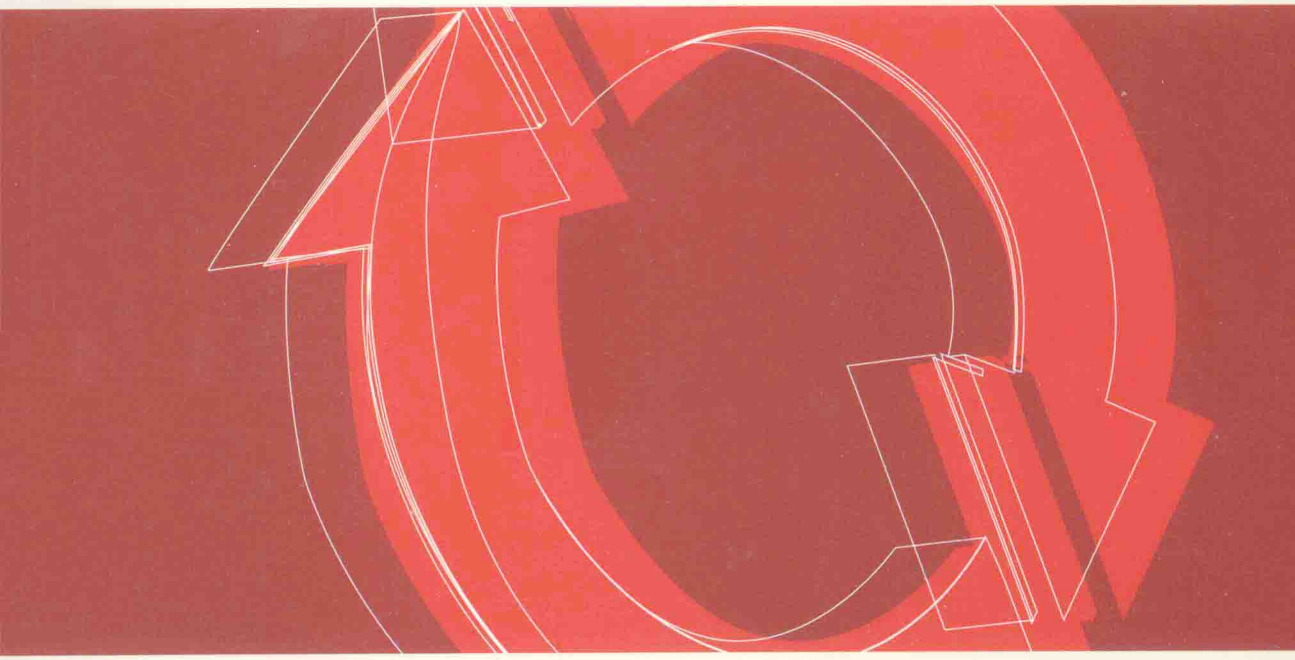
变分法基础

（第3版）

老大中 著



国防工業出版社
National Defense Industry Press

变分法基础

（第3版）

Fundamentals of the Calculus of Variations

（Third Edition）

老大中　著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是变分法方面的专著，书中系统地介绍变分法的基本理论及其应用。

编写本书的目的是希望为高等院校的研究生和高年级大学生提供一本学习变分法课程的教材或教学参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法。本书内容包括预备知识、固定边界的变分问题、可动边界的变分问题、泛函极值的充分条件、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理、变分问题的直接方法、力学中的变分原理及其应用以及含向量、张量和哈密顿算子的泛函变分问题。其中许多内容是作者多年来的研究成果，特别是提出完全泛函的极值函数定理，统一了变分法中的各种欧拉方程，创立含向量、向量的模、任意阶张量和哈密顿算子的泛函的变分理论，给出相应的欧拉方程组及自然边界条件，扩大了变分法的应用范围。本书也可供有关专业的教师和科技人员参考。

本书概念清楚，逻辑清晰，内容丰富，深入浅出，便于自学，既注重方法的介绍，又不失数学的系统性、科学性和严谨性。书中列有大量例题和习题，并附有中英文索引。为了帮助读者解决学习中遇到的困难，本书给出了各章共315道习题的全部解答过程及答案，供读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

变分法基础/老大中著. —3版. —北京：国防工业出版社，2015.1

ISBN 978-7-118-09730-6

Ⅰ.①变…　Ⅱ.①老…　Ⅲ.①变分法　Ⅳ.①O176

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第230310号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码 100048）

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 40　字数 1097 千字

2015年1月第3版第1次印刷　印数 1—2500册　定价 89.00元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：（010）88540777　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　发行业务：（010）88540717

第3版 前言

本书第2版出版后，国家图书馆又给予收藏。国内许多大学的图书馆都收藏了本书第1版或第2版，或这两版都收藏，其中在全国39所985大学中，有37所大学的图书馆收藏了本书。当然更多收藏本书的还是广大读者，有些读者甚至把本书像文物一样来收藏，真是出乎作者的意料。第2版已印刷了3次，还是供不应求。在此再次谨向收藏、使用和关心本书的单位和读者致以谢意。

应本书责任编辑王京涛同志之约，决定再版本书。其实，早在2007年5月本书第2版排版之际，作者就已着手第3版的写作了。借此机会作者把近年来尚未公开发表的变分法研究成果奉献给读者。

这次再版，修正了本书第2版中所发现的错误和不当之处。回想在第2版付梓之前，为保证本书质量，作者就曾七次修改书稿，出版社的编辑更是不辞辛苦，八次审改、校对书稿。不仅如此，作者在2007年5月曾经与排版、校对和插图等技术人员一起工作了三天，即便这样，也未能避免书中的个别错误和不当之处。这一版在写作上必然还会出现错误和不当之处，希望读者海涵和批评指正。

与第2版相比，前9章做了不同程度的修改，删去了部分内容，增加、改写了部分内容。例如，第4章第4节例题做了适当修改，其余部分全部改写。第7章扩展了希尔伯特伴随算子的内涵，提出其他三种伴随算子的定义，为泛函分析注入了新的内容。第9章增加了哈密顿正则方程一节。作者的同学辽宁阜新化工厂前厂长赵宝庭高级工程师和丹东化纤设计院设备室主任赵珊珊高级工程师参与了第9章的修改。

这一版最重要的变化是增加了第10章含向量、张量和哈密顿算子的泛函变分问题，为此提出一系列新的概念、新的理论和新的思想方法。这一章首先讨论n阶张量并联式和串联式两种内积运算的性质，在此基础上提出含n阶张量的泛函变分基本引理；接着讨论以标量、向量、向量的模和哈密顿算子即用梯度、散度和旋度表示的泛函变分问题，给出相应的欧拉方程组和自然边界条件；然后分别在向量和二阶张量范围内列举了数十个含梯度、散度和旋度的泛函的变分算例，以此来说明怎样获得此类泛函的欧拉方程组和自然边界条件；最后分别讨论了两类含n阶张量、张量的迹、转置张量、哈密顿算子以及哈密顿算子串等泛函的变分问题，获得相应的欧拉方程组和自然边界条件。给出若干实例来说明欧拉方程组的用法。与其说这些算例验证了本章提出的理论的正确性，还不如说本章提出的理论在这些实际问题中得到应用更合适。为使读者对照参考文献方便，所引用的实例基本保持原貌，仅有个别地方做了改动。本章由赵珊珊和本人共同撰写，是我们多年来通力合作研究变分法所取得的成果。正是她的许多奇思妙想，才使本章呈现出书中的样子。

书中共有 315 道习题(未计入子习题),全部给出解题过程及答案,供读者参考。

本书论述的科学技术范围广泛,仅就第 10 章而言,就涉及数学物理方法、线性与非线性弹性理论、流体力学、传热学、低温物理学、电磁场理论、电动力学、量子力学、信息科学、声学、医学、生物学、材料学等十几门学科,全书涉及数十个学科,这与变分法这门数学学科高度的抽象性和广泛的适用性有关。

常言道科学无国界,变分法不仅受到中国学生的喜欢,同样也受到外国学生的喜欢,例如,在作者教过的学生中,就有卢旺达来华留学生德利(NSHIMIYIMANA, Jean de Dieu)和贝加明。

如果说科学技术是第一生产力,那么数学科学就是第一生产力的第一要素,而变分法就是其中的组成部分。作为变分法的爱好者,一直致力于把个人兴趣和实际需要相结合,努力做到从源头上创新,为创造社会财富提供新的源泉。作者能为变分法的发展做出贡献而深感愉悦和欣慰,也在原创过程中和为取得的研究成果而在精神上得到数学美的享受。

本书在写作过程中,得到过多人的帮助。作者的学生、清华大学直博生何婷女士为本书收集了部分例题和习题。清华大学李东海教授、北京理工大学前党委书记谈天民教授和陈晋南教授审阅了第 10 章的部分内容,美国科罗拉多州立大学 John D. Williams 教授和北京理工大学青年教师谢侃博士审阅了第 10 章的部分英文书稿,并提出有益的意见和建议。作者的同学天华化工机械及自动化研究设计院副总工程师、橡塑机械研究所所长娄晓鸣高级工程师和兰州石油化工职业技术学院郭艳霞教授审阅了第 10 章的全部内容和第 4 章的部分内容。许多读者来信指出本书第 2 版的舛误之处或给予作者建议。第 2 版出版后曾得到北京理工大学的奖励。国家图书馆、清华大学图书馆和北京理工大学图书馆为作者查阅文献提供了极大便利。北京阅微精创教育科技有限公司的技术人员对本书进行了精美的设计排版,在此一并表示衷心感谢。

变分法就像宋词所说的那样:"悠然心会,妙处难与君说",很多学者也都认为变分法这门学科妙不可言,事实也的确如此,所以作者长期在研习它。但作者觉得变分法更像本家老聃在道德经里的一句话"玄之又玄,众妙之门"。看到本书,就等于掌握了开启变分法这扇众妙之门的钥匙,随时都可开启并进入这扇众妙之门,从中体验无穷的妙趣。

金刚经说得好:"说法者,无法可说,是名说法。"对本书而言,也是如此。

作者 E-mail 地址:laodazhong@tsinghua. org. cn （永久网址）

laodazhong@bit. edu. cn

老大中

2014 年 8 月初稿于辽宁铁岭

2014 年 12 月修改于北京

第2版 前言

本书第1版出版后，收到了许多读者来信，对本书给予肯定，国家图书馆和国内许多大学的图书馆都收藏了本书，并被列为专著，这使作者深受感动与鼓舞，在此谨向收藏、使用和关心本书的单位和读者致以谢意。

本书第1版于2004—2006年曾用作三届北京理工大学航空宇航推进理论与工程专业硕士研究生的《变分法》选修课教材。在此期间，作者还多次给有关专业的本科生、硕士生和博士生讲授了本书的部分内容。

应国防工业出版社之约，决定本书出第2版。这次再版，修正了第1版中所发现的错误和不当之处，增加、改写了部分例题和习题。书中共有226道习题（未计入子习题），全部给出解题过程及答案，供读者参考。

增加了部分内容，增设了第9章力学中的变分原理及其应用；把原书第5章第4节的哈密顿原理放到了第9章中；增加、改写了书中出现的科学家简介；等等。

不少初学者都认为变分法比较抽象难学，常为变分法中出现的各种概念所困惑，这说明他们还没有充分掌握变分法的基本观点和思想方法。不错，《简明不列颠百科全书》也认为变分法是最吸引人、最重要而又最难的数学分支之一。作为数学的一个分支，变分法确实有些抽象，这是正常的，因为数学的特点之一就是它的高度抽象性。比较难学也是事实，但难学也是可以学会的，学会了就不觉得难了。

子曰："吾道一以贯之。"这是《论语·里仁》里的一句话，意思是孔子说他是用一个基本观点把他的学说贯穿起来的。"一以贯之"这句话可以称得上是古代圣贤的"心学"。事实上，并不是任何事情都可以"一以贯之"的。那么，学习变分法是否可以"一以贯之"呢？回答应该是肯定的。泛函取极值的必要条件是一阶变分等于零，这就是变分法的"一以贯之"。掌握了这个主旨，变分法就不那么难学了。

根据"一以贯之"这个基本观点，本书作者论述了变分法中含有任意个自变量、任意个多元函数和任意阶多元函数偏导数的完全泛函的变分问题，提出并证明了完全泛函的变分问题的定理，采用偏微分算子，给出了完全欧拉方程组，该方程组包括了变分问题的各种欧拉方程。所提出的这个定理的作用还难以预料，相信读者一定能够运用这个定理解决更多的问题。本书作者认为，这是作者近年来对变分法这门学科做出的最重要的研究成果，也是对变分法这门学科的发展做出的最重要贡献。

还是从"一以贯之"这个基本观点出发，本书作者还论述变分法中依赖于单自变量的多个未知函数及其高阶导数且待定边界的泛函的变分问题，提出并论证了

当泛函的一阶变分为零的情况下，可动端点的各变分项一般并非相互独立，而是至少要有一项为零或至少要给出一个已知条件的新见解，给出了此类泛函的变分问题的若干新的定理和推论。这是本书作者近年来对变分法这门学科的发展做出的另一个贡献。

变分法这门学科就像一座富矿，其中有许多宝藏尚待人们去探索、发现和开采。数学是历史发展进程的标志，是人类智慧的结晶，是人类永远的知识财富和精神财富，永远都不会过时，而变分法就是其中的重要组成部分。

虽经作者一再努力，力求使本书精益求精，但限于作者水平，书中可能还会有不当之处，希望读者批评指正。

作者 E-mail 地址：laodazhong@tsinghua.org.cn
laodazhong@bit.edu.cn

老大中
2006 年 12 月于北京

第1版 前言

变分法是17世纪末发展起来的一门数学分支。本书主要介绍古典变分法，它理论完整，在力学、物理学、光学、摩擦学、经济学、宇航理论、信息论和自动控制论等诸多方面有广泛的应用。20世纪中叶发展起来的有限元法，其数学基础之一就是变分法。如今，变分法已成为研究生、大学生、工程技术人员和科学工作者必备的数学基础。

编写本书的目的是为高等院校的研究生和高年级大学生提供一本学习变分法的教材或教学参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法，其中包括预备知识、固定边界的变分问题、泛函极值的充分条件、可动边界的变分问题、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理和变分问题的直接方法。书中的一部分内容是作者的研究成果。本书也可作为有关专业的教师、科学研究人员和工程技术人员的参考书。

具有高等数学知识的读者就可阅读本书，当然，如果读者具有线性代数、物理学和力学等基础知识，阅读本书就会更容易。

在作者看来，衡量对于一门数学学科知识的掌握程度，有两个基本的检验手段：一是看是否清楚基本概念，因为概念是构建科学大厦的基石；二是看是否会计算习题，因为计算习题的过程就是消化知识的过程，同时也是加深理解概念的过程，只有会计算习题，才能达到会应用的目的。对于变分法这门数学分支来说，如果只会机械地背诵书上的概念和定理，而不动手演算习题，恐怕掌握不好这门知识。书中例题和习题比较丰富。各章均配有相当数量的习题，大多数习题选自本书所附的参考文献，在此谨向这些参考文献的作者表示感谢。为了帮助读者加深对基本概念的理解和解决学习中遇到的困难，本书提供了各章共145道习题（没计入子习题）的全部解答或证明，其中包括参考文献2（注：即第2版参考文献[3]）中几乎全部习题的解答，供读者参考，同时这些习题解答也可看作是书中例题的补充。

变分法是一门饶有趣味的数学学科，作者本人就曾在变分法的学习和教学过程中体验到这种趣味。但作者认为学以致用才是更重要的目的。希望读者以愉悦的心情阅读本书，能从本书中学到所需要的知识，并能把这些知识应用到实践中去。在计算机高速发展的时代，为了提高计算精度和应用的普遍性，特别是在第8章中，一些例题和习题的解尽量给出分数和代数的形式，这很容易变成小数形式和具体形式。

为使读者了解变分法的发展历史，本书还对其中所涉及的37位科学家进行了300余字以内的简要介绍，其中的译名以1993年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》为准。

本书初稿曾经用作三届北京理工大学工科硕士研究生的讲座材料，并给博士

研究生和大学四年级学生讲授过部分内容。

作者在本书编写过程中曾得到北京理工大学前党委书记谈天民教授的指导与帮助。国防工业出版社张文峰处长对本书出版给予了大力支持。研究生李雪芳、李秀明帮助作者校验了部分习题。在此谨表示衷心感谢。

限于作者水平，书中若有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作者的通讯地址：laodazhong@tsinghua.org.cn

老大中

2003 年 9 月于北京

目　录

Contents