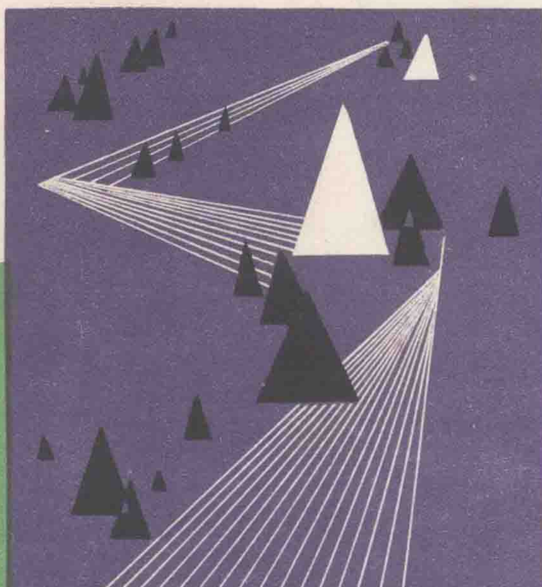
中等职业学校教学指导书

数学教学指导书

第二册

湖南省中等职业教育教材编审委员会编审

湖南科学技术出版社



中等职业学校教学指导书

数学教学指导书　第二册

湖南省中等职业教育教材编审委员会编审

湖南科学技术出版社

中等职业学校教学指导书

数学教学指导书（第二册）

编　　审：湖南省中等职业教育教材编审委员会
责任编辑：戴湘辉
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路3号
印　　刷：株洲市冶金印刷厂
厂　　址：株洲市大坪路19号
邮　　编：412000
（印装质量问题请直接与本厂联系）
出版日期：1996年5月第1版第1次
开　　本：787×1092毫米　1/32
印　　张：4
字　　数：89,000
印　　数：1—2,120
书　　号：ISBN 7—5357—2045—5/G·161
定　　价：3.50元

说　　明

中等职业学校教学指导书的编写工作是在湖南省教育委员会领导下，由湖南省中等职业教育教材编审委员会组织的。编审委员会由田维泉同志任主任，蒋作斌同志任副主任兼总编，袁翠珍同志任副主任兼总审，彭世华同志任副总编，彭酉滨同志任副总审，欧阳河同志为总责任编审，桂建生、陈拥贤同志为责任编审。

本书是根据中等职业学校教材数学第二册的内容，遵循职业高级中学（三年制）数学教学大纲（试用）的有关精神编写而成的。每章分教学要求，教材分析与教学建议，练习题答案、提示和解答，附录四部分。其中教学要[illegible]以下四个层次：

1. 了解：对知识的涵[illegible]一知识是什么，能够（[illegible]

2. 理解：对概念和规[illegible]性认识，不仅能够说出概[illegible]样得出来的、它与其他概[illegible]

3. 掌握：一般地说[illegible]能，能够（会）用它去解决[illegible]

4. 灵活运用：是指能够[illegible]从而形成能力。

各章所列的教学要求，均为职业高中各专业学生必修内容的最低要求、选修内容的一般要求。

本套教学指导书由彭仲武、曹幼文任主编，章光裕任副主

编，李求来任主审。第二册教学指导书的编写人员是：株洲市工业中等专业学校贺万钧（第一章），株洲铁路机械学校陈秀琼（第二章、附录），湖南省化工学校彭仲武、唐轮章（第三章、第四章），全书由彭仲武、曹幼文统稿，湖南师范大学李求来教授审定。

职业高中数学教学指导书，在我省尚属第一次编写，缺点和错误在所难免，请有关专家、学者和使用本书的教师指正。

湖南省中等职业教育教材编审委员会

1996年3月

目　　录

第一章　复　数

Ⅰ　教学要求

1. 理解复数的概念. 理解复平面上的点与复数一一对应关系.

2. 掌握复数的代数形式的四则运算.

3. 掌握复数的向量表示及三角形式. 掌握复数的代数形式和三角形式的互化. 掌握三角形式的乘法、除法,理解三角形式的乘方和开方运算,并了解其几何意义.

4. 理解在复数集中解实系数一元二次方程的方法.

5. 了解复数的指数形式及其运算.

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章教材分四节.

第一节是复数的概念,教材从负数的开平方出发引进了虚数单位、纯虚数、复数和共轭复数等概念. 在复数的几何表示法中介绍了用复平面内的点和向量表示复数的方法.

第二节是复数代数形式的四则运算,并介绍了用向量作复数的加法、减法、乘法运算.

第三节是复数的三角形式及其运算,讨论了复数的三角形式与代数形式之间的互化. 介绍了复数三角形式的乘、除、乘方、

开方运算，以及实系数一元二次方程在复数集中的解法.

第四节是复数的指数形式及其运算. 利用欧拉公式给出了复数的指数形式，讨论了复数的代数形式、三角形式与指数形式之间的互化；介绍了复数指数形式的乘、除、乘方、开方运算法则.

本章教学重点：

(1) 复数的概念；

(2) 复数的几何表示法；

(3) 复数的代数形式和三角形式，以及在这两种形式下的运算法则.

本章的难点：

(1) 复数的概念；

(2) 复数的开方运算.

复数概念是本章教学的基础，应使学生熟练掌握. 复数的几何表示法可使学生认识复数并不是一种虚构的数，而是有其具体的几何形象. 复数的三角形式是通过复数的几何表示法直观地加以叙述的. 复数的代数形式和三角形式也是本章的基础知识. 尤其是用三角形式作乘、除、乘方、开方运算较为方便，而在作复数的加、减法时一般用代数形式。同时，复数的三角形式及其运算，在学习高等数学和其他专业课程中用得较多，因此，必须使学生掌握好这些内容.

复数的指数形式在电专业的有关课程中，使用较多，因此对于电类专业，指数形式要作重点内容组织教学.

复数的概念学生不易接受。我们知道，实数的概念是根据实践需要出发建立的，比较直观具体. 而虚数单位 i 则是从解一元二次方程的需要给出的，$i^2=-1$，较为抽象. 复数、实数、虚数、纯虚数等概念学生也易混淆，教学中最好采用对比的方法，让学

生清楚地理解它们的联系和区别. 复数开方的公式推导过程比较复杂，学生不易掌握，学生对于一个复数的几次方根，往往与算术根概念相混淆，应用公式计算时也易发生错误，教学时应注意指出产生错误的原因，并予以纠正。

本章教学约需 12 课时，具体分配如下(供参考)：

第一节	复数的概念	约 2 课时；
第二节	复数的四则运算	约 3 课时；
第三节	复数的三角形式及其运算	约 5 课时；
第四节	复数的指数形式及其运算	约 1 课时；
复习小结		约 1 课时.

第一节　复数的概念

一、数概念的扩展

数概念的扩展是这一章教材的引言，起着承前启后的作用，首先对已学过的数集的发展和逐步扩充的过程作了简明扼要的概括. 数的每一次扩展，解决了数学本身一些运算不能进行的矛盾，使得一些代数方程在新的数集中有解.

二、复数的概念

1. 在讲复数的概念时，可先从解方程 $x^2+9=0$ 和 $x^2+2x+8=0$ 提出负数开平方的问题，接着按教材顺序从解方程 $x^2=-1$ 入手，引入虚数单位 i，并规定“(1)它的平方等于 -1，(2)实数与它进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍成立.”

以上的第一条明确了学习复数的必要性. 第二条是数集扩充的原则之一. 教学时要强调这两点.

虚数单位 i 有一个重要特性，即乘幂运算的周期性：

$i^{4n}=1$；$i^{4n+1}=i$；$i^{4n+1}=-1$；$i^{4n+3}=-i$，其中 $n\in N$. 并规定

$i^{0}=1$；$i^{-m}=\dfrac{1}{i^{m}}\quad(m\in N)$

这样，i 的关于乘幂运算的周期性，对一切整数 n 都成立.

2. 关于复数的概念，当虚数单位 i 给出定义后，紧接着给出了复数概念，再就 $a+bi$ 中的 a、b 是否等于零分别给出虚数、纯虚数、实数等概念. 当 $b\neq0$，$a=0$ 时，bi 可看作实数 b 与虚数单位 i 相乘形式的数. 对照实数单位是 1，说明纯虚数的单位是 i，这可以加强学生对虚数单位的认识.

3. 复数 $a+bi(a、b\in R)$其中 a 是实部，b 是虚部（学生往往把 bi 视为虚部）复数记号 $a+bi$ 是一个整体.

复数是虚数（$b\neq0$）和实数（$b=0$）的总称，实数、虚数都是复数，学生有时把复数和虚数混为一样，教学中应强调它们的区别.

自然数集 N，整数集 Z，有理数集 Q，实数集 R 和复数集 C 之间有如下的包含关系：

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C.$$

4. 复数的相等：两个复数相等即它们的实部和虚部相等，反之亦然。即

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c,b=d.$$

两个复数都是实数时，可以比较它们的大小；只要其中有一个不是实数时，就不能比较它们的大小.

三、复平面，复数的向量表示

复数 $z=a+bi$ 由一对有序实数(a,b)确定，反之，有序实数对(a,b)又确定一个复数 $a+bi$. 于是，复数 $z=a+bi$ 与直角坐

标平面上的点 $Z(a,b)$ 建立了一一对应关系，则复数可以用直角坐标平面上的点表示. 表示复数的直角坐标平面叫做复平面. 复数 $Z=a+bi$ 也可以与以原点为起点，点 $Z(a,b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应，它们也是一一对应的.

1. 在用直角坐标平面内的点表示复数时，可以着重说明以下几点：

(1) 当复数 $a+bi$ 与直角坐标平面上的点 $Z(a,b)$ 有了对应关系后，此直角坐标平面就称为复平面，x 轴称为实轴，y 轴(除原点外)称为虚轴，实轴上的点表示实数，虚轴上的点表示纯虚数，各象限内的点表示纯虚数以外的虚数.

(2) 复数 $z=a+bi$ 中的 z 用小写，复平面内的点 Z 用大写.

(3) 表示互为共轭的复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的点关于实轴对称，如果 $b=0$，即实轴上的点与其本身关于实轴对称.

2. 在讲用向量表示复数时，教材着重讲了复数的模和辐角的定义，这样可使学生对用向量表示复数有一个完整的认识，也为学习复数的三角形式作好了准备，要使学生掌握复数的模(或绝对值)的意义及记号 $r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，无论何种表示，都是一个正实数或零. 即求 r 时取算术根 $\sqrt{a^2+b^2}$. 学生往往忽略 $|a+bi|$ 的实质，错误地与复数 $a+bi$ 等同看待. 要使学生掌握复数辐角的意义，它是实轴正半轴绕原点 O 旋转到向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所形成的角，有始边也有终边.

根据复数的模和幅角 θ 的定义，如果 r 和 θ 已知，则复数就唯一确定了，反之，则不然，因为任何一个非零复数，它的模虽然唯一确定，但辐角可以有无穷多个，它们彼此相差 $2k\pi(k\in Z)$，教材把在 $[0,2\pi]$ 上取的值称为辐角的主值. 一个等于零的复数，它的模等于零，而辐角是任意的. 求复数 $a+bi$ 的辐角，可以利

用公式 $\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$ 或 $tg\theta=\frac{b}{a}(a\neq0)$，要注意的是应根据 a 和 b 的正负号才能确定 θ 所在的象限，从而求得 θ 的主值，单纯用表达式 $\theta=arctg\ \frac{b}{a}$ 给出 θ 的主值是错误的，初学时，最好要求学生结合图形求得 θ 的主值.

第二节　　复数的四则运算

一、复数的加减法

复数的加减法法则是由向量的加减法的坐标表示得出的。这里正是新编教材的特点，也是前面所学向量知识的应用. 在讲此节前，应复习第一册向量的加减法的坐标表示法，为学好这一节打好知识基础.

复数的加减法在复平面上的几何表示，即向量加减法的平行四边形法则，在复习第一册向量加减法的基础上，引导学生观察教材上的图 1—7 和图 1—8，使之加深理解和认识.

公式(1—4)为复数加减法的代数形式，也可以理解按多项式加、减法的法则进行，图 1—7 和图 1—8 则为复数加减法的几何解释，也就是向量法.

在第一节规定："虚数单位 i 与实数 b 相乘再与 a 相加且由于它的运算满足加法和乘法的交换律."这里又可理解复数的加减法可以按照多项式的加减法法则进行，这样，复数在复数范围内的加法交换律和结合律仍然成立.

让学生通过思考，自己得出两个共轭复数的和是实数，而差是纯虚数的结论.

二、复数的乘除法

1. 按照教材讲解复数的乘法，可按多项式的乘法进行，而不必死记公式. 通过例题 4，使学生掌握两个共轭复数的积是一个实数.

复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，这些都不要花时间去证明，只要求会使用.

2. 在讲复数代数形式的除法时，一定要先写成分式形式，分子、分母同乘以分母的共轭复数，再把它们写成复数的一般形式.

与乘法对比，说明两个共轭复数的商$\frac{a+bi}{a-bi}$一般不会是实数；当 a,b 中有一个为零时，它们的商才是实数.

3. 关于复数的乘方，可作为复数乘法的一种特例来讲解，至于复数代数形式 $a+bi$ 的开方教材在此不作介绍，以后在复数三角形式中再行讨论.

第三节　复数的三角形式及其运算

一、复数的三角形式

在讲复数的三角形式时，可结合复数的几何表示法，利用复数的模和辐角的规定，得出复数的实部 $a=r\cos\theta$ 和虚部 $b=r\sin\theta$，由此得到复数的三角形式：

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

在得出复数的三角形式之后，可说明如下几点：

(1) 为了与复数的三角形式有所区别，将复数 $a+bi$ 称为

复数的代数形式.

（2）应明确指出复数的三角形式必须具备下面四个特点：1）一个非零复数的模 $r>0$；2）$cos\theta$ 与 $sin\theta$ 中的 θ 总是相同的；3）$cos\theta$ 与 $sin\theta$ 之间用"＋"号连接；4）括号中实部必须是 $cos\theta$，虚部必须是 $sin\theta$.

因为复数的辐角的一般形式是 $2k\pi+\theta(k\in Z)$，所以复数的三角形式也可以写成

$$r[cos(\theta+2k\pi)+isin(\theta+2k\pi)] \quad (k\in Z)$$

将复数的代数形式化为三角形式时，一般辐角 θ 只写主值，但有时按需要，θ 也可取负值和大于 2π 的值. θ 可取弧度，也可取角度.

应该使学生掌握复数的代数形式与三角形的互化，解这方面的题可结合例题，先在复平面上作出复数所对应的点（或向量），由图形确定辐角所在的象限，再利用三角知识，将复数化为三角形式，为了防止错误还可以让学生将三角形式还原为代数形式，以作检验.

在其他课程如电工学中，还将模为 r，辐角为 θ 的复数记作"$r\angle\theta$"，这种形式称为复数的极式. 即 $r(cos\theta+isin\theta)=r\angle\theta$.

例如 $2(cos30°+isin30°)=2\angle30°$；

$5\angle\pi=5(cos\pi+isin\pi)$.

二、复数的三角形式的乘、除、乘方、开方运算

按照教材讲解复数的三角形式的乘、除、乘方等运算，在教学过程中应说明以下各点：

1）一般说来，利用复数的三角形式作乘、除、乘方等运算较为简捷，但也不是绝对的，我们注意到 $(1+i)^2=2i$；$(1-i)^2=-2i$；$(1+i)(1-i)=2$. 因此，象下面的一些复数运算，直接用代

数形式运算也很简便：

$$(1+i)^{10}=[(1+i)^2]^5=(2i)^5=32i;$$

$$(-2+2i)^8=[-2(1-i)]^8=2^8[(1-i)^2]^8=2^8(-2i)^4$$
$$=2^{12}=3096;$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=\frac{[(1+i)(1+i)]^3(1+i)^2}{[(1-i)(1+i)]^3}=\frac{(2i)^3 2i}{2^3}=2.$$

2)利用复数三角形式作运算时，一般要把计算结果写成代数形式.

3)因为复数的乘、除、乘方等运算的结果都是单值，所以利用三角形式作这些运算时，复数的辐角只取主值.

4)复数三角形式的乘、除、乘方和开方等运算法则一般只能用于复数的三角形式，不能对不是三角形式的复数直接运用复数的三角形式的法则进行计算.

例如在计算

$$\frac{3(cos30°-isin30°)}{4(cos60°+isin60°)}$$

时，分子 $3(cos30°-isin30°)$ 不是复数的三角形式，应先将它化为三角形式 $3[cos(-30°)+isin(-30°)]$ 然后才能利用除法法则进行计算，即

$$\frac{3(cos30°-isin30°)}{4(cos60°+isin60°)}=\frac{3[cos(-30°)+isin(-30°)]}{4(cos60°+isin60°)}$$
$$=\frac{3}{4}[cos(-30°-60°)+isin(-30°-60°)]=-\frac{3}{4}i.$$

5)本教材只就 n 为正整数，用不完全归纳法推出了棣莫佛(*De Moivre*)定理，教学时不必详细证明，也不要推广到 $n\in Z$ 了.

6)复数 $z=r(cos\theta+isin\theta)$ 的 n 次方根表示为 $\sqrt[n]{r}(cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+isin\frac{\theta+2k\pi}{n})(k=0,1,2\cdots\cdots n-1)$.

这里回避了一个极易混淆概念的符号——“$\sqrt[n]{z}$”，教学时不要采用这个符号，可通过一些例题和练习题使学生理解公式(1—12)的含义，从而掌握复数开方的方法.

7)关于实系数一元二次方程在复数集中的根的讨论，教材直接给出了当判别式$\Delta=b^2-4ac$大于零、等于零、小于零三种情况下根的情况，教学时，按教材安排直接了当教授便可，并讲解好例9，当堂做好“练习七”第3题.

三、复数的三角形式的乘、除、乘方、开方运算的几何意义(向量运算)：

1. 利用向量运算来讨论复数三角形式的乘、除、乘方、开方运算，正是新编教材突出的特点. 要掌握运算结果的几何表示，关键就是要弄清公式(1—8)至公式(1—12)中的积、商、方幂、方根的模和辐角各是什么，从而较易作出运算结果的向量来.

2. 两个复数相乘，可用如下的几何作图方法与它们的积对应的向量来。如图1—1，先分别画出与Z_1，Z_2对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$，再以$\overrightarrow{OP_1}$为始边，O为顶点画$\angle P_1OP_3=\theta_2$，在x轴的正半轴上取点A，使$OA=1$，连结AP_2. 以P_1为顶点、P_1O为一边画$\angle OP_1P_4=\angle OAP_2$. 设$P_1P_4$与$OP_3$交于点$P$，则向量$\overrightarrow{OP}$就与复数$z_1z_2$对应.

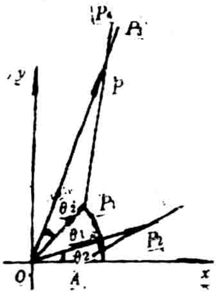


图1—1

事实上，因为$\overrightarrow{OP}$与x轴的正半轴的夹角为$\theta_1+\theta_2$，由