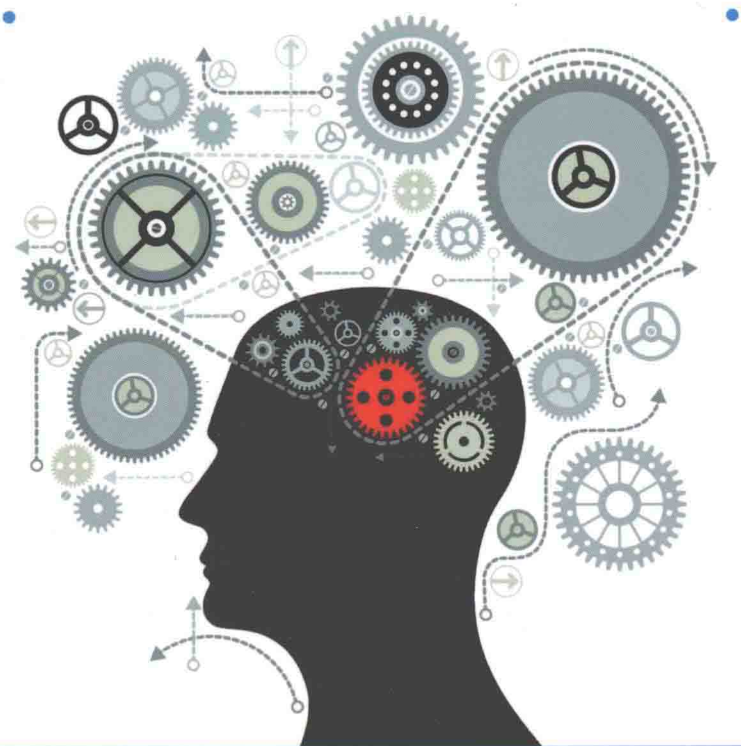


物理奥赛之

WULI
AOSAI
ZHI

知识、方法与技巧介绍

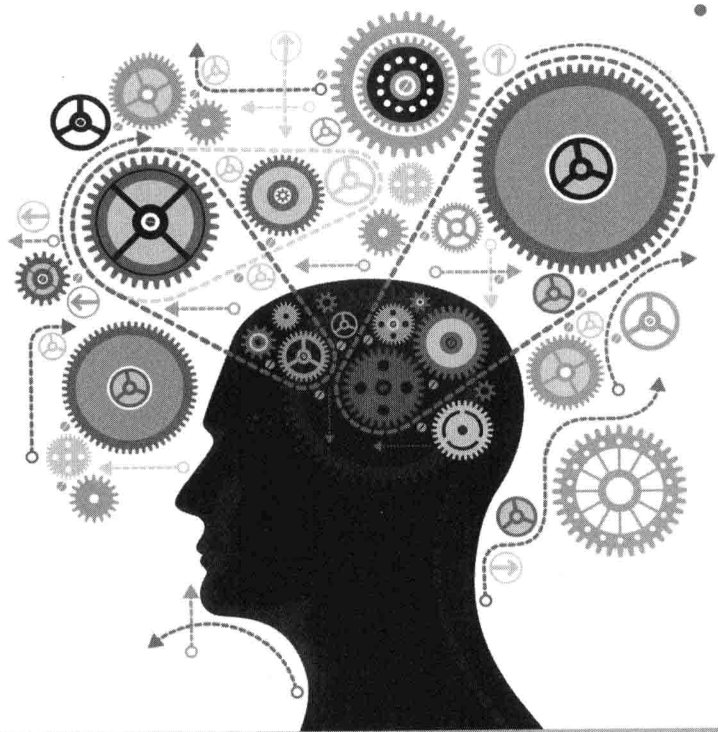
ZHISHI FANGFA YU JIQIAO JIESHAO

张海◎著

下册

电磁学、光学与近代物理学

新华出版社



物理奥赛之

知识、方法与技巧介绍

ZHISHI FANGFA YU JIQIAO JIESHAO

张海◎著

下册

电磁学、光学与近代物理学

新华出版社

图书在版编目（CIP）数据

物理奥赛之知识、方法与技巧介绍：全2册 / 张海编著.
——北京：新华出版社，2014.7

ISBN 978-7-5166-1092-3

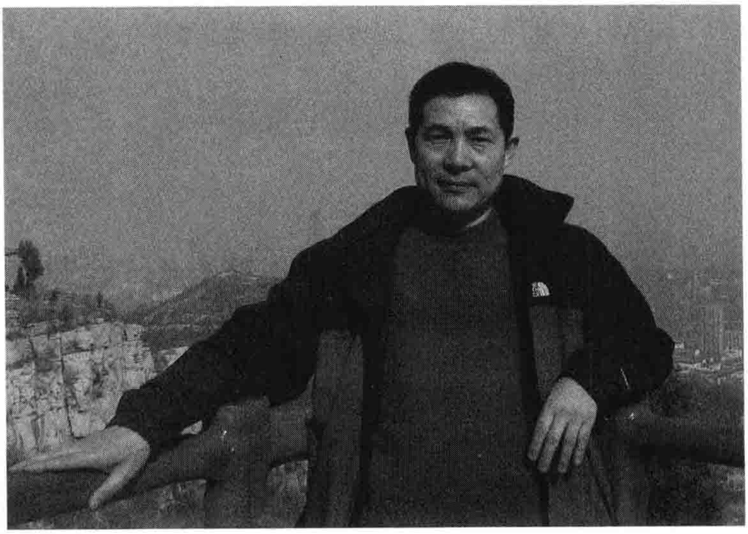
Ⅰ. ①物… Ⅱ. 张… Ⅲ. ①中学物理课—教学参考资料
Ⅳ. ①G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第148797号

物理奥赛之知识、方法与技巧介绍：全2册
编　　著：张海

出 版 人：张百新	**责任编辑：**林郁郁
责任印制：廖成华	**封面设计：**图鸦文化
出版发行：新华出版社	
地　　址：北京石景山区京原路8号	**邮　　编：**100040
网　　址：http://www.xinhuapub.com	http://press.xinhuanet.com
经　　销：新华书店	
购书热线：010－63077122	**中国新闻书店购书热线：**010－63072012
照　　排：唐昊文化	
印　　刷：中煤涿州制图印刷厂北京分厂	
成品尺寸：185mm×260mm　1/16	
印　　张：44	**字　　数：**500千字
版　　次：2014年7月第一版	**印　　次：**2014年7月第一次印刷
书　　号：ISBN　978-7-5166-1092-3	
定　　价：100.00元	

图书如有印装问题请与出版社联系调换：010-63077101



作者简介

张海，1986 年入山东省实验中学至今，物理教研组长，特级教师。有 28 年的中学教学经验和 26 年的物理奥赛辅导经验。担任全国物理竞赛山东队领队，山东省物理奥赛省集训队教练，山东省实验中学物理竞赛主教练。所培养学生曾在第 12 届亚洲中学生物理竞赛中获得金牌；数十人在全国物理竞赛决赛中获金牌；有百余人获山东省一等奖。先后在各类杂志上发表论文二十余篇、主编、参编教学参考书、物理奥赛辅导教材等十余部。

前 言

全国中学生物理竞赛是学有余力的中学生展示特长的舞台，也是国家为选拔参加国际奥林匹克物理竞赛的优秀选手设立的一项全国性比赛；全国中学生物理竞赛起源于1984年，至今已举行了30届，比赛分为预赛、复赛和决赛。通过这项赛事，发现了大量的物理人才，为我国的科研工作储备了雄厚的后备力量。同时，全国物理竞赛也得到了广大中学生的积极响应，为这项赛事的健康发展奠定了坚实的基础。对于初次涉及物理奥赛的学生，有一本行之有效的参考书是至关重要的。为使从事物理奥赛的广大中学生全方位了解全国物理竞赛的大纲、知识体系、试题难度及方法技巧等，本书作者积26年的物理奥赛辅导经验写成此书，以供读者使用。作者于1988年开始从事物理奥赛辅导工作，见证了全国物理竞赛的历史，本书对于热爱物理奥赛的学生以及从事这项工作的教师都是一本难得的参考书。

作者在长期的中学物理奥赛辅导工作中，积累了丰富的经验，对物理奥赛的知识体系、解题方法与技巧以及广大中学生的数学基础有系统全面的把握。作者在本书中从高中学生的知识现状，学习习惯出发，并充分结合全国物理竞赛大纲，将全国物理竞赛的知识要点充分扩展，分十八章介绍了学生在准备物理竞赛的过程中应该掌握的知识、方法与技巧。每章的内容分为“知识要点”、“重点知识讲解”和“方法与技巧”三个部分。其中“知识要点”也就是全国物理竞赛大纲，在每章的开头部分介绍，以供学生了解全国物理竞赛大纲在本章的要求。但全国物理竞赛大纲写的非常简单，为了更加深入的介绍大纲的内涵，作者在充分了解自1984年以来全国物理竞赛试题的发展，并考虑到高中学生在高中阶段的学习状况，进行了“重点知识讲解”。这些重点知识主要是学生在现行高中教材上没有或涉及较少的内容，每章根据内容分布分为“第1讲、第2讲、第3讲……”，凡是在高中教材上已经比较全面深入介绍的知识，本书不再赘述。“方法与技巧”是针对每一讲进行的问题分析，具有较强的针对性，题型全面新颖，涉及面广，对于加强对重点知识

的掌握，行之有效。同时，本书在内容编写过程中，本着由易到难、循序渐进的指导思想，将知识体系深入浅出的做了讲解。本书同时收录了许多全国物理竞赛复赛和决赛的试题，有较高的参考价值。习题采取全解的方式，对于参加高等院校自主招生的高三同学也是一本非常难得的参考书。

目录

CONTENTS

第十一章　静电场

【知识要点】

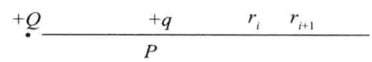
1. 库仑定律、电荷守恒定律、电场强度、电场线、点电荷的场强、场强叠加原理
2. 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出)
3. 电场中的导体、静电感应、静电屏蔽、电势和电势差、等势面
4. 均匀带电球壳壳内的电势和壳外的电势公式(不要求导出)
5. 电容、电容器的连接、平行板电容器的电容公式(不要求导出)、电容器充电后的电场能、电介质的极化、介电常数

第 1 讲　场强、电势的计算

【重点知识讲解】

1. 点电荷电场的电势公式 $\varphi=k\dfrac{Q}{r}$，静电力常量 $k=9\times10^9 Nm^2/C^2$

推导：如图，从点电荷 Q 的电场中距离 Q 为 r 的 P 点将检验电荷 q 移到无穷远处，若 p 点电势为 φ，则电场力做的功为：



$W=q\varphi$　而 $W=\sum k\dfrac{qQ}{{r_i}^2}\Delta r$

$$W=\sum k\frac{qQ}{{r_i}^2}(r_{i+1}-r_i)\approx\sum\frac{kqQ}{r_ir_{i+1}}(r_{i+1}-r_i)=kqQ\sum(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}})$$

即 $W=k\dfrac{Qq}{r}$　所以：$\varphi=k\dfrac{Q}{r}$

2. 电偶极子的电场

电偶极子(electricdipole)是两个相距很近的等量异号点电荷组成的系统。电偶极子的特征用电偶极距 $p=ql$ 描述，其中 l 是两点电荷之间的距离，l 和 p 的方向规定由 $-q$ 指向 $+q$。电偶极子在外电场中受力矩作用而旋转，使其电偶极矩转向外电场方向。电偶极矩就是电偶极子在单位外电场中受到的最大力矩，故简称电矩。如果外电场不均匀，除受力矩外，电偶极子还要受到合力作用。电偶极子产生的电场是构成它的正、负点电荷产生的电场之和。下面介绍一下电偶极子在真空中产生的场强和电势。

电偶极子的场强：

延长线上的场强：在电偶极子(两电荷间距离为 l)的延长线上距离中心 O 为 $r(r\gg l)$ 的 A 点的场强为：

$$E_A=k\frac{Q}{(r-\frac{l}{2})^2}-k\frac{Q}{(r+\frac{l}{2})^2}=\frac{2kQlr}{(r^2-\frac{l^2}{4})^2}$$

略去二级无穷小量得：$E_A\approx\dfrac{2kQl}{r^3}$　即：$E_A=\dfrac{2kp}{r^3}$

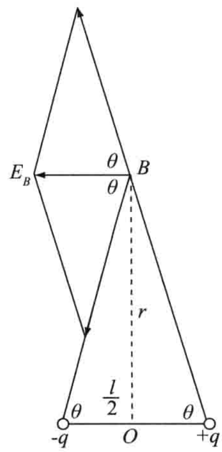
电势：$\varphi_A=k\dfrac{Q}{r-\frac{l}{2}}-k\dfrac{Q}{r+\frac{l}{2}}=\dfrac{kQl}{r^2-\frac{l^2}{4}}\approx\dfrac{kQl}{r^2}$　即：$\varphi_A=\dfrac{kp}{r^2}$

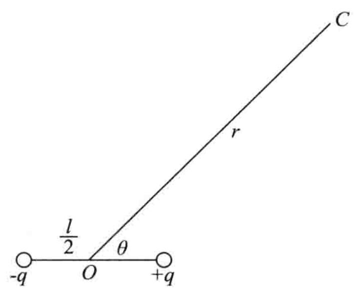
中垂线上的场强：在电偶极子(两电荷间距离为 l)的中垂线上距离中心 O 为 $r(r\gg l)$ 的 B 点的场强为：

$$E_B=2k\frac{Q}{r^2+l^2/4}\cos\theta=\frac{2kQ}{r^2+l^2/4}\frac{l/2}{\sqrt{r^2+l^2/4}}=\frac{kQl}{(r^2+l^2/4)^{\frac{3}{2}}}$$

略去二级无穷小量 l^2 得：$E_B=\dfrac{kp}{r^3}$

电势：$\varphi_B=0$





一般位置的场强：将电偶极矩 p 分解为与 r 平行的分量 $p_{/\!/}=p\cos\theta$ 和与 r 垂直的分量 $p_{\perp}=p\sin\theta$，则 C 点场强的两个分量分别为：$E_{/\!/}=\dfrac{2kp_{/\!/}}{r^3}=\dfrac{2kp\cos\theta}{r^3}$、$E_{\perp}=\dfrac{kp_{\perp}}{r^3}=\dfrac{kp\sin\theta}{r^3}$

所以：$E_C=\sqrt{E_{/\!/}{}^2+E_{\perp}{}^2}=\dfrac{kp}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

电势：$\varphi_C=\dfrac{kp_{/\!/}}{r^2}=\dfrac{kp\cos\theta}{r^2}$

3. 均匀线分布电荷产生的场强

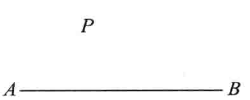
净电荷均匀分布在一条线上，在空间某点产生的场强，通常可用微积分的方法进行定量计算，但运用微积分的方法进行定量计算，必须确定场强的方向才能方便可行。下面将介绍一种等效方法来求解均匀线分布电荷的场强问题。

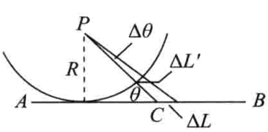
如图所示，线段 AB 上均匀分布着线电荷密度为 λ 的正电荷，其旁边有一点 p，p 点到直线 AB 的距离为 R，则 p 点的电场强度大小、方向如何确定？现以 p 点为圆心以 R 为半径做一个与直线 AB 相切的圆弧，认为圆弧上也均匀分布着线电荷密度为 λ 的正电荷，今在 AB 上 C 点取一微元 ΔL，在圆弧上对应取下微元 $\Delta L'$（取法如图），令 $pc=r$，则微元 ΔL 在 p 点产生的场强是：

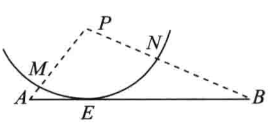
$E_i=k\dfrac{\lambda.\Delta L}{r^2}$　而 $\Delta L=\dfrac{r\Delta\theta}{\sin\theta}$，$\sin\theta=\dfrac{R}{r}$　所以：$E_i=k\dfrac{\lambda.\Delta\theta}{R}$

$\Delta L'$在 P 点产生的场强是：

$E_i{}'=k\dfrac{\lambda.\Delta L'}{R^2}=k\dfrac{\lambda.R.\Delta\theta}{R^2}$　所以：$E_i{}'=k\dfrac{\lambda.\Delta\theta}{R}$

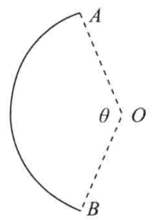


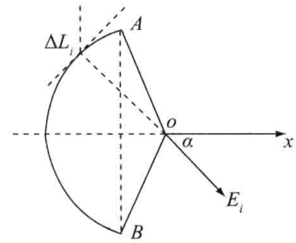




由以上论证可知：$E_i=E_i{}'$，且二者方向也相同。可见 ΔL 在 p 点产生的场强可由

$\Delta L'$在 p 点产生的场强代替，不难得出，AB 直线上的电荷在 p 点产生的场强，可由图中 MEN 弧在 p 点产生的场强来代替。下面将介绍均匀分布在圆弧上的电荷在圆心处产生的场强的计算公式。





如图所示，半径为 R 的圆弧 AB，其圆心角为 θ，其上均匀分布着线电荷密度为 λ 的正电荷，圆心 O 点的场强设为 E_0，由对称性可得，E_0 的方向一定沿 AB 的连线的中垂线向右，即图中 x 方向，取圆弧上一微元 ΔL_i，它在 O 点的场强为 $E_i=k\dfrac{\lambda.\Delta L_i}{R^2}$，所以：

$$E_0=\sum E_i\cos\alpha=\sum k\frac{\lambda.\Delta L_i}{R^2}\cos\alpha=\frac{k\lambda}{R^2}\sum\Delta L_i\cos\alpha$$

而 $\sum\Delta.L_i\cos\alpha=\overline{AB}$ 　则：$E_0=\dfrac{k\lambda}{R^2}\overline{AB}=\dfrac{k\lambda}{R^2}.2R\sin\dfrac{\theta}{2}$

所以：$E_0=\dfrac{2k\lambda}{R}\sin\dfrac{\theta}{2}$ ……………………………………………………………… ①

若对于无限长均匀带电直线，在距离直线为 R 的一点(相当于①式中 $\theta=\pi$)，场强为

$E=\dfrac{2k\lambda}{R}$ ……………………………………………………………………………………… ②

若在均匀带电线段的延长线上一点，场强公式又如何？

如图所示，在线段 AB 上均匀分布着线电荷密度为 λ 的正电荷，其旁边有一点 p，p 点到线段 AB 的 A、B 两点的距离分别为 d_1、d_2，点 p 到线段 AB 的垂直距离为 R，线段 AB 的长为 L，点 p 与 A、B 两点的连线之间的夹角为 θ，则由公式①得，p 点的场强为：

$$E=\frac{2k\lambda}{R}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta=\frac{1}{2}LR$$

$$\therefore R=\frac{d_1d_2\sin\theta}{L}$$

代入 P 点的场强公式整理得：$E=\dfrac{Lk\lambda}{d_1d_2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

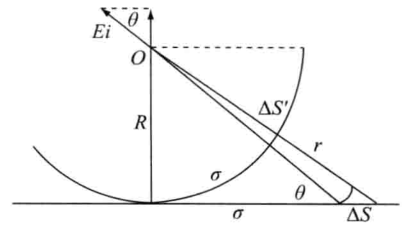
若在长为 L 的均匀带电(线电荷密度为 λ)线段 AB 的延长线上一点 p，p 点距离线段 AB 较近的一点的距离为 d，则根据上述表达式，$d_1=d$、$d_2=d+L$、$\theta=0$，代入得：

$E=\dfrac{Lk\lambda}{d(d+L)}$ 　即 $E=\dfrac{k\lambda}{d}-\dfrac{k\lambda}{d+L}$ …………………………………………… ③

4. 均匀面分布电荷的场强

(1)无限大的带电平面的场强

设面电荷密度为 σ 的无限大的带电平面在距离平面为 R 的 O 点产生的场强为 E，今以 O 点为圆心，以 R 为半径做一与平面相切的球面，如图所示。



$E=\sum E_i\sin\theta$

$E_i=k\dfrac{\sigma\cdot\Delta s}{r^2}$

所以，$E=\sum k\dfrac{\sigma\cdot\Delta s}{r^2}\sin\theta$

又，$\dfrac{\Delta s\cdot\sin\theta}{r^2}=\dfrac{\Delta s'}{R^2}$

所以，$E=\dfrac{k\sigma}{R^2}\sum\Delta s'$

对于无限大的平面，有 $\sum\Delta s'=2\pi R^2$，所以，$E=2k\pi\sigma$ 或 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

其中，ε_0 为真空中的绝对介电常数，$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k}$；若研究电介质中的电场，则将 ε_0 替换为 ε，ε 为介质的绝对介电常数，对于空气介质，可近似认为其绝对介电常数为 ε_0，一般电介质的绝对介电常数都满足 $\varepsilon>\varepsilon_0$，绝对介电常数 ε 是反映电介质电学性质的重要物理量，往往绝缘性质好的电解质，其绝对介电常数 ε 也会较大。在电磁学上定义 $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\varepsilon_r$ 为电介质的相对介电常数，$\varepsilon_r>1$。

(2)均匀带电球面的场强

均匀球分布电荷对球外空间产生的电场，等价于置于球心的等量点电荷产生的电场。处理不均匀球分布电荷的电场问题时，一般是列出球心的电势方程来解决问题。

半径为 R、带电量为 Q 的球面，在球心处产生的电势为：$\varphi=k\dfrac{Q}{R}$；若电荷在球面上均匀分布，则球面上的电荷在球面内各点产生的电势均为 $\varphi=k\dfrac{Q}{R}$，在球面内各点产生的场强均为零。

参考均匀带电圆弧在圆心处产生的场强公式的推导，同样可推出面电荷密度为 σ 的均匀带电球冠在球心处产生的场强为：

$E=\dfrac{k\sigma}{R^2}S$

式中 S 为球冠的底面积，R 为球面半径。若球冠的高为 h，则面电荷密度为 σ 的均匀带电球冠在球心处产生的场强还可表示为：

$E=\dfrac{k\sigma}{R^2}\pi(2Rh-h^2)$

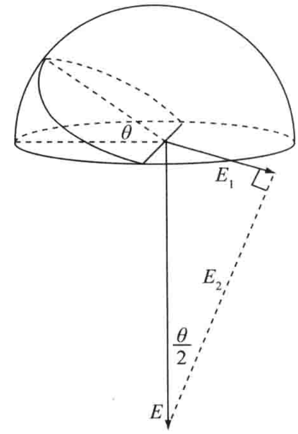
5. 均匀体分布电荷的场强

(1)若电荷均匀分布在厚度为 d 的无限大板内，体电荷密度为 ρ，在不考虑电介质极化的情况下，如何计算该带电板产生的场强，可分两种情况分析：一是体内场强，可在参考点处离表面较近的一侧切下一层，在另一侧对称切下相同的一层，这两带电层在参考

点产生的场强相互抵消，剩余的部分在参考点产生的场强可等效为一个无限大带电平面产生的场强，其面电荷密度 $\sigma=\rho\Delta d$，参考点处的场强为 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho\Delta d}{2\varepsilon_0}$。二是板外场强，可将整个带电板视为一面电荷密度 $\sigma_0=\rho d$ 的无限大带电平面，其外场强为 $E=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$

(2)均匀带电球体产生的场强和电势。

对于球外场强和电势，可按照点电荷的电场处理；对于球内场强和电势，可在参考点处将球分成其内均匀带电球和其外均匀带电球壳处理。



对于均匀带电半球体球心处场强，如图所示，半径为 R 的均匀带电半球体，体电荷密度为 ρ，若将该半球体分成无限多个厚度为 $\Delta r(\Delta r\to 0)$ 的半球面，每个均匀带电半球面在球心处产生的场强为 E_i，则半球体球心处场强为：$E=\sum E_i$

根据均匀带电球冠在球心处产生的场强 $E_i=\frac{k\sigma}{R^2}\pi(2Rh-h^2)$得半球面球心场强为：$E_i=k\pi\sigma$

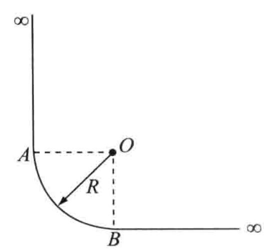
所以：$E=\sum k\pi\sigma=\sum k\pi\rho\Delta r=k\pi\rho R=\frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$

若用过圆心的平面将半球体切出一二面角为 θ 的部分，如图所示。

则该部分在球心处场强为：

$$E_1=E\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\sin\frac{\theta}{2}$$

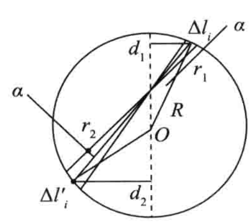
【方法与技巧】

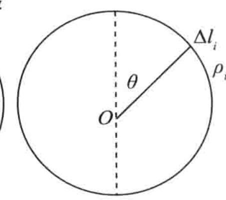


1. 线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电线，弯成图中所示的形状，若圆弧半径为 R，图中 O 点的场强为________。

解题提示：将两半无限长的均匀带电线分别等价为均匀四分之一带电圆弧，则 O 点的场强相当于四分之三带电圆弧在圆心处产生的场强

$$E_0=\frac{2k\lambda}{R}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2k\lambda}{R}\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}k\lambda}{R}$$，方向沿角 AOB 的平分线。





2. 在一个半径为 R 的圆环(非导体)带有电荷 Q，已知在该圆环的一条直径上各点的场强均为 0，求圆环上的电荷分布，即圆环上与圆心连线和该直径成 θ 角处的电荷线密度。

解：方法一、直径上各点的场强均为 0，则图中微元 Δl_i 与 $\Delta l_i'$上的电荷在该直径上产生的场强等大反向，所以：

$$k\frac{\lambda_1\Delta l_i}{r_1^{\ 2}}=k\frac{\lambda_2\Delta l_i'}{r_2^{\ 2}} \quad 即：\frac{\lambda_1\Delta l_i}{r_1^{\ 2}}=\frac{\lambda_2\Delta l_i'}{r_2^{\ 2}} \quad \cdots\cdots ①$$

由几何关系得：$\dfrac{\Delta l_i\cos\alpha}{r_1}=\dfrac{\Delta l_i'\cos\alpha}{r_2}$　即：$\dfrac{\Delta l_i}{r_1}=\dfrac{\Delta l_i'}{r_2}$ …………………………………… ②

由①②可得：$\dfrac{\lambda_1}{r_1}=\dfrac{\lambda_2}{r_2}$　所以：$\dfrac{\lambda_1}{d_1}=\dfrac{\lambda_2}{d_2}$ ……………………………………………………… ③

③式说明电荷密度与到直径的距离成正比。设距该直径最远(R)处的电荷密度为λ_0，则圆环上与圆心连线和该直径成θ角处的电荷线密度为：

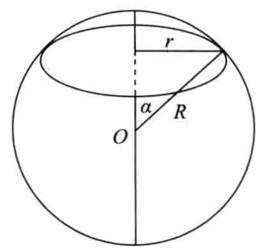
$\lambda_i=\lambda_0\sin\theta$ ………………………………………………………………………… ④

又：$4\sum\lambda_i\Delta l_i=Q$（$\sum\lambda_i\Delta l_i$ 是四分之一圆环上的电量总和）

即：$4\sum\lambda_0\Delta l_i\sin\theta=Q$

所以：$4\lambda_0\sum\Delta l_i\sin\theta=Q$　而 $\sum\Delta l_i\sin\theta=R$

解得：$\lambda_0=\dfrac{Q}{4R}$ ………………………………………………………… ⑤



由④⑤两式得：$\lambda_i=\dfrac{Q}{4R}\sin\theta$

方法二、

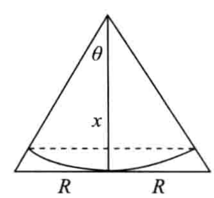
解：用球壳压缩法：设球壳面密度为σ，压缩成圆环的线密度为λ，则：

$\sigma\pi R\sin\theta R\Delta\theta=\lambda R\Delta\theta$

所以：$\lambda=\sigma\pi R\sin\theta$　将 $\sigma=\dfrac{Q}{4\pi R^2}$代入得：$\lambda=\dfrac{Q}{4R}\sin\theta$

3. 在面电荷（正）密度为σ、半径为R的均匀带电圆板的轴线上，距离圆心为x的一点P，求P点的场强和电势。

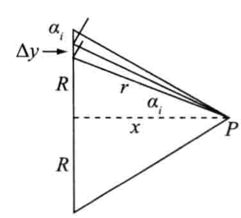
解：(1)求场强：



根据此前内容讲解得：$E=\dfrac{k\sigma}{x^2}S$，其中S为半径为x的球冠的面积

$S=2\pi\cdot x^2(1-\cos\theta)=2\pi\cdot x^2\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$

所以，$E=2k\pi\cdot\sigma\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$或$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$



(2)求电势：$\varphi=\sum k\dfrac{\sigma 2\pi\cdot y\Delta y}{r}$

$=\sum\dfrac{2k\pi\sigma\cdot y\Delta y}{y/\sin\alpha_i}$

$=2k\pi\sigma\sum\Delta y\sin\alpha_i$

不难看出：$\sum\Delta y\sin\alpha_i=\sqrt{x^2+R^2}-x$

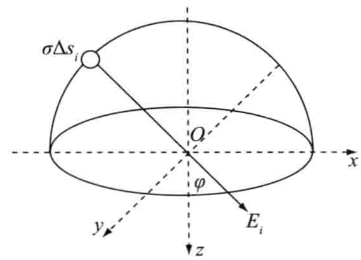
所以，$\varphi=2k\pi\sigma(\sqrt{x^2+R^2}-x)$或$\varphi=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$

圆面中心电势($x=0$)：$\varphi=\dfrac{R\sigma}{2\varepsilon_0}$

4. 把半径为 R 的球体用过球心的三个平面分割成八等分，取其中一份使之均匀带电，电荷体密度为 ρ，求此八分之一带电球体在球心处产生的场强。

解：思路：先通过均匀带电半球面在球心处产生的场强，确定八分之一带电球面在球心处产生的场强，进而求出八分之一带电球体在球心处产生的场强。

半径为 r、面电荷密度为 σ 的均匀带电半球面，如图所示。该均匀带电半球面在球心处产生的场强方向必沿其对称轴方向。



$$E=\sum E_i\cos\varphi=\sum\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta s_i}{r^2}\cos\varphi$$

$$=\frac{\sigma}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r^2}\sum\Delta s_i\cos\varphi$$

$$\sum\Delta s_i\cos\varphi=\pi r^2$$

$$\therefore E=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

半球面可等分为 4 个八分之一球面，每个八分之一球面在球心处产生的场强沿 x 方向的分量为：$E_{0x}=\frac{1}{4}E=\frac{\sigma}{16\varepsilon_0}$，八分之一球面对于空间的 x、y、z 轴地位相同，所以，每个八分之一带电球面在球心处产生的场强在 y、z 方向上的分量也是 $E_{0y}=E_{0z}=\frac{\sigma}{16\varepsilon_0}$，所以，每个八分之一球面在球心处产生的场强大小为：

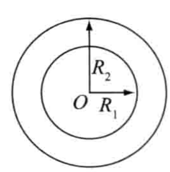
$$E_0=\sqrt{E_{0x}{}^2+E_{0y}{}^2+E_{0z}{}^2}=\frac{\sqrt{3}\sigma}{16\varepsilon_0}$$

电荷体密度为 ρ 的八分之一带电球体可分割成一系列八分之一带电球面，其中任意半径为 r、厚为 Δr 的八分之一带电球面，其面电荷密度为 $\sigma=\rho\Delta r$，所以，八分之一带电球体在球心处产生的场强为：

$$E=\sum\frac{\sqrt{3}\rho\Delta r}{16\varepsilon_0}=\frac{\sqrt{3}\rho}{16\varepsilon_0}\sum\Delta r=\frac{\sqrt{3}\rho R}{16\varepsilon_0}$$

6. 一球壳内外半径分别为 R_1、R_2，球壳均匀带电（不考虑电介质的极化），体电荷密度为 ρ，试求离球心距离为 r 处一点的场强及电势。

解：如图所示，将空间划分成三个区域



(1) 当 $r<R_1$ 时 $E_1=0$

$$\varphi_1=\sum_{R_1}^{R_2}k\frac{\Delta q}{r}=\sum_{R_1}^{R_2}k\frac{\rho 4\pi r^2\Delta r}{r}=4k\pi\rho\sum_{R_1}^{R_2}r\Delta r=2k\pi\rho(R_2{}^2-R_1{}^2)$$

(2) 当 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 时

$$E_2=k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1{}^3)}{r^2}=\frac{4k\pi\rho}{3r^2}(r^3-R_1{}^3)$$

$$\varphi_2=k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1{}^3)}{r}+\sum_{r}^{R_2}k\frac{\rho 4\pi\cdot r^2\Delta r}{r}$$

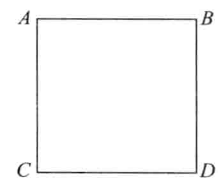
$\therefore \varphi_2=\frac{4k\pi\rho}{3r}(r^3-R_1{}^3)+2k\pi\rho(R_2{}^2-r^2)$

(3)当 $r>R_2$ 时

$$E_3=k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(R_2{}^3-R_1{}^3)}{r^2}=\frac{4k\pi\rho(R_2{}^3-R_1{}^3)}{3r^2}$$

$$\varphi_3=k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(R_2{}^3-R_1{}^3)}{r}=\frac{4k\pi\rho(R_2{}^3-R_1{}^3)}{3r}$$

7. 边长为 l 的正方形 $ABCD$，现将电荷 $+q$、$-q$、$+q$、$-q$ 依次放在 A、B、C、D 四点上，求此过程中外力做的总功。



解：$W_A=0$

$$W_B=-k\frac{q^2}{l},W_C=k\frac{q^2}{l}-k\frac{q^2}{\sqrt{2}l}$$

$$W_D=-k\frac{q^2}{\sqrt{2}l}+k\frac{q^2}{l}-k\frac{q^2}{l}=-k\frac{q^2}{\sqrt{2}l}$$

$$W=W_A+W_B+W_C+W_D=-k\frac{\sqrt{2}q^2}{l}$$

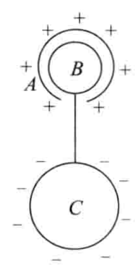
8. 已知使一个原来不带电的导体小球与一带电量为 Q 的导体大球接触，分开之后，小球获得电量 q，今让小球与大球反复接触，在每次分开后，都给大球补充电荷，使其带电量恢复到原来的值 Q，求小球可能获得的最大电量.

解：两个带电导体球相接触时，两球的带电量之比为定值，所以：

$$\frac{q}{Q-q}=\frac{q_m}{Q},q_m=\frac{qQ}{Q-q}$$

注：孤立导体的形状对电荷分布的影响：导体表面的面电荷密度与对应的曲率半径成反比（证明提示：两个相距很远半径不同的导体球用导线连接，利用两球电势相等可证明此结论）。但这不是一个绝对的结论，如上述例题中相互接触的两个导体球，每个球面上各处的电荷面密度不会相等，但同一球面上各处却有相同的曲率半径。

9. 如图所示 A、B、C 为三个金属薄球壳，三者的半径分别为 $r_A=10\text{cm}$、$r_B=5\text{cm}$、$r_C=20\text{cm}$，所带的电量分别为 $Q_A=1\times10^{-9}C$、$Q_B=0$、$Q_C=-2\times10^{-9}C$。A 和 B 为同心放置，C 远离 A、B。现在 A 上开一小孔，并用一金属细丝穿过此小孔将 B 与 C 连接，然后立即取走此金属细丝。试问经此连接后球壳 B 将带上多少电量？（被金属丝带带走的电量极少，可忽略不计。）



解：B 球的电势（即球心电势）等于 C 球电势，设球壳 B 将带上 q 电量

$$k\frac{Q_A}{r_A}+k\frac{q}{r_B}=k\frac{Q_C-q}{r_C}$$

代入数据解得：$q=-8\times10^{-10}C$

10. 半径为 r 的金属球远离其它物体，通过一阻值为 R 的电阻器接地，电子束以速度 v 从远处向金属球运动落到金属球上，每秒钟落到球上的电子数为 n，已知电子的质量和电荷分别为 m、$-e$，试求金属球每秒钟释放的能量 Q 及球上的电量 q。