1}}=\pi$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}=\pi$$

例 3.6(10－11(Ⅰ)期中)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left[\frac{k}{n^2}-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{(n+i)^2}\right]$，其中 k 为一确定的正整数.

解析　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^3\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+i)^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n^3(2in+i^2)}{n^2(n+i)^2}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{2in^2 + i^2 n}{n^2 + 2in + i^2} = \sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)$$

例 3.7(08－09(Ⅰ)期中)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1004}{n}\right)$.

解析　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\dfrac{1004}{n}}{1-\tan\dfrac{1004}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{1004}{n}}{1-\tan\dfrac{1004}{n}}\right]^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{1004}{n}}{1-\tan\frac{1004}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{1004}{n}}{2\tan\frac{1004}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{1004}{n}}{1-\tan\frac{1004}{n}}\cdot n}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1004}{n}\cdot n}{1-\tan\frac{1004}{n}}\right] = e^{2008}$$

例 3.8(08－09(Ⅰ)期末)　已知曲线 $y=\tan^n x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$处的切线交 x 轴于点$(\xi_n,0)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}y(\xi_n)$.

解析　由于$y'=n\tan^{n-1}x\sec^2 x$,得$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2n$,故曲线在$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$处的切线方程为

$$y-1=2n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

令 $y=0$,得 $\xi_n=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2n}$,$y(\xi_n)=\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2n}\right)$,则

$$\lim_{n\to\infty}y(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{2\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]^{-\frac{1+\tan\frac{1}{2n}}{2\tan\frac{1}{2n}}\cdot\frac{-2\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\cdot n}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\frac{1}{2n}\cdot n}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]=e^{-1}$$

例 3.9(10－11(Ⅰ)期中)　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

解析　记 $u(n)=\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$,应用关于 e 的重要极限