

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书



高等数学辅导

同济·七版

(上下册合订本)

张天德◎主编

· 同济七版 ·
全新升级

年销量10万册 《高等数学辅导》

考点图解+题型归总+真题精讲+习题全解



 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

教育部《学位授予和人才培养学科目录》
数学类 0701 数学

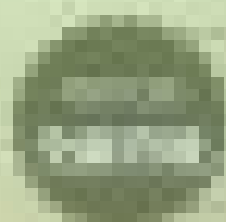
00
00

高等数学辅导

同济·七版

（上下册合订本）

蔡天德·主编



清华大学出版社
北京 清华大学学研大厦A座
100084 电话：010-62770175
http://www.tup.tsinghua.edu.cn



清华大学出版社
Tsinghua University Press

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书

理工类

高等数学辅导

同济·七版

(上下册合订本)

张天德◎主编

窦慧、毛凯◎副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学辅导: 同济7版/张天德主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2015. 1
ISBN 978 - 7 - 5682 - 0058 - 5

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 305400 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)
82562903 (教材售后服务热线)
68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定彩虹印刷有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 40.25

字 数 / 824 千字

版 次 / 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 38.80 元

责任编辑 / 王俊洁

文案编辑 / 侯瑞娜

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前 言

高等数学是理工类专业的一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》是一部深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为了帮助读者学好高等数学,我们编写了《高等数学辅导(同济七版)》,该书与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》配套,汇集了编者几十年的丰富经验,将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。本书将会成为读者学习高等数学的良师益友。

本书的章节划分和内容设置与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识点进行简要地概括,然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构七大部分

一、知识结构图解 用结构图解的形式对每节涉及的基本概念、基本定理和基本公式进行系统地梳理,并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需要注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、重点及常考点分析 分类总结每章重点题型以及重要定理,使读者能更扎实地掌握各个知识点,最终提升读者应试能力。

三、考研大纲要求解读 帮助读者了解本章内容在考研试题中考查的考点及题型,为复习备考指明方向,使读者准备考试更加轻松。

四、例题精解 这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题及全国大学生数学竞赛试题的研究,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研和数学竞赛中经常考到的重点、难点、考点归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量精选例题,深入讲解,使读者扎实掌握每一个知识点,并能在具体解题中熟练运用。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动,一举突破,从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”,更是巧妙点拨,让读者举一反三、触类旁通。

五、本章知识小结 对本章所学的知识进行系统回顾,帮助读者更好地复习、总结、提高。

六、本章同步自测 精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年研究生入学考试和大学生数学竞赛试题),以此检测、巩固读者所学知识,达到提高应试水平的目的。

七、教材习题详解 为了方便读者对课本知识进行复习巩固,本书对教材课后习题做了详细解答,这与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中,本书对部分有代表性的习题设置了“思路探索”,以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;本书安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。针对部分习题,本书还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

一、重新修订、内容完善 本书是《高等数学辅导(同济六版)》的最新修订版,前一版在市场上受到了广大学子的欢迎,每年销量都在10万册以上。本次修订增加了大学生数学竞赛试题,更新了研究生入学考试试题,改正了原来的印刷错误,内容更加完善,体例更为合理。

二、条理清晰、学习高效 知识点讲解清晰明了,分析透彻到位,既对重点及常考知识点进行归纳,又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了深层次的总结。据此,读者不仅可以从全局上对章节要点有整体性地把握,更可以纲举目张,系统地把握数学知识的内在逻辑性。

三、联系考研、经济实用 本书不仅是一本教材同步辅导书,也是一本不可多得的考研复习用书,书中内容与研究生入学考试联系紧密。本书在知识全解版块设置“考研大纲要求”版块,例题精解和自测题部分选取大量考研真题,让读者在同步学习中达到考研的备考水平。

本书由张天德任主编,窦慧、毛凯任副主编。衷心希望我们的这本《高等数学辅导(同济七版)》能对读者有所裨益。由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,不足之处敬请读者批评指正,以便不断完善。

张天德

目 录

教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限	3
第一节 映射与函数	4
第二节 数列的极限	7
第三节 函数的极限	9
第四节 无穷小与无穷大	12
第五节 极限运算法则	13
第六节 极限存在准则 两个重要极限	15
第七节 无穷小的比较	19
第八节 函数的连续性与间断点	21
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	23
第十节 闭区间上连续函数的性质	25
自测题	27
自测题答案	29
第二章 导数与微分	31
第一节 导数概念	32
第二节 函数的求导法则	36
第三节 高阶导数	39
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	41
第五节 函数的微分	44
自测题	47
自测题答案	48
第三章 微分中值定理与导数的应用	52
第一节 微分中值定理	53
第二节 洛必达法则	57
第三节 泰勒公式	61
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	65

第五节 函数的极值与最大值最小值	70
第六节 函数图形的描绘	73
第七节 曲率	75
第八节 方程的近似解	76
自测题	79
自测题答案	80
第四章 不定积分	84
第一节 不定积分的概念与性质	85
第二节 换元积分法	88
第三节 分部积分法	95
第四节 有理函数的积分	100
第五节 积分表的使用	106
自测题	107
自测题答案	108
第五章 定积分	111
第一节 定积分的概念与性质	112
第二节 微积分基本公式	117
第三节 定积分的换元法和分部积分法	120
第四节 反常积分	123
第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数	126
自测题	127
自测题答案	129
第六章 定积分的应用	133
第一节 定积分的元素法	134
第二节 定积分在几何学上的应用	134
第三节 定积分在物理学上的应用	138
自测题	140
自测题答案	142
第七章 微分方程	147
第一节 微分方程的基本概念	148
第二节 可分离变量的微分方程	149
第三节 齐次方程	153
第四节 一阶线性微分方程	154
第五节 可降价的高阶微分方程	158
第六节 高阶线性微分方程	160
第七节 常数系数齐次线性微分方程	162

第八节 常系数非齐次线性微分方程	164
第九节 欧拉方程	166
第十节 常系数线性微分方程组解法举例	168
自测题	170
自测题答案	171

教材习题全解(上册)

第一章 函数与极限	175	总习题三解答	246
习题 1-1 解答	175	第四章 不定积分	252
习题 1-2 解答	179	习题 4-1 解答	252
习题 1-3 解答	181	习题 4-2 解答	254
习题 1-4 解答	184	习题 4-3 解答	258
习题 1-5 解答	185	习题 4-4 解答	261
习题 1-6 解答	187	习题 4-5 解答	264
习题 1-7 解答	188	总习题四解答	267
习题 1-8 解答	190	第五章 定积分	273
习题 1-9 解答	192	习题 5-1 解答	273
习题 1-10 解答	194	习题 5-2 解答	278
总习题一解答	195	习题 5-3 解答	281
第二章 导数与微分	199	习题 5-4 解答	285
习题 2-1 解答	199	习题 5-5 解答	287
习题 2-2 解答	202	总习题五解答	288
习题 2-3 解答	206	第六章 定积分的应用	294
习题 2-4 解答	208	习题 6-2 解答	294
习题 2-5 解答	212	习题 6-3 解答	301
总习题二解答	215	总习题六解答	304
第三章 微分中值定理与 导数的应用	218	第七章 微分方程	307
习题 3-1 解答	218	习题 7-1 解答	307
习题 3-2 解答	221	习题 7-2 解答	309
习题 3-3 解答	223	习题 7-3 解答	311
习题 3-4 解答	226	习题 7-4 解答	314
习题 3-5 解答	233	习题 7-5 解答	318
习题 3-6 解答	238	习题 7-6 解答	322
习题 3-7 解答	242	习题 7-7 解答	326
习题 3-8 解答	245	习题 7-8 解答	328



* 习题 7-9 解答	333	总习题七解答	340
习题 7-10 解答	336		

教材知识全解(下册)

第八章 空间解析几何与向量代数	349
第一节 向量及其线性运算	350
第二节 数量积 向量积 * 混合积	353
第三节 平面及其方程	356
第四节 空间直线及其方程	359
第五节 曲面及其方程	363
第六节 空间曲线及其方程	366
自测题	369
自测题答案	370
第九章 多元函数微分法及其应用	372
第一节 多元函数的基本概念	373
第二节 偏导数	376
第三节 全微分	381
第四节 多元复合函数的求导法则	385
第五节 隐函数的求导公式	389
第六节 多元函数微分学的几何应用	392
第七节 方向导数与梯度	395
第八节 多元函数的极值及其求法	398
* 第九节 二元函数的泰勒公式(略)	401
* 第十节 最小二乘法(略)	401
自测题	402
自测题答案	403
第十章 重积分	405
第一节 二重积分的概念与性质	406
第二节 二重积分的计算法	408
第三节 三重积分	415
第四节 重积分的应用	421
* 第五节 含参变量的积分	425
自测题	427
自测题答案	429
第十一章 曲线积分与曲面积分	433
第一节 对弧长的曲线积分	434

第二节 对坐标的曲线积分	437
第三节 格林公式及其应用	440
第四节 对面积的曲面积分	445
第五节 对坐标的曲面积分	447
第六节 高斯公式 * 通量与散度	450
第七节 斯托克斯公式 * 环流量与旋度	453
自测题	457
自测题答案	458
第十二章 无穷级数	463
第一节 常数项级数的概念和性质	464
第二节 常数项级数的审敛法	466
第三节 幂级数	471
第四节 函数展开成幂级数	476
第五节 函数的幂级数展开式的应用	478
第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	480
第七节 傅里叶级数	482
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	486
自测题	488
自测题答案	489

教材习题全解(下册)

第八章 空间解析几何与 向量代数

习题 8-1 解答	495
习题 8-2 解答	496
习题 8-3 题解答	498
习题 8-4 解答	500
习题 8-5 解答	503
习题 8-6 解答	505
总习题八解答	507

第九章 多元函数微分法 及其应用

习题 9-1 解答	511
习题 9-2 解答	513
习题 9-3 解答	514

习题 9-4 解答	517
习题 9-5 解答	520
习题 9-6 解答	522
习题 9-7 解答	526
习题 9-8 解答	528
习题 9-9 解答	531
习题 9-10 解答	533
总习题九解答	534

第十章 重积分

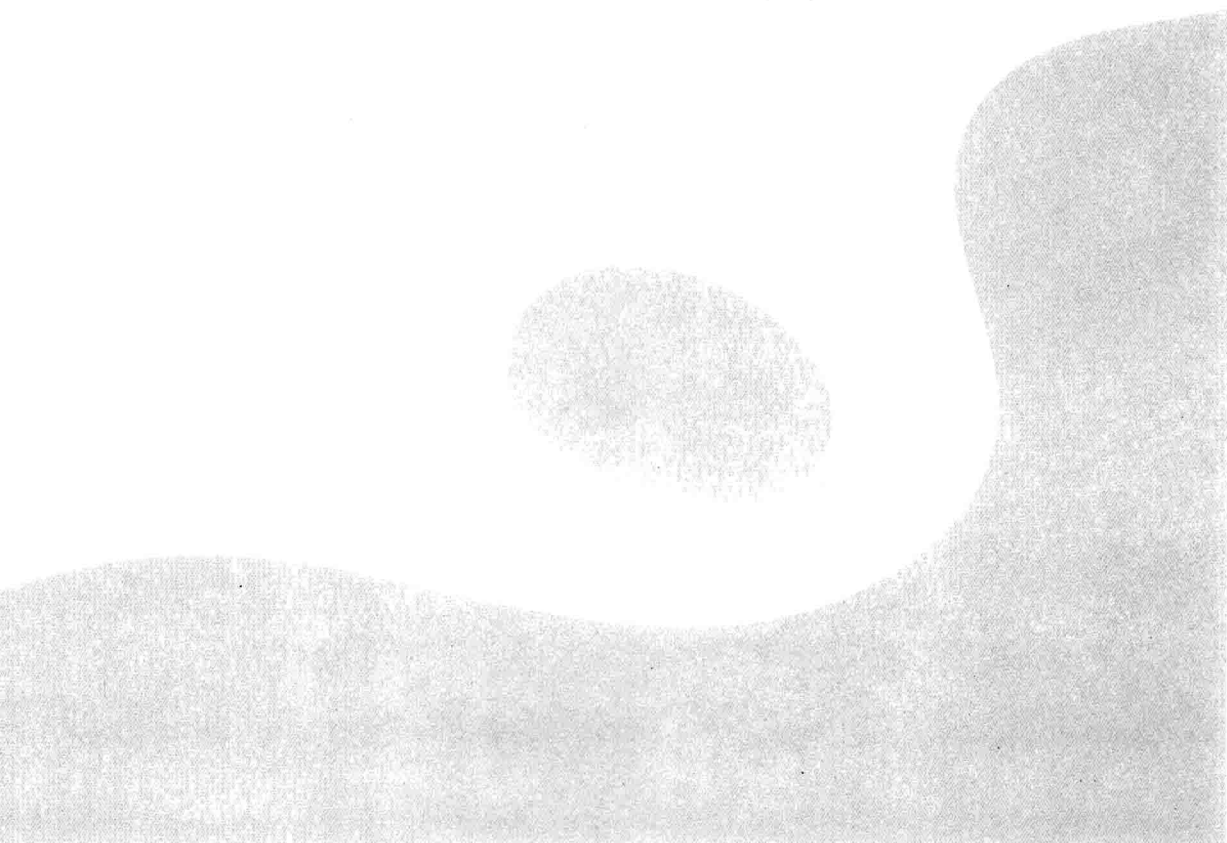
习题 10-1 解答	540
习题 10-2 解答	542
习题 10-3 解答	556
习题 10-4 解答	564
习题 10-5 解答	570
总习题十解答	572

第十一章 曲线积分与 曲面积分	580
习题 11-1 解答	580
习题 11-2 解答	583
习题 11-3 解答	586
习题 11-4 解答	593
习题 11-5 解答	596
习题 11-6 解答	598
习题 11-7 解答	600
总习题十一解答	604

第十二章 无穷级数	610
习题 12-1 解答	610
习题 12-2 解答	612
习题 12-3 解答	614
习题 12-4 解答	615
习题 12-5 解答	618
习题 12-6 解答	622
习题 12-7 解答	623
习题 12-8 解答	627
总习题十二解答	630

教材知识全解

(上册)

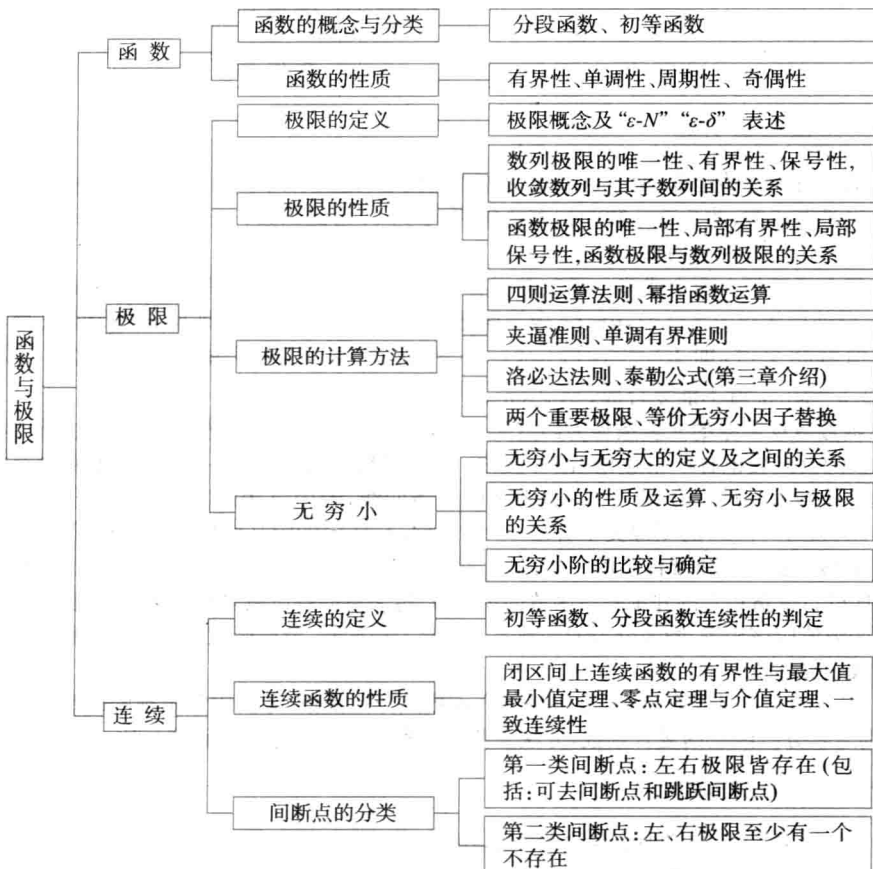


第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象,它以极限理论为基础.在研究函数时,我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质,因此我们应用运动变化的观点来掌握函数.极限与函数的连续性理论是高等数学的基础,如何用已知来逼近未知,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

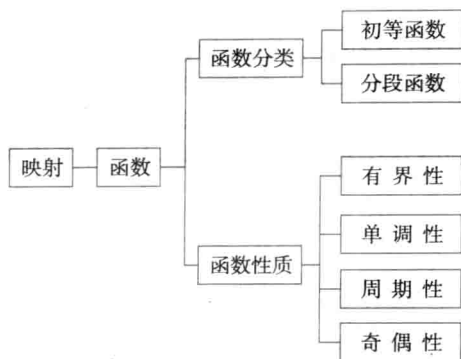
本章知识图解



第一节 映射与函数

知识全解

一 本节知识结构图解



二 重点及常考点分析

1. 函数奇偶性的运算:两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

2. 复合函数可由两个或多个函数进行有限次复合而成,但并不是任意两个函数都可以进行复合.设外层函数 $y=f(u)$, $u \in D$, 内层函数 $u=g(x)$, $x \in E$, 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时,即 $E^* = \{x | g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ 时,两个函数才能复合.例如, $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能复合成 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.

3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的.严格单调函数必有反函数,且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减).反之,有反函数的函数未必一定是严格单调函数, $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线,若用 x 表示自变量, y 表示因变量,则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, $f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数,它用几个不同解析式“分段”表示一个函数.所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域.定义域的各段最多只能在端点处重合,重合时对应的函数值应该相等.图像分段的函数不一定是分段函数,分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数,重点是复合函数及分段函数.考研中常出现的题型是求复合函数,特别是求分段函数的复合函数,方法主要有3种:代入法、分析法和图示法.

三 考研大纲要求解读

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.



例题精解

基本题型 1: 求函数定义域

例 1 求函数 $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解: 由对数定义知 $\frac{5x-x^2}{4} > 0$, 即 $0 < x < 5$.

当 $\lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$ 时, 函数有定义, 即 $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1$, 可知 $1 \leq x \leq 4$.

故函数定义域为 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则:

- (1) 分母不能为零.
- (2) 偶次根式的被开方数不能为负数.
- (3) 对数的真数不能为零或负数.
- (4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$.
- (5) $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- (6) $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

求复合函数的定义域, 通常将复合函数看成一系列初等函数的复合, 然后考查每个初等函数的定义域和值域, 得到对应的不等式组, 通过联立求解不等式组, 就可以得到复合函数的定义域.

例 2 设 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的定义域. (考研题)

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式, 然后再求出 $\varphi(x)$ 的定义域.

解: 由 $f(x) = e^x$, 知 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)}$, 又因为 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 所以 $e^{\varphi(x)} = 1-x$, 于是 $\varphi^2(x) = \ln(1-x)$, 再根据 $\varphi(x) \geq 0$, 可知

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}.$$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\ln(1-x) \geq 0$, 即 $x \in (-\infty, 0]$.

基本题型 2: 求初等函数的表达式

例 3 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

解: 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

基本题型 3: 求分段函数的表达式

例 4 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] =$ (). (考研题)

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

解: $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$