

<< 高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

GAODENG YUANXIAO YINGYONGXING RENCAI PEIYANG GUIHUA JIAOCAI SHUXUE LEI

SHUXUE JIANMO

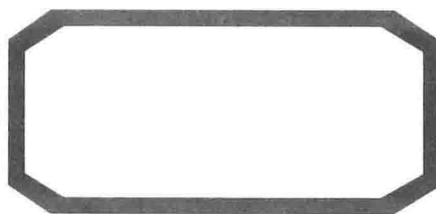
数学 建模

夏鸿鸣 魏艳华 王丙参 ● 编著



西南交通大学出版社

高等院校应用型人才培
甘肃省省级精品课程配



数学建模

夏鸿鸣 魏艳华 王丙参 编著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内容简介

本书为甘肃省省级精品课程配套教材,较全面地介绍了数学建模的主要内容、方法及软件实现.全书共10章.第1章为数学建模概述;第2章系统讲解了几个常见的初等模型;第3章为数据初步处理,包括描述统计、参数估计和假设检验,插值和拟合以及灰色预测等;第4章为微分方程模型;第5章为数学规划模型,包括线性规划模型、整数线性规划模型及非线性规划模型;第6章为离散模型,包括层次分析模型和差分模型;第7章为概率模型及计算机仿真;第8、9章为统计建模,包括回归模型、时间序列模型与多元统计分析模型;第10章为图论模型.附录中给出了MATLAB简明教程和数学建模竞赛获奖论文,供读者参考.阅读本书仅需高等数学、线性代数与概率统计的基础知识.

本书内容新颖,理论联系实际,侧重数据分析,将建模方法与上机操作相结合,通过详尽的典型实例分析,加深读者对相关理论的理解,增加其实用性.本书案例主要运用国内流行的MATLAB、SPSS、SAS软件完成,线性规划部分主要用Lingo软件完成,所讲述的方法都结合实例介绍软件的实施过程,为广大研究人员和师生对相关理论的应用提供借鉴.

本书可作为高等院校数学与应用数学等专业的本科生教材和数学建模竞赛培训教材,也可作为相关专业和研究人员的参考用书,对数学建模竞赛具有很高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 夏鸿鸣, 魏艳华, 王丙参编著. —成都:
西南交通大学出版社, 2014.8
高等院校应用型人才培养规划教材. 数学类
ISBN 978-7-5643-3281-5

I. ①数… II. ①夏… ②魏… ③王… III. ①数学模
型—高等学校—教材 IV. ①0141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第190636号

高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

数学建模

夏鸿鸣 魏艳华 王丙参 编著

*

责任编辑 张宝华

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

成都市金牛区交大路146号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564

<http://www.xnjdcbs.com>

成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm × 260 mm 印张: 17.75

字数: 445千字

2014年8月第1版 2014年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5643-3281-5

定价: 36.00元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前言

一提到数学,人们首先想到的是它的抽象和精确,严密的推理和证明,但不可否认,数学还具有广泛的应用性.数学的很多重大发现都是为了实际运用而产生的,当然,也有大量数学成果来源于对数学自身提出的问题,尽管这些成果在当时没有直接转化为生产力,但多年以后同样体现出巨大的应用价值.当今世界,随着社会的发展、科学技术的进步,数学越来越广泛地应用在众多科学与社会领域,特别是计算机的飞速发展和广泛应用,使我们已经不能按照传统模式进行数学教育.数学教学要理论联系实际,学生也要自己动手,借助计算机,尝试数学的应用,以便今后能够更好、更快地适应社会的需要.数学建模与数学实验课程的开设,数学建模竞赛活动的开展,就是为了适应这一社会需求应运而生的.

“数学建模”课程是全国普通高等院校数学与应用数学专业必修的专业基础课,它以丰富的背景、巧妙的思维和有趣的结论吸引着读者,使学生在浓厚的兴趣下学习和掌握基本的概念、理论和方法.为了提高高校学生对数学的应用能力,中国每年都要举办全国大学生数学建模竞赛,以考察大学生运用数学、计算机的知识解决具有一定专业背景的实际问题的能力.随着社会的发展,数据量日渐庞大,使人类进入了数据时代,甚至有人说人类已进入大数据时代,手工计算已完全跟不上时代发展,也不可能实现,只能借助数学软件和统计软件进行处理.目前市场上许多《数学建模》教材偏重理论分析,知识系统化、抽象化,非常完美,但却忽视了软件实现,使学生一旦参加数学建模竞赛或遇到实际问题,才发现无从下手,可见其实用性不强.为了适应培养应用型人才的要求,针对本科院校的数学与应用数学等专业的培养目标,有必要编写理论知识要求不高而实用性较强的数学建模教材.

2010年,天水师范学院“数学建模”课程被评为甘肃省省级精品课程.自此,我校数学建模教育迈上了一个新台阶.学院组建了数学建模创新教育教学团队,该团队由校内外若干专家和多名指导教师组成,提出了多层次数学建模创新人才培养模式,取得了可喜的成绩.为了总结近年来课程建设中的成功经验及存在的问题,教学团队在多次使用的本课程讲稿的基础上,结合同行专家的优秀成果及对本课程的研究,经过多次修订和补充,编著了本教材.

本书简要介绍了数学建模所需的数学理论和统计方法,突出了建模思想和方法的介绍,强调了计算过程的软件实现,其中数值计算和计算机仿真部分侧重 MATLAB 软件实现,优化理论建模侧重 Lingo 和 MATLAB 软件处理,描述统计侧重 Excel 软件,统计分析侧重 SPSS 和 SAS 软件实现.本教材实用性强,可读性高,对全国大学生数学建模竞赛具有较高的指导价值.本教材注重基本理论、概念、方法的叙述,关注学生数学应用能力的培养.运用数学工具力求准确、简洁,尽量使读者系统地掌握运用较为简单的数学工具做数学建模的基本理论和方法.

全书共 10 章,第 1 章为数学建模概述,使读者对数学建模及数学建模竞赛有大致了解;第 2 章较为系统、详尽地介绍了几个常见的初等数学模型;第 3 章为数据的初步处理,包括描述统计、参数估计和假设检验,插值和拟合以及灰色预测等;第 4 章介绍微分方程模型;第 5 章为数学规划模型;第 6 章为离散模型,包括层次分析法和差分模型;第 7 章为概率模

型与计算机仿真；第 8、9 章为统计建模，包括回归模型、时间序列模型与多元统计分析模型；第 10 章为图论模型，主要介绍最短路径与算法。附录 A 给出了 MATLAB 简明教程，方便读者查阅；附录 B 是作者指导的学生参加大学生数学建模竞赛的一篇获奖论文，以供读者作为数学建模竞赛时的模板参考。每一章既有相关理论的基本介绍，也有经典、实用的案例分析，理论与实践紧密结合，尤其是所选的案例，既可以作为学习资料，使读者拓宽视野、提高分析能力，也可以作为基本思路与方法，应用于解决实际问题。

本书由天水师范学院夏鸿鸣、魏艳华、王丙参共同编著，具体分工为：第 1、5、7 章和附录 A 由王丙参编著，第 2、4、6、10 章和附录 B 由夏鸿鸣编著，第 3、8、9 章由魏艳华编著。我们多次商讨、切磋教材结构，选择模型与例题，相互补充，经过反复讨论和修改后由作者共同定稿。在本书的编著过程中得到了天水师范学院数学与统计学院的大力支持，很多同事为本书提供了宝贵的建议，统计专业学生为本书提供了大量数据和题材，如 2004 统计王俊爱，2007 统计李玉玲，2008 统计毛增祥、张丽媛，2009 统计任丽君、文婉君等，也得到西南交通大学出版社及有关各方同仁的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意！

本书可作为高等院校数学与应用数学等专业的本科生教材及数学建模竞赛培训教材，也可作为相关研究人员的参考用书。本书可以在 90 学时左右全部讲完，也可根据需求选择部分内容组织教学，大致 54 学时讲完，各章学时根据需求自行安排，建议先修常微分方程、概率论与数理统计、运筹学课程。为了达到预期效果，尽量安排上机课，采用 3+1 模式比较合适，即 3 次讲授，1 次上机。由于每章既有理论简介，又有软件实现，故本书融合了“数学建模”与“数学实验”课程内容，学习完本书即可达到两门课程的要求。

虽然我们希望编写出一本质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评、指正，使本教材得以不断完善。为方便广大读者，提供电子邮箱 wangbingcan2000@163.com，读者可通过该邮箱与作者取得联系，获取技术支持和教学资料。

作者

2014 年 3 月

目 录

1	数学建模概述	1
1.1	从现实现象到数学模型	1
1.2	数学建模方法、步骤、特点与分类	2
1.3	怎样学习数学建模及组织数学建模竞赛	6
	习题 1	8
2	初等数学模型	10
2.1	名额分配问题	10
2.2	投入产出模型	14
2.3	量纲分析法建模	20
	习题 2	25
3	数据初步处理	27
3.1	数据的统计描述与分析	27
3.2	插值与拟合	40
3.3	灰色预测及 MATLAB 实现	47
	习题 3	53
4	微分方程模型	54
4.1	人口增长模型	54
4.2	传染病模型	59
4.3	微分方程相关知识简介	65
	习题 4	68
5	数学规划模型	69
5.1	线性规划基本理论与软件求解	69
5.2	奶制品的生产与销售	78
5.3	投资的收益与风险	83
5.4	整数线性规划模型	87
5.5	非线性规划基本理论与软件求解	94
5.6	非线性无约束优化模型	100
5.7	原料供应与料场选择	104
	习题 5	108
6	离散模型	109
6.1	层次分析法建模	109

6.2	差分方程建模	118
	习题 6	129
7	概率模型与计算机模拟	130
7.1	马氏链模型	130
7.2	$M M c \infty$ 排队模型及其在超市管理中的应用	134
7.3	计算机仿真	140
	习题 7	150
8	回归与时间序列模型	151
8.1	统计回归模型	151
8.2	自变量的选择与逐步回归	166
8.3	基于 ARIMA 模型的天水市粮食产量预测与决策	174
	习题 8	182
9	多元统计模型	184
9.1	聚类分析	184
9.2	主成分分析	193
9.3	因子分析	199
9.4	土壤重金属污染状况的综合分析	211
	习题 9	219
10	图论模型	220
10.1	图论相关知识	220
10.2	最短路径问题及其算法	224
10.3	最优截断切割问题	232
	习题 10	234
附录 A	MATLAB 简明教程	235
1	MATLAB 概况	235
2	基本使用方法	236
3	数值计算功能	244
4	符号运算	250
5	MATLAB 与概率统计	254
6	MATLAB 程序设计	256
7	MATLAB 图形功能	259
附录 B	2012 年 A 题 葡萄酒的评价	264
	参考文献	277

1 数学建模概述

随着科学技术的发展,特别是计算机技术的飞速发展,数学建模作为一门用数学方法解决实际问题的学科越来越受到人们的重视.对于广大科技人员和应用数学工作者来说,数学模型是搭起摆在他们面前的实际问题与所掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁.其实,“所谓高科技就是一种数学技术”,几乎所有学科发展到高级阶段都要引入数学,进行量化处理,甚至几乎所有科学理论都可看作数学模型.马克思说过“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步”.当今,数学以空前的广度和深度向一切领域渗透,可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义:

(1) 在一般工程技术领域,数学建模仍然大有用武之地,如机械、电机、土木、水利等.

(2) 在高新技术领域,数学建模几乎是必不可少的工具,如通信、微电子、航天、自动化等.

(3) 数学已进入一些新领域,诸如经济、人口、生态、地质等.所谓非物理领域也为数学建模开辟了处女地,如计量经济学、人口控制论、数学生态学等.

本章为数学建模概述,主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤,使读者全面的、初步的了解数学建模,最后给出几点关于数学建模竞赛的建议,以供读者参考.

1.1 从现实现象到数学模型

现实世界丰富多彩,变化万千.人们无时无刻不在运用自己的智慧和力量去认识、利用、改造世界,从而创造出更加多彩的物质文明和精神文明.博览会是集中展示这些成果的场所之一.工业展厅上,豪华、舒适的新型汽车令人赞叹不已;农业展厅上,硕大、娇艳的各种水果令人流连忘返;科技展厅上,大型水电站模型雄伟壮观,人造卫星模型高高耸立,讲解员深入浅出地介绍原子结构模型的运行机理;电影演播室里播放着一部现代化炼钢厂自动化生产的影片,其中既有火花四溅的炼钢情形,也有控制的框图、公式和程序.参加博览会,既有汽车、水果这些从现实照搬到展厅的实物,也有各种实物模型、照片、图表、公式……这些模型在短短几个小时所起的作用,恐怕置身于现实世界很久也无法达到.

与形形色色的模型相对应,它们在现实世界的原始参照物统称为**原型**,它们是人们现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象.本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型.**模型**是为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、抽象、提炼而构成的原型替代物,也是所研究的系统、过程、事物或概念的一种表达形式,也可指根据实验、图样放大或缩小而制作的样品,一般用于展览或实验或铸造机器零件等用的模子.这里特别强调构造模型的目的性,即强调模型不要完全的复制.由于原型有各个方面和各个层次的特征,因而模型只要求反映与某种目的有关的方面和层次.一个原型,为了不同的目的可以有许多模型,如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真,但不一定会飞,而参加航模竞赛的

模型飞机要具有良好的飞行性能。

模型可以分为**物质模型**和**理想模型**，前者包括**直观模型**、**物理模型**，后者包括**思维模型**、**符号模型**、**数学模型**等。

(1) **直观模型**指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常把原型的尺寸按比例放大或缩小，主要追求外观上的逼真。

(2) **物理模型**主要指科技工作者为了一定目的，根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且还可以用来进行模拟实验，间接研究原型的某些规律。物理模型可分为**实物模型**和**类比模型**。**实物模型**是指根据相似性理论制造的按原系统比例缩小（也可以是放大或与原系统尺寸一样）的实物，例如，风洞实验中的飞机模型、水力系统的实验模型、建筑模型、船舶模型等。**类比模型**是指在不同的物理学领域（力学的、电学的、热学的、流体力学的等）系统中各自的变量有时服从相同的规律，根据这个共同规律可以制出物理意义完全不同的比拟和类推的模型。

(3) **思维模型**指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验的形式直接储存在大脑中，从而可以根据思维或直觉做出相应的决策，如汽车司机对方向盘的操作。

(4) **符号模型**指在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定的形式组合起来的描述模型，如地图、电路图，具有简明、方便、目的性强及非量化等特点。

(5) **数学模型**是对现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，并做出一些必要假设简化，进而运用适当的数学工具得到的一个数学结构。简单地说就是系统某种特征本质的数学表达式，或是用数学术语对部分现实世界的描述，即用数学式子（如函数、图形、方程等）来描述所研究的客观对象或系统在某一方面存在的规律。

数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践，即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学式表达，建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解。需要强调的是，衡量一个模型的优劣全在于它的应用效果，而不是采用了多么高深的数学方法。如果对某个实际问题，我们可以用初等方法和高深方法建立两个模型，而应用效果相差不大，那么受欢迎的一定是前者，而不是后者。

数学建模与计算机技术的关系密不可分，一方面，像对新型飞机设计、石油勘探、天气预报等数学模型中的数据处理，当然离不开巨型计算机，而微型计算机的普及使数学建模更快地进入人们的日常生活中。另一方面，以数字化为特征的信息正以爆炸之势涌入计算机，去伪存真，归纳整理，分析现象，显示结果……计算机需要人们给它以思维的能力，这些当然要求助于数学模型，所以把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比喻为如虎添翼，是恰如其分的。

1.2 数学建模方法、步骤、特点与分类

数学建模其实并不是什么新东西，可以说有了数学并需要用数学去解决实际问题时，就需要用数学的语言、方法去近似刻画该实际问题，这种刻画的数学表述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程。数学模型一经提出，就要用一定的技术手段（计算、证明等）来求解并验证，其中大量的计算往往是必不可少的，高性能计算机的出现使数学建模方法得

到了飞速发展, 计算和建模是数学科学技术转化为生产力的主要途径. 数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中, 可以培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题的能力, 那么, 怎样才能建立一个理想的数学模型呢?

1.2.1 数学建模的一般方法

(1) **机理分析方法**: 根据对现实对象特性的认识, 分析其因果关系, 找出反映内部机理的规律, 所建立的模型常有明确的物理或现实意义.

(2) **测试分析方法**: 将研究对象视为一个“黑箱”系统, 内部机理无法直接寻求, 通过测量系统的输入、输出数据, 并以此为基础运用统计分析方法, 按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型. 测试分析方法也叫做**系统辨识**.

(3) 将这两种方法结合起来使用, 即用机理分析方法建立模型的结构, 用系统测试方法来确定模型的参数, 也是常用的建模方法.

在实际过程中用哪一种方法建模主要是根据我们对研究对象的了解程度和建模目的来决定. 一般而言, 如果对研究对象了解深刻, 并掌握了一些机理知识, 模型也要求具有反映内在特征的物理意义, 一般可以以机理分析方法为主. 而如果对象的内在规律基本上不清楚, 模型也不需要反映内在特性, 如仅对于输出做预报, 那么可以尝试用测试分析.

1.2.2 数学建模的一般步骤

在实际生活中发现问题, 就需要对问题进行分析, 进而解决问题, 一种常用的方法就是建立数学模型. 建模经过哪些步骤并没有一定的模式, 通常与问题的性质、建模目的等有关.

测试分析方法是一套完整的数学方法, 以动态系统为主的测试分析称为系统辨识, 主要表现为: 动态数据对应的分析方法为时间序列分析; 横截面数据对应的分析方法为多元统计分析. 本书介绍了大量测试分析方法, 如回归分析、时间序列分析、聚类分析、主成分分析与因子分析, 这也是本书的特色之一.

图 1.2.1 给出的是机理方法建立数学模型的一般过程:

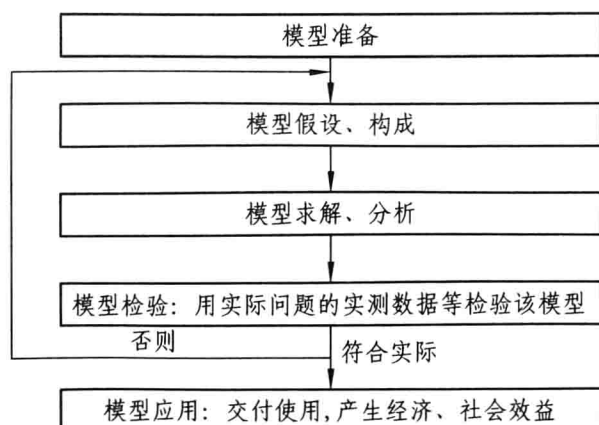


图 1.2.1 机理方法建立数学模型的一般过程

(1) **模型准备**: 首先要了解问题的实际背景, 明确建模目的, 搜集建模必需的各种信息, 如现象、数据等, 尽量弄清对象的特征, 由此初步确定用哪一类模型, 总之是做好建模的准备工作. 情况明才能方法对, 这一步一定不要忽视, 碰到问题要虚心向从事实际工作的同志请教, 尽量掌握第一手资料.

(2) **模型假设、构成**: 根据对象特征和建模目的, 对问题进行必要的、合理的简化. 用精确的语言做出假设是建模的关键一步. 一般来说, 一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题, 即使可能, 也很难求解. 不同的简化假设会得到不同的模型. 假设作得不合理或过分简单, 就会导致模型失败或部分失败, 这样就应该修改和补充假设; 假设作得过分详细, 试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去, 可能会使你很难甚至无法继续下一步工作. 作为假设的依据, 一是出于对问题内在规律的认识, 二是来自对数据或现象的分析, 也可以是二者的综合. 作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识, 又要充分发挥想象力、洞察力和判断力, 善于辨别问题的主次, 果断地抓住主要因素, 舍弃次要因素, 尽量将问题线性化、均匀化, 经验在这里也常常起着重要作用. 写出假设时, 语言要精确, 就像做习题时写出已知条件那样. 根据所作的假设分析对象的因果关系, 利用对象的内在规律和适当的数学工具, 构造各个量(常量和变量)之间的等式(或不等式)关系或其他数学结构. 这里除需要一些相关学科的专门知识外, 还常常需要较广阔的应用数学方面的知识, 以开拓思路, 当然不能要求对数学学科门门精通, 而是要知道这些学科能解决哪一类问题以及大体上怎样解决. 根据不同对象的某些相似性, 借用已知领域的数学模型, 也是构造模型的一种方法. 建模时还应遵循的一个原则是, 尽量采用简单的数学工具, 因为所建立的模型总是希望能有更多的人了解和使用, 而不是只供少数专家欣赏.

(3) **模型求解、分析**: 可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法, 特别是利用计算机技术. 对模型解答进行数学上的分析, 有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况, 有时要根据所得结果给出数学上的预报, 有时则可能要给出数学上的最优决策或控制, 不论哪种情况都可能要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等.

(4) **模型检验**: 把数学上分析的结果“翻译”到实际问题, 并用实际的现象、数据与之比较, 检验模型的合理性和适用性. 这一步对于建模的成败是非常重要的, 要以严肃认真的态度来对待. 当然, 有些模型如核战争模型就不可能要求接受实际的检验了. 模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际, 问题通常出在模型假设上, 应该修改、补充假设, 重新建模. 有些模型要经过几次反复, 不断完善, 直到检验结果获得某种程度上的满意.

(5) **模型应用**: 应用的方式自然取决于问题的性质和建模的目的, 这方面内容不是本书讨论的范围.

严格来说, 建立数学模型的方法和步骤并没有固定模式, 即并不是所有建模过程都要经过这些步骤, 有时各步骤之间的界限也不那么分明, 建模时不应拘泥于形式上的按部就班, 只要建立的模型与现实吻合, 能预测未来, 进而为决策提供有价值的参考即可, 但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征, 本书的建模实例就采取了灵活的表述方式.

1.2.3 数学模型的特点

数学建模是利用数学工具解决实际问题的的重要手段, 得到的模型有很多优点, 也有很多

缺点. 下面归纳数学模型的若干特点, 以期读者在学习中慢慢体会:

(1) **模型的逼真性和可行性**: 一般来说, 总是希望模型尽可能地逼近研究对象, 但一个非常逼真的模型在数学上往往难于处理, 即实际上不可行. 另一方面, 越逼真的模型, 越复杂, 即使数学上可以处理, 但所需要的“费用”也是相当高的, 而高的费用不一定与复杂模型产生的收益匹配, 所以实际建模时, 往往在逼真性和可行性, “费用”和效益之间做出合理的选择.

(2) **模型的非预制性**: 虽然现在已有很多模型供大家使用, 但实际问题千差万别, 不可能要求把各种模型做成预制品供你在建模时使用, 因此建模本身常常事先没有答案, 在建模过程中甚至会伴随新的数学方法或数学概念而产生.

(3) **模型的渐进性**: 稍微复杂一些的实际问题的建模通常不可能一次成功, 要经过上一节描述建模过程的反复迭代, 包括由简到繁, 也包括删繁就简, 以获得越来越满意的模型. 在科学发展过程中随着人们认识和实践能力的提高, 各门学科中的数学模型也存在着一个不断完善或者推陈出新的过程.

(4) **模型的条理性**: 从建模的角度考虑问题可以促使人们对现实对象的分析更全面、更深入、更具条理性, 这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度, 对问题的研究也是有利的.

(5) **模型的稳定性**: 模型的结构和参数常常是由对象的信息如观测数据确定的, 而观测数据是允许有误差的. 一个好的模型应该具有下述意义的稳定性(强健性): 当观测数据(或其他信息)有微小改变时, 模型结构和参数只有微小变化, 并且一般也应导致模型求解的结果有微小变化.

(6) **模型的技艺性**: 建模的方法与其他一些数学方法如方程解法、规划解法等是根本不同的, 无法归纳出若干条普遍适用的准则和技巧, 而经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等起的作用往往比一些具体的数学知识更大.

(7) **模型的可转移性**: 模型是现实对象抽象化、理想化的产物, 它不为对象的所属领域所独有, 可以转移到另外的领域. 在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型, 模型的这种性质显示了其应用的极端广泛性.

(8) 模型的局限性:

① 由于模型是现实对象简化、理想化的产物, 所以一旦将模型的结论应用于实际问题, 就回到了现实世界, 那些被忽视、简化的因素必须考虑, 于是结论的通用性和精确性只是相对的和近似的.

② 由于人们的认识能力和科学技术, 包括数学本身发展水平的限制, 还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型.

③ 有些领域中的问题今天尚未发展到用建模方法寻求数量规律的阶段, 如中医诊断过程, 目前所谓计算机辅助诊断也是属于总结著名中医的丰富临床经验的专家系统.

1.2.4 数学模型的分类

依据不同的标准, 数学模型可分为不同的类型.

(1) 按研究方法和对象的数学特征可分为几何模型、优化模型、微分方程模型、图论模型、概率模型、统计模型等.

(2) 按研究对象的实际领域(或所属学科)可分为人口模型、交通模型、环境模型、生

态模型、城镇规划模型、污染模型、经济模型、社会模型等。

(3) 按照某些的表现特征又可分为:

- ① 确定性模型与随机性模型, 取决于是否考虑随机因素的影响;
- ② 静态模型与动态模型, 取决于是否考虑时间因素引起的变化;
- ③ 线性模型与非线性模型, 取决于某些基本关系, 如微分方程是否是线性的;
- ④ 离散模型和连续模型, 指模型中的变量取为离散还是连续的。

虽然从本质上说大多数实际模型是随机的、动态的、非线性的, 但由于确定性、静态、线性模型容易处理, 且往往可作为初步的近似来解决问题, 所以在建模的时候时常先考虑确定性、静态、线性模型。连续模型便于利用数学理论做理论分析, 而离散模型便于计算机做数值计算, 所以用哪种模型要看具体问题而定。

(4) 按建模目的可分为预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

(5) 按了解程度可分为白箱、灰箱、黑箱模型。

白色系统是指一个系统的内部特征是完全已知的, 即系统的信息是完全充分的, 如自由落体运动。**灰色系统**的一部分信息是已知的, 另一部分信息是未知的, 系统各因素间具有不确定关系。**黑色系统**是指一个系统的内部信息对外界来说是一无所知的, 只能通过同外界的联系加以观察研究。对它们建立的模型, 分别称为白箱、灰箱、黑箱模型。白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题, 这方面的模型大多已经基本确定, 还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了。灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象, 在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。至于黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象。有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理, 但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理。当然, 白、灰、黑之间并没有明显的界限, 而且随着科学技术的发展, 箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的。

1.3 怎样学习数学建模及组织数学建模竞赛

用数学建模解决实际问题, 首先是用数学语言表述问题即构造模型, 其次才是用数学工具求解构成的模型。数学建模不仅需要广博的知识和足够的经验, 还特别需要丰富的想象力、洞察力、判断力及创造力。**想象力**是人在已有形象的基础上, 在头脑中创造出新形象的能力。比如当说起汽车, 会马上想象出各种各样的汽车形象就是这个道理。A. Einstein 有一句名言: 想象力比知识更重要, 因为知识是有限的, 而想象力包括世界的一切, 推动着进步, 并且是知识的源泉。**洞察力**是指人们在充分占有资料的基础上, 经过初步分析能迅速抓住主要矛盾, 舍弃次要因素, 简化问题的层次, 对可以用哪些方法解决面临的问题以及不同方法的优劣做出判断, 通俗地讲, 洞察力就是透过现象看本质。

数学建模与其说是一门技术, 不如说是一门艺术, 技术大致有章可循, 艺术无法归纳成普遍适用的准则, 那怎样才能学好数学建模呢?

(1) 掌握基本数学理论与计算机软件, 数学理论主要有: 概率与统计、运筹学、常微分方程等; 计算机软件主要有: MATLAB、Excel、SPSS、SAS 及 Lingo 软件。当然, 术业有专

攻, 我们可结合自己的特长, 主攻某些方面. 比如, 对于统计专业人士, 重点学习 SPSS 和 SAS 软件, 尽量精通必备的统计学理论和随机模拟, 了解优化理论和微分方程; 对于其他专业, 重点学习 MATLAB 和 SPSS 软件.

(2) 博学, 具有一定的背景知识, 比如物理、生物、交通等.

(3) 学习、分析、评价、改进别人做过的模型, 并亲自动手作几个实际题目.

(4) 实战是最好的学习过程, 相信自己, 积极参加数学建模竞赛. 如果是指导老师, 则有机会多次参加数学建模竞赛.

目前, 数学建模竞赛题目的数据量越来越大, 对数据处理的能力要求越来越高. 如果参加全国大学生数学建模竞赛, 建议组建的团队要有互补性, 即三个参赛学生中, **最好一个擅长数据分析, 一个擅长理论分析, 一个擅长写作**, 而指导老师也要能力全面且具有实战经验. 以作者为例, 虽然统计专业毕业, 但求学阶段主要进行理论推导, 所以刚开始指导数学建模时, 虽然熟悉统计理论, 也知道用什么方法分析, 但不会软件操作. 不过经过几年的学习, 现在基本可以运用软件分析数据, 胜任数学建模的指导工作了. 作者建议数学建模指导教师平时要结合自身专业进行知识积累, 尤其要重软件操作, 最好任教“数学建模”, 或“运筹学”, 或“常微分方程”, 或统计专业课, 如“多元统计分析”、“时间序列分析”. 作为数学建模任课老师或竞赛指导老师要平时加强对参赛学生的培训, 不要平时不努力, 到时抱佛脚, 同时学院领导应从宏观上规划教学大纲, 尽量不要将“数学建模”开在“运筹学”、“概率与统计”及“常微分方程”之前, 在讲这些课程时尽量开设上机课, 以增强学生的软件实现能力.

对于某些院校, 指导老师和参赛学生为了各自利益, 踊跃参加, 结果使参赛队伍水平参差不齐, 大大降低了获奖概率. 作为学校主管领导, 一定要严格选拔参赛学生和指导老师, 控制参赛队数, 采用强强联合模式, 即不要指导老师水平高, 而参赛学生水平低. 不客气地说, 就是参赛学生可有可无, 竞赛题基本由指导老师分析, 竞赛论文由老师代笔! 作为校方主管部门, 怎样才能更好地组织学生呢? 下面提供几个具有可操作性的建议:

(1) 加强“数学建模”课程建设. 比如, 组织学院有经验的老师编著适合自己的《数学建模》教材, 尽量反映竞赛试题的实用处理方法, 突出软件分析, 因为虽然目前市场上的《数学建模》教材类型繁多, 各有特点, 但很多教材陈旧, 甚至是 20 世纪 90 年代编写的, 实用性不强.

(2) 参赛学生尽量必修或选修“数学建模”课程, 尤其是刚升入大四的学生. 当然为了培养新人, 每个参赛队伍可选取一位优秀的大三学生. 任课老师尽量具有数学建模竞赛实战经验.

(3) 组织学生进行选拔考试, 成绩优秀者可参加数学建模竞赛.

(4) 对参赛学生进行赛前针对性培训, 这应由学院有经验的获奖作者组织实施. 例如, MATLAB 软件基本操作, 利用 Excel 软件进行数据初步处理, 统计建模及软件实现, 优化理论及 Lingo 实现, 微分方程建模及软件实现, 图论建模等.

(5) 加大奖励力度.

数学建模竞赛最终体现的是数学建模论文, 而论文又是评价小组建模工作的唯一依据, 况且竞赛要求在三天时间内完成建模的所有工作, 包括论文写作, 所以说时间是非常紧迫的, 那么怎样才能撰写出理想的数学建模论文呢? 在写作论文时, 建模小组成员应齐心协力, 既

要各司其职，又要通力合作，要做好这一点，必须对整个建模工作加以分工，理清各部分工作的并行或先后顺序关系以及在整个工作中的地位和作用。负责各部分工作的成员，应将自己的工作完整地记录下来。小组内应有一个主笔人，负责对文章的整体把握，包括拟定写作提纲和论文书写。论文写出后，小组内的其他成员必须参与论文的检查 and 修订工作，通过检查和修订可使每位成员检验自己的工作是否准确无误地表达出来了，另一方面出于惯性思维，主笔人很难检查出自己的错误。

虽然数学建模论文没有固定的格式，但根据作者多年的参加数学建模竞赛的经验，在附录中给出了往年数学建模竞赛获奖作品以供读者参考。数学建模论文的一般格式如下：

(1) **题目**：论文题目是一篇论文的第一个重要信息，要求简短精练，高度概括，准确得体，恰如其分。

(2) **摘要**：摘要是非常重要的部分，主要包括：**问题、模型、方法、结果以及模型的检验和推广**。论文摘要语言要简练、概括，尤其要突出论文优点，如巧妙的建模方法，快速有效的算法和合理的推广。

(3) **问题重述**：撰写这部分内容时，不要照抄原题，应把握问题的实质，再用精练的语言论述。

(4) **模型假设**：要根据问题的特征和建模的目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，对问题进行必要的简化，做一些合理假设。假设不合理或太简单，会导致错误或无用的模型；假设太详细，会导致工作很难或无法继续下去。

(5) **分析与建立模型**：尽量采用简单的数学工具，使建立的模型易于理解，对所用的变量、符号、计量单位做解释。特定的变量和参数在整篇论文中应保持一致，可借助适当的图形、表格来描述问题和数据。

(6) **模型求解**：使用各种数学方法和软件求解模型，包括公式的推导、算法步骤和计算结果，计算机程序应尽量放在附录中。

(7) **模型检验**：将求解和分析结果“翻译”到实际问题，与实际现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性。如果结果与实际不符，应重新建立模型。

(8) **模型推广**：将该模型推广到更多类似的问题，或讨论更一般情况下的解法，或指出可能深化、推广及进一步研究的建议。

(9) **参考文献**。

(10) **附录**：附录是正文的补充，与正文有关而又不便编入正文的内容都收集在这里，包括：计算机程序、比较重要但数据较大的中间结果等。

思考：据了解，在某些院校，数学建模竞赛题基本上由指导老师做，可以说参赛学生可有可无。请问，在数学建模竞赛中，指导老师与参赛学生的作用各是什么？为什么有些指导老师会替参赛学生做题呢？怎样才能保证指导老师不越位？作为参赛组织方，怎么区分试题是指导老师和参赛学生做的呢？普通院校与重点院校的学生能一起参加比赛么？

习题 1

1. 举出两个例子，说明数学建模的必要性。包括实际问题的背景、建模目的，需要大体

上建立什么样的模型以及怎样利用这种模型等.

2. 怎样解决下面的实际问题, 包括需要哪些数据资料, 要做些什么观察、试验及建立什么样的数学模型.

(1) 估计一池塘内鱼的数量.

(2) 估计一批日光灯的寿命.

(3) 决定十字路口黄灯亮的时间.

3. 为了培养想象力、洞察力和判断力, 考虑对象时除了从正面分析外, 还常常需要从侧面或反面思考. 请尽快回答下面问题.

(1) 甲早上 8:00 从山上旅店出发, 沿一条路径上山, 下午 5:00 到达山顶并留宿, 次日早上 8:00 沿同一路径下山, 下午 5:00 回到旅店. 乙说: 甲必须在两天中的同一时刻经过路径中的同一点. 为什么?

(2) 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学, 每天同时放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家. 一小狗以 6 km/h 的速度由男孩奔向女孩, 又从女孩奔向男孩, 如此往返直至回到家中, 问小狗奔波了多远?

2 初等数学模型

2.1 名额分配问题

1) 问题的提出

名额分配问题是西方所谓的民主政治问题. 美国宪法第一条第二款指出: “众议院议员名额……将根据各州的人口比例分配…….” 美国宪法从 1788 年生效以来 200 多年间, 关于“公平合理”地实现宪法中所规定的分配原则, 美国的政治家和科学家们展开了激烈的讨论, 并提出了多种方法, 但没有一种方法能够得到普遍的认同. 下面就日常生活中的实际问题, 考虑合理的分配方案问题.

某学院有甲、乙、丙三个系, 1999—2002 年各系学生人数如表 2.1.1 所示. 学校每年都要给各系分配学生会委员的名额, 委员总数为 20 人.

(1) 试给出分配方案, 将 20 个名额分配各系, 使分配结果尽可能公平.

(2) 如果总名额增加了一个, 应将该名额分给哪个系?

表 2.1.1 1999—2002 年各系学生人数

年份	甲系	乙系	丙系	总人数
1999	100	60	40	200
2000	107	59	34	200
2001	104	62	34	200
2002	103	63	34	200

2) 问题分析

上述问题是要将名额尽可能公平地分配到各系, 因此, 首先需要将“公平”量化. 所谓公平, 就是每个学生的名额占有率都相等. 这样, 基于名额占有率相等的分配方案就是公平的. 在名额占有率不相等时, 应要求差距尽可能地小, 才能使分配方案尽量达到公平. 其次, 再计算出各系的名额占有量, 这样就确定了公平的分配方案. 但是, 通常计算得出的名额占有量有可能是小数, 而名额只能正整数分配, 这就需要将小数变成正整数. 解决小数变整数的问题通常采用四舍五入法.

3) 定义与说明

$$\text{名额占有率} = \frac{\text{总名额数}}{\text{总人数}}.$$

$$\text{名额占有量} = \text{名额占有率} \times \text{学生数}.$$

4) 模型建立与求解

模型一 按照名额占有率分配.

根据问题分析, 可以计算出全院学生的名额占有率 $= \frac{20}{200} = 10\%$, 即每 10 人拥有一个名额. 由此建立分配方案 (见表 2.1.2).