普通高等教育"十二五"规划教材
武汉大学数学教学丛书

多元复分析

DUOYUAN FUFENXI

涂振汉 编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

武汉大学数学教学丛书

多元复分析

涂振汉　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

多元复分析是现代数学中非常活跃的学科之一,其内容广泛、发展迅速. 本书是学习多元复分析的一本基本教材. 内容分为 8 章：多复变全纯函数与全纯映照、$\overline{\partial}$ 方程与延拓定理、复解析集、全纯域与全纯凸域、多重次调和函数、拟凸域、拟凸域上的 $\overline{\partial}$ 问题的存在性定理及 L^2 估计、L^2 延拓定理及其应用. 另外, 本书每章都配置了适量的习题. 凡具有大学复变函数、实变函数和泛函分析的读者都能读懂本书. 本书内容丰富、叙述清晰、论证严谨, 为进一步深入到多复变、复几何、代数几何、几何分析等前沿领域提供了扎实的分析基础.

本书可作为高等学校数学、统计学、物理学、力学等专业本科生及研究生的教材, 也可供对多元复分析有兴趣的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

多元复分析/涂振汉编著. —北京：科学出版社, 2014.11

(武汉大学数学教学丛书/陈化主编)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-042277-4

Ⅰ. ①多…　Ⅱ. ①涂…　Ⅲ. ①复分析-高等学校-教材　Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 248205 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：蔡　莹

责任印制：高　嵘／封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015 年 2 月第　一　版　开本：B5(720×1000)

2015 年 2 月第一次印刷　印张：14 1/4

字数：269 000

定价：36.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《武汉大学数学教学丛书》编委会

前　　言

多元复分析是研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的学科, 它形成较晚, 但发展迅速. 多元复分析是单变量复分析的自然推广. 早在 19 世纪末, 人们就已经能将单复变一部分结果没有多大困难平行地推广到多复变情形. 但是, 进入 20 世纪后, 人们很快就发现多复变与单复变有着显著的区别.

多复变的两个重要发现揭示了多复变全纯函数本质上的独特性. 1906 年, Hartogs 发现在 $\mathbf{C}^2$ 中存在这样的区域 D 使得 $\mathbf{C}^2$ 中有一个包含它的更大的区域 G, 满足 D 上的任何全纯函数都可全纯开拓到区域 G 上. 这个现象在单复变情形显然是不存在的. 1907 年, Poincaré 证明了不存在从 $\mathbf{C}^2$ 中的单位球到 $\mathbf{C}^2$ 中的多圆柱的双全纯映射. Poincaré 定理说明单复变的 Riemann 映射定理在多复变情形不再成立. 这些在多复变情形所特有的现象便是多元复分析的主要研究内容.

由 Hartogs 的发现所产生的一个根本问题便是该在什么样的区域上讨论全纯函数. 区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 称为全纯域, 如果不存在更大的包含 D 的区域 G, 使任何 D 上的全纯函数都可以全纯开拓到 G 上. 首先, 多复变全纯函数的性质在很大程度上由定义区域的几何和拓扑性质所制约. 在多复变函数论的历史发展中, 全纯域的刻画长时期处于主导的地位, 也是本书讨论的重点内容之一. 其次, 单复变中全纯函数的零点是孤立的, 而多复变全纯函数的零点已经不再是孤立的, 其结构自然也比较复杂. 复解析集局部为若干个多复变全纯函数的公共零点集, 它与代数、几何有着很深的渊源. 光滑的复解析集便是复流形. 类似线性方程组的解的刻画在线性代数中的位置, 复解析集的相关研究在多复分析中也有着特别重要的地位. 因此, 为了研究多复变情形的这些特有的问题, 我们往往需要引入许多现代数学 (如: 偏微分方程、实分析、泛函分析、代数几何、微分几何等) 的工具与方法, 而多复分析的发展又推动着这些研究领域的发展.

多元复分析是现代数学中非常活跃的学科之一, 其内容丰富, 影响广泛. 多元复分析已成为很多研究领域 (如: 函数论、解析数论、复几何、代数几何、几何分析以及物理中的量子场论和超弦理论等) 工作者的必备知识. 鉴于目前国内的多元复分析中文教材缺乏, 编写本书的目的就是希望为大学数学专业研究生和高年级本科生提供一个这方面的基础读物, 为有志于深入到多复变、复几何、代数几何、几何分析等前沿领域的青年提供一些帮助.

本书内容分为 8 章.

第 1 章介绍多复变全纯函数与全纯映照的基本性质. 1.1 节包含多复变全纯函

数的 n 重幂级数理论、唯一性定理、Cauchy 不等式、Weierstrass 定理、Montel 定理、开映照定理、极大模原理、Schwarz 引理; 1.2 节包含多复变全纯映照的逆映照定理、隐函数定理、极大模原理; 1.3 节包含 $\mathbf{C}^n$ 中的复子流形的局部参数化定理; 1.4 节证明了单射全纯映照的复 Jacobian 行列式处处非零; 1.5 节包含 Cartan 定理、球的全纯自同构群、多圆柱的全纯自同构群、Poincaré 定理 (即高维的球与多圆柱不是双全纯等价的); 1.6 节包含 Bergman 核函数和 Bergman 度量. 本章内容是以后各章节的基础.

第 2 章介绍 $\overline{\partial}$ 方程与全纯延拓定理. 2.1 节和 2.2 节主要包含齐次 $\overline{\partial}$ 方程解的正则性; 2.3 节证明了多圆柱上的非齐次 $\overline{\partial}$ 方程解的存在性定理 (即 Dolbeault 定理); 2.4 节利用 $\overline{\partial}$ 方程证明了 Hartogs 延拓定理, 另外还给出了区域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 中的某复超平面域上任一全纯函数都能全纯延拓到 Ω 上的一个充分条件; 2.5 节介绍了 $\mathbf{C}^n$ 中光滑 $2n-1$ 维实子流形上的切向 $\overline{\partial}$ 方程和 Bochner-Severi 延拓定理 (该延拓定理涉及将 $\mathbf{C}^n$ 中具有光滑边界的有界域 D 的边界上满足切向 $\overline{\partial}$ 方程的可微复函数如何全纯延拓到 D 内), 同时还证明了高维的 Bochner-Martinelli 积分公式 (即推广的 Cauchy 积分公式). 弄懂 2.5 节需要高维的 Stokes 公式作基础, 但跳过此节并不妨碍后面的阅读.

第 3 章介绍复解析集. 复解析集局部为若干个多复变全纯函数的公共零点集. $\mathbf{C}^n$ 中的复子流形即为光滑的复解析集. 3.1 节包含 Weierstrass 预备定理与 Weierstrass 除法定理. 3.2 节主要包含交换代数基础, 主要是诺特环基本性质. 3.3 节介绍复解析集基本概念, 如复解析集的光滑点、奇异点、维数, 然后证明了解析芽可分解为有限个不可约解析芽的并, 同时还证明了 Riemann 第一延拓定理. 3.4 节利用多项式理论证明了主解析集的局部参数化定理, 并且给出了主解析集的光滑部分是连通复流形的一个充要条件, 同时还介绍了复解析集的 Hausdorff 维数. 3.5 节首先证明了复解析集的局部逆紧投影映照的存在性, 然后证明了逆紧投影映照将复解析集映照为复解析集, 并保持维数不变. 通过研究与复解析集横截相交的复仿射子空间的维数得到了复解析集维数的又一定义. 并利用复解析集的局部参数化定理得到了复解析集的各种局部结果, 同时还证明了 Riemann 第二延拓定理. 3.6 节主要证明了复解析集可分解为一些整体不可约解析分支的局部有限并, 同时给出了复解析集一些相关的整体结论. 本章这些内容是复分析与复几何的基础知识, 它又与代数几何有着很深的渊源. 本章的构思主要来源于 Chirka 的相关著作, 它十分强调分析与几何技巧在复解析集研究中的作用, 而较少涉及交换代数. 这一套处理方式较容易与我们学生的知识背景相衔接, 使初学者很快获得一个复解析集的直观轮廓. 由于复解析集是带有“奇异点”的复流形，阅读本章最好（但不必须）具有微分流形的基础知识.

第 4 章介绍全纯域与全纯凸域. 所谓全纯域, 即为 $\mathbf{C}^n$ 中的那样的区域, 在该

区域上存在全纯函数, 它不能被全纯延拓到该区域之外. 本章将主要研究全纯域的特点和性质, 除此之外还介绍了 Reinhardt 域和全纯凸域等基本概念. 全纯凸域是几何凸域的一种推广, 它给出了全纯域的一种内蕴整体刻画. 本章主要结论是 Cartan-Thullen 定理, 它断定了全纯凸域和全纯域的等价性.

第 5 章介绍次调和函数与多重次调和函数. 在单复变情形, 调和函数局部地为某全纯函数的实部; 单复变次调和函数是调和函数的推广. 而多重次调和函数是单复变次调和函数在多复变情形的一个十分有用的推广. 5.1 节介绍上半连续函数与下半连续函数; 5.2 节介绍单复变调和函数和次调和函数; 5.3 节介绍多重次调和函数基本性质、多重次调和函数的正则化定理、延拓定理、Richberg 光滑逼近定理和 Poincaré-Lelong 公式. 因为多重次调和函数在复流形上有定义，而且复流形上的全纯线丛的度量在很多重要情形都与多重次调和函数有联系，因此本章的这些内容是多复分析与复几何的重要基础部分. 如从本章的 Poincaré-Lelong 公式便可看出多重次调和函数在复几何的研究中有着重要的地位. 由于次调和函数与多重次调和函数只是上半连续函数 (这样它们属可测函数, 但不一定连续), 故本章大量使用了实变函数方法. 尽管流 (currents) 在本章后面几节里已隐约可见, 本章还是回避了流这个名称. 没有引入流的概念使得本章和最后一章的某些地方的叙述有些累赘, 但作为一个基础教程, 作者觉得这样做还是值得的.

第 6 章介绍拟凸域. 在第 4 章中已证明了全纯凸域和全纯域的等价性, 本章将介绍 Hartogs 拟凸域、拟凸域和 Levi 拟凸域等基本概念, 它们从分析与几何的不同方面恰到好处地刻画了全纯域. 6.1 节证明了全纯域是 Hartogs 拟凸域; 6.2 节介绍拟凸域, 同时还证明了 Hartogs 拟凸域和拟凸域的等价性; 6.3 节介绍 Levi 拟凸域, 还证明了在边界是 C^2 时, 拟凸域和 Levi 拟凸域的等价性. 这样, 留下的一个重要问题就是拟凸域是否为全纯域. 著名的 Levi 猜想即为拟凸域一定为全纯域. 此猜想为 Levi 于 1910 年提出, 直到 20 世纪 50 年代才被完全证明. 我们将在下一章使用 $\overline{\partial}$ 技巧证明 Levi 猜想为真.

第 7 章介绍 $\overline{\partial}$ 问题的 L^2 估计及存在性定理. 本章的内容揭示了拟凸域与 $\overline{\partial}$ 问题的可解性的深刻联系. 1965 年, Hörmander 在微分形式的希尔伯特空间引入多重次调和的权函数来直接研究 $\overline{\partial}$ 问题, 取得了很大成功. 本章主要介绍 Hörmander 等人发展起来的拟凸域上的 $\overline{\partial}$ 问题的可解性及对解的 L^2 估计. 7.1 节介绍无界线性算子初步; 7.2 节介绍弱 $\overline{\partial}$ 算子、$\overline{\partial}$ 问题的可解性及对解的 L^2 估计、$\overline{\partial}$ 问题的正则性; 7.3 节和 7.4 节将用 $\overline{\partial}$ 问题的 L^2 估计及存在性定理来解决一些经典问题, 如 Levi 猜想、Cousin I、II 问题、逼近定理和插值定理. 本章大量使用了实变函数和泛函分析的基本方法. 该理论在多复分析及复几何的研究中十分重要.

第 8 章介绍 Ohsawa-Takegoshi 于 1987 年得到的全纯函数 L^2 延拓定理及相关内容. 近 20 多年来, 在复几何的很多重要研究中, Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理

都起了很重要的作用. Ohsawa-Takegoshi 的 L^2 延拓定理的证明涉及与完备 Kähler 度量相关的 $\overline{\partial}$ 问题的 L^2 估计的复杂技巧. 近年来, 人们发现利用 Hörmander 的 $\overline{\partial}$ 问题的 L^2 估计的一个稍微改进形式可以很快给出 Ohsawa-Takegoshi 的 L^2 延拓定理的一个简化证明, 本章将介绍这方面内容, 并给出了一些重要的应用. 8.1 节介绍 Hörmander 的 $\overline{\partial}$ 问题的 L^2 估计的一个改进形式; 8.2 节将介绍 Ohsawa-Takegoshi 的 L^2 延拓定理的证明; 8.3 节将引入多重次调和函数的 Lelong 数的概念, 然后利用 Ohsawa-Takegoshi 的 L^2 延拓定理证明一个 Demailly 于 1992 年得到的逼近定理, Demailly 的逼近定理给出了有界拟凸域上的多重次调和函数可以由一类"典型"的多重次调和函数逐点逼近. 最后利用 Demailly 的逼近定理导出一个 Siu 定理. Siu 定理阐明了多重次调和函数的奇点集与解析集的一种联系. 本章涉及了一些多复变的深刻内容，我们这样选择是因为它们能很好地表达本书的各个章节 (如拟凸域、复解析集、多重次调和函数、$\overline{\partial}$ 问题) 的统一性.

另外, 本书每章都配置了适量的习题. 这些习题可视为本书各章内容的补充，也是本书的重要组成部分.

从 2004 年开始, 多元复分析被列为武汉大学数学与统计学院数学基地班高年级大学生和数学专业研究生的选修课. 作者每年都讲授一门多元复分析课程，每年的内容略有差异，转眼已十年了. 本书是作者在这十年授课的教案基础上整理修改而成的, 可以说历届学生的学习热情与支持是作者编写该讲义的主要动力. 在此作者向选修该课程的学生们表示诚挚的谢意！同时也感谢武汉大学数学与统计学院的领导与同事这些年来对作者在该课程建设方面的支持与帮助.

本书在教材布局上采取了低起点、高坡度的方式. 同时, 作者在撰写本书时十分注意与国内学生的基础相衔接, 以增强本书的易读性. 本书在配置习题方面下了很大的功夫，它们将非常有助读者加深理解和牢固掌握本书的内容.

最后, 特别感谢自己的老师莫毅明教授对作者在多元复分析和复几何学习与研究方面的长期指导与帮助, 也感谢国家自然科学基金 (10971156、11271291) 对作者科研教学工作的资助.

限于作者的水平和经验, 书中难免有错误和不妥之处, 欢迎读者批评指正和提出改进意见.

涂振汉

2013 年 12 月于武汉大学

目　录

第 1 章 多复变全纯函数与全纯映照

本章介绍多复变全纯函数与全纯映照的定义与基本性质. 它们在许多方面与单复变情形时是类似的, 但也有的性质是多复变情形时所特有的. 如单复变情形的著名 Riemann 映射基本定理在多复变时不再为真. 本章内容是以后各章节的基础.

1.1 全纯函数

设 $\mathbf{C}$ 为复数域. 定义 $\mathbf{C}^n=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n):z_i\in\mathbf{C},\ i=1,2,\cdots,n\}$ 为复数域上的 n 维线性空间. 对 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n),w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbf{C}^n$, 定义 $\mathbf{C}^n$ 上的标准 Hermitian 内积

$$\langle z,w\rangle:=z_1\overline{w}_1+z_2\overline{w}_2+\cdots+z_n\overline{w}_n.$$

在 $\mathbf{C}^n$ 上定义

$$|z|=\langle z,z\rangle^{\frac{1}{2}},\quad |z|_{\max}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j|,$$

则 $|\cdot|$ 及 $|\cdot|_{\max}$ 都是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数且为拓扑等价的. $\mathbf{C}^n$ 上的范数 $|\cdot|$ 和 $|\cdot|_{\max}$ 也分别称为欧几里德范数和多圆柱范数.

$\mathbf{C}^n$ 中的连通开集 Ω 称为区域. 当区域 Ω 有界时, 称 Ω 为有界域.

设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n,\ r=(r_1,r_2,\cdots,r_n),\ r_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 称

$$\Delta(a,r)=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_j-a_j|<r_j,\ \ j=1,2,\cdots,n\}$$

为以 a 为中心, 以 r 为半径的多圆柱 (或多圆盘). 特别记

$$\Delta^n:=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_i|<1,\ \ i=1,2,\cdots,n\}.$$

我们称 Δ^n 为单位多圆柱 (或单位多圆盘).

以 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$ 为中心, 以 $\rho\ (>0)$ 为半径的球是指

$$B(a,\rho)=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\sum_{i=1}^{n}|z_i-a_i|^2<\rho^2\}.$$

特别,$B^n=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2<1\}$ 称为单位球.

故 Δ^n, B^n 都是 $\mathbf{C}$ 中的单位圆盘在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广.

设 $\mathbf{N}$ 为非负整数的集合. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha$ $(a_\alpha\in\mathbf{C})$ 称为 n 重级数. 级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha(z-a)^\alpha$ 也称为 n 重幂级数. n 重级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha$ 称为收敛是指存在某一一的满射 $\alpha:\mathbf{N}\to\mathbf{N}^n$ 使 $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}}a_{\alpha(k)}$ 收敛; n 重级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha$ 称为绝对收敛是指存在某一一的满射 $\alpha:\mathbf{N}\to\mathbf{N}^n$ 使 $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}}|a_{\alpha(k)}|$ 收敛. 故若一 n 重级数绝对收敛, 则收敛的极限与级数的排列顺序 α 无关. n 重幂级数的 收敛域定义为其全体收敛点集的内部.

定义 1.1.1　(1) 设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为一个区域,$f:\Omega\to\mathbf{C}$ 为一个复值函数.

(i) 若 $\forall a\in\Omega$, 存在 a 点的一个邻域 $U(a)$ 使得 $f(z)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha$ 于 $U(a)$ 成立, 则称 f 于 Ω 中全纯 (有时也称为 f 于 Ω 中解析). 用 $A(\Omega)$ 记 Ω 上全纯函数所成的集合.

(ii) 若 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 使得 $\bar{f}:\Omega\to\mathbf{C}$ 是全纯的, 则称 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是反全纯函数.

(2) 设区域 $\Omega_1\subset\mathbf{C}^n,\Omega_2\subset\mathbf{C}^m$. 若映照 $F(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_m(z)):\Omega_1\to\Omega_2$ 使 $f_i\in A(\Omega_1)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $F:\ \Omega_1\to\Omega_2$ 称为全纯映照.

设 $z_k=x_{2k-1}+\mathrm{i}x_{2k}$, 其中 $x_{2k-1},x_{2k}\in\mathbf{R}$ (其中 $\mathbf{R}$ 为实数域), 通过对应

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1},x_{2n}),$$

我们可建立 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{R}^{2n}$ 之间的一一对应. 定义记号

$$\mathrm{d}z_k=\mathrm{d}x_{2k-1}+\mathrm{i}\mathrm{d}x_{2k},\qquad \mathrm{d}\bar{z}_k=\mathrm{d}x_{2k-1}-\mathrm{i}\mathrm{d}x_{2k};$$
$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right).$$

若 $\alpha\in\mathbf{N}^n,\beta\in\mathbf{N}^{2n}$, 定义

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n},\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right)^{\beta_{2n}}.$$

则域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上关于实变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1},x_{2n}$ 可微的函数 f, 可直接验证

$$\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\mathrm{d}\bar{z}_k.$$

因此可微复函数 f 的全微分公式可叙述为

$$\mathrm{d}f := \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\mathrm{d}\overline{z}_k.$$

定义记号

$$\partial f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k, \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\mathrm{d}\overline{z}_k.$$

故 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$.

引理 1.1.1 (Abel 引理)　(1) 设 n 重幂级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ 于点 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 满足 $\{b_\alpha a^\alpha : \alpha \in \mathbf{N}^n\}$ 有界 (特别是 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ 于点 a 收敛时), 其中 $a_i \neq 0\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则它在多圆柱

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

中任意紧致子集上绝对且一致收敛. 因此对任意 $\beta \in \mathbf{N}^{2n}$, 幂级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} b_\alpha \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^\beta z^\alpha$ 于

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

中任意紧致子集上绝对且一致收敛;

(2) 设 $\varOmega \subset \mathbf{C}^n$ 为 n 重幂级数 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ 的收敛域, 则 $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ 于 Ω 中任意紧致子集上绝对且一致收敛.

证　(1) 因 $\{b_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}\}$ 有界, 故存在正常数 M, 使得

$$|b_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}| \leqslant \frac{M}{|a_1|^{\alpha_1}\,|a_2|^{\alpha_2} \cdots |a_n|^{\alpha_n}}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

设 $K \subset \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ 为一紧子集, 则存在正数 $r_0\ (0 < r_0 < 1)$ 使

$$K \subset \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < r_0\,|a_j|,\ \ j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

故当 $z \in K$ 时,

$$|b_{\alpha_1\cdots\alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}| \leqslant M(r_0)^{\alpha_1} \cdots (r_0)^{\alpha_n}.$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}(r_0)^{\alpha_1} \cdots (r_0)^{\alpha_n} &\leqslant \sum_{\alpha_1=0}^{+\infty}(r_0)^{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{+\infty}(r_0)^{\alpha_n} \\ &= \left(\frac{1}{1-r_0}\right)^n,\end{aligned}$$

故 $\sum b_\alpha z^\alpha$ 于紧子集 K 上绝对且一致收敛. 对任意 $\beta \in \mathbf{N}^{2n}$, 由于 $\sum b_\alpha z^\alpha$ 于

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

上收敛, 因此幂级数 $\sum b_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta z^\alpha$ 于

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

中也收敛. 故幂级数 $\sum b_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta z^\alpha$ 于

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

中任意紧致子集上绝对且一致收敛.

(2) 设 $K \subset \Omega$ 为一紧子集. 则由有限覆盖定理知, 存在

$$a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)} \cdots, a_n^{(k)}) \in \Omega \quad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

其中 $a_i^{(k)} \neq 0\,(i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, m)$ 及正数 r_0 $(0 < r_0 < 1)$, 使

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} \{(z_1, z_2 \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| \leqslant r_0 \left|a_j^{(k)}\right|,\ \ j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

由 (1) 知 $\sum b_\alpha z^\alpha$ 于

$$\{(z_1, z_2 \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| \leqslant r_0 \left|a_j^{(k)}\right|,\ \ j = 1, 2, \cdots, n\} \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

上绝对且一致收敛, 故 $\sum b_\alpha z^\alpha$ 于 K 上绝对且一致收敛. [证毕]

回顾单复变情形, 设函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbf{C}$ 内确定, 则 f 于 D 中全纯的充要条件为：$u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 D 可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

于 D 内成立.

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longleftrightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0,$$

故得: 设 $D \subset \mathbf{C}$ 为区域,$C^k(D)$ 是于 D 上关于实变量 x, y 为 k 次连续可微的函数集合. 则

$$A(D) = \{f \in C^1(D) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\}.$$

设 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为一个区域. 若 $f \in A(\Omega)$, $a \in \Omega$, 则 $f(z) = \sum c_\alpha (z-a)^\alpha$ 于点 a 的某一邻域 $U(a)$ 中成立. 由单复变结论知我们可逐项求导数, 然后令 $z = a$, 得

$$c_\alpha = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} := \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha f(a)/\alpha!.$$

即 $f(z) = \sum \dfrac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$ 于 $U(a)$ 中成立.

由引理 1.1.2 得 $A(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$. 因此若 $f \in A(\Omega)$, 则由 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k}(z-a)^\alpha \equiv 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 得 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k} f(z) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 于 Ω 中成立.

定理 1.1.1 (唯一性定理)　设 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为一个区域, 且 $f \in A(\Omega)\backslash\{0\}$, 则 $f^{-1}(0)$ 无内点.

证　易证 $\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}$ 为 Ω 中既开又闭的子集.

事实上, 由

$$\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\} = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0\},$$

得 $\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}$ 为 Ω 中闭子集.

若 $a \in \{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. 设 $f(z) = \sum \dfrac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$ 于点 a 的某一邻域 $U(a)$ 中成立. 则 $f(z) \equiv 0$ 于 $U(a)$ 中成立. 即

$$U(a) \subset \{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}.$$

故 $\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}$ 为 Ω 中开子集.

由 $f \in A(\Omega)\backslash\{0\}$ 且 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为连通开集, 得

$$\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\} = \varnothing.$$

显然 $f^{-1}(0)$ 的内点属于集合 $\{z \in \Omega : f^{(\alpha)}(z) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. 即 $f^{-1}(0)$ 无内点. [证毕]

注: (1) 由定理 1.1.1 知: 设 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为一个区域, 且 $f \in A(\Omega)\backslash\{0\}$, 则 $f^{-1}(0)$ 为 Ω 中无处稠密的闭子集. 由 Baire 纲定理得可数个这样 Ω 的无处稠密闭子集的并仍是 Ω 的真子集;

(2) 定理 1.1.1 即为如下唯一性定理: 设 f, $g \in A(\Omega)$, 且 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为区域. 如 $\{z \in \Omega : f(z) - g(z) = 0\}$ 有内点, 则必有 $f = g$;

(3) 设全纯函数 $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$, $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$. 虽然 $f^{-1}(0)$ 无内点, 但 $f^{-1}(0)$ 是 $\mathbf{C}^2$ 中非离散的子集.

引理 1.1.2　设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为区域, $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是连续函数, 对 $a\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\Omega_{j,a}=\{z\in\mathbf{C}:(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)\in\Omega\}.$$

若对任意 $a\in\mathbf{C}^n$, $j=1,2,\cdots,n$, 有 $f(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)$ 是 $\Omega_{j,a}$ 上的全纯函数, 则 $f\in A(\Omega)$.

证　设 $p\in\Omega$ 且 $\overline{\Delta(p,r)}\subset\Omega$, 由单复变的 Cauchy 积分公式, 得

$$\begin{aligned}&f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\xi_1-p_1|=r_1}\frac{\mathrm{d}\xi_1}{(\xi_1-z_1)}\cdots\int_{|\xi_n-p_n|=r_n}\frac{f(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}\xi_n}{(\xi_n-z_n)},\end{aligned}$$

其中 $z\in\Delta(p,r)$. 由于 $f:\overline{\Delta(p,r)}\to\mathbf{C}$ 是连续函数, 故

$$\begin{aligned}&f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\xi_1-p_1|=r_1}\cdots\int_{|\xi_n-p_n|=r_n}\frac{f(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n}{(\xi_1-z_1)\cdots(\xi_n-z_n)},\end{aligned}$$

其中 $z\in\Delta(p,r)$. 对固定的 $z\in\Delta(p,r)$,

$$\frac{1}{(\xi_1-z_1)\cdots(\xi_n-z_n)}=\sum\frac{(z_1-p_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-p_n)^{\alpha_n}}{(\xi_1-p_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\xi_n-p_n)^{\alpha_n+1}}$$

在 $|\xi_1-p_1|=r_1,\cdots,|\xi_n-p_n|=r_n$ 上绝对且一致收敛. 故有

$$\begin{aligned}&f(z)\\&=\sum_\alpha\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\xi_1-p_1|=r_1}\cdots\int_{|\xi_n-p_n|=r_n}\frac{f(\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n}{(\xi_1-p_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\xi_n-p_n)^{\alpha_n+1}}\cdot(z-p)^\alpha\\&=\sum_\alpha C_\alpha(z-p)^\alpha,\end{aligned}$$

其中 $z\in\Delta(p,r)$. 即 $f\in A(\Omega)$. [证毕]

故由引理 1.1.2, 得

定理 1.1.2　设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为区域,$C^k(\Omega)$ 是于 Ω 上关于实变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1}$, x_{2n} 为 k 次连续可微的函数集合. 则

$$A(\Omega)=\{f\in C^1(\Omega):\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_k}=0,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

定理 1.1.3　设 $f\in A(\Delta(0,r))$, 则

$$f(z)=\sum\frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}z^\alpha,\quad z\in\Delta(0,r).$$