现代数学基础

51 阶的估计基础

潘承洞 于秀源

高等教育出版社

现代数学基础

51

阶的估计基础

■ 潘承洞　于秀源

高等教育出版社·北京

内容简介

本书讲述阶的估计方法与应用。全书共分六章，在讲述阶的概念和基本运算之后，分别介绍与级数、积分、离散和、连续和、隐函数、导函数、Tauber 型定理等有关的阶的估计问题，并介绍了常用的分部积分法与 Laplace 方法。

本书可供具有一定数学基础的理工科大学生、研究生和科技工作人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

阶的估计基础/潘承洞，于秀源编著. —北京：高等教育出版社，2015.1

ISBN 978-7-04-041350-2

Ⅰ.①阶… Ⅱ.①潘…②于… Ⅲ.①数学分析 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 274398 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 赵 阳 责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	13.75	版 次	2015年1月第1版
字 数	240 千字	印 次	2015年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	49.00 元

物 料 号 41350-00

目　录

第一章

阶的概念及 O 与 o 的运算

本章主要介绍无穷大量与无穷小量的阶的概念以及阶的比较, O 与 o 的基本运算规则和有关的基本定理. 这些内容是以后各章的基础. 所以, 除了理论知识外, 本章还包含了较多的例题和习题, 以使读者能够较深刻地理解这些基本知识, 并熟练地运用它们.

1.1 基本概念

在本书中, 多次涉及变量或函数的极限过程. 通常, 这些变量或函数的定义域及相关的条件是容易判定的, 因此, 为叙述简洁, 将不对它们一一列举. 若确属必要, 则将个别地予以说明. 特别地, 若不特别说明, 则 "∞" 表示 "$+\infty$" (通常意义下的正无穷大).

定义 1 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量, 记为

$$f(x) = o(1), \quad x \to x_0.$$

特别地, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 a_n 当 $n \to \infty$ 时是无穷小量, 记为

$$a_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

注　由定义可知,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad 与 \quad f(x) = a + o(1), \quad x \to x_0$$

是等价的; 此外, 若 $b \neq 0$, 则 $\frac{a+o(1)}{b+o(1)} = \frac{a}{b} + o(1)$.

下面是几个无穷小量的例子:

$$\frac{x+\sin x}{x^2+5x-2},\ \frac{3x}{e^x+\log x},\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x},\ \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin x}{x} \quad (x\to\infty);$$

$$xe^x + 3\log(1+x),\ e^{\sin x}\cos x - 1,\ \int_{x^{-2}}^{\infty} e^{-t}\log t dt \quad (x\to 0);$$

$$(-1)^n\frac{\sin n}{n} + e^{-\frac{1}{n^2}\log n} - 1,\ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2\log k+\sin k}{k^3} \quad (n\to\infty),$$

其中 $\log x$ 是数 x 以数 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 为底的对数 (在本书中总是使用这个表示).

定义 2　若 $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \infty$ (或 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷大量 (或正无穷大量, 或负无穷大量).

对于数列 $\{a_n\}$ 有相应的定义.

下面的一些量都是无穷大量:

$$Ax^n + Bx^m \quad (n \neq m, A^2+B^2 \neq 0, x\to\infty);$$

$$x + \sin x \log x \quad (x\to\infty);$$

$$x^\alpha + A(\log x)^\beta \quad (\alpha > 0, x\to\infty);$$

$$\frac{1}{\sin x} + \cos x + 1 (x\to 0), \quad \frac{5}{\sqrt{x}-1} \quad (x\to 1);$$

$$(-1)^n n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad (n\to\infty).$$

无穷大量与无穷小量的概念, 只反映变量的变化趋势, 对于变量的其他性质并未做出任何描述. 而在具体问题中, 除了变量的变化趋势, 我们更关心的却是对于这种变化趋势的量的方面的了解, 经常需要比

较变量的变化趋势在量的方面的差异, 并通过对这些差异的分析, 找出它们的内在联系. 在这些差异中, 最明显的一个就是变化 “速度” 的不同. 例如, 变量 $\sqrt{x}, x^2$ 与 x^3 当 $x \to \infty$ 时虽都是无穷大量, 但是它们趋于 ∞ 的 “速度” 是大不相同的. 事实上, 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x}}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\infty,$$

我们可以说, 当 $x \to \infty$ 时, 这三个变量趋于 ∞ 的 “速度” 是无法相比的. 粗略地说, x^2 趋于 ∞ 的速度相对于 $\sqrt{x}$ 趋于 ∞ 的速度, 是一个无穷大量. x^3 相对于 x^2 亦有这种关系.

当然, 变量之间这种增长 (或变化) “速度” 的差异, 并不单单存在于无穷大量或无穷小量之间. 例如, 分别取 a_n 及 b_n 为

$$\begin{aligned}
a_n: &\quad \frac{2n-1}{n},\quad 1+\sin\frac{1}{n},\quad 1+\log\frac{1}{n},\\
b_n: &\quad \frac{1}{n^2},\quad \sin\frac{1}{n^2},\quad \log\frac{n-1}{n},
\end{aligned}$$

则在 a_n 与 b_n 之间也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$$

的关系.

为了清楚表明变量在变化趋势方面的差异, 我们引进 “阶” 的概念.

定义 3 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $f(x)$ 对于 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量, 记为

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to x_0.$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷大量.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量.

定义 4 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是等价的, 记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0 \quad 或 \quad f(x)=g(x)(1+o(1)),\quad x\to x_0.$$

例如

$$\sin x=x(1+o(1)),\quad e^x-1=x(1+o(1)),\quad x\to 0;$$
$$\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)=\frac{\log x}{x}(1+o(1)),\quad e^{\frac{1}{x^2}}-1=\frac{1}{x^2}(1+o(1)),\quad x\to\infty.$$

定义 5 设 $g(x)>0$, 若存在常数 $A>0$, 使得

$$|f(x)|\le Ag(x),\quad x\in(a,b)$$

成立, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的强函数, 记为

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\in(a,b).$$

例如

$$\cos x=O(1),\quad -\infty<x<\infty;$$
$$\log x=O(x),\quad x\ge 1.$$

注 1 显然, 改变 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在有限个点的数值, 不影响强函数关系.

注 2 如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在有限, 则存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x)=O(1),\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta);$$

如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在有限, 则存在 $A>0$, 使得

$$f(x)=O(1),\quad |x|>A.$$

注 3 在定义 5 中, 常数 A 被称为 "大 O 常数", 它与变量 x 无关, 在一般情况下, 这点不做特别说明. 但是, "大 O 常数" 可能与参变量有关, 例如, 在

$$\sin(xy) = O(1)$$

中, "大 O 常数" 与参数 y 无关, 但在

$$\sin(xy) = O(x)$$

中, "大 O 常数" 就与参数 y 有关, 此时我们常用 $O_y(\cdots)$ 代替 $O(\cdots)$, 以表明大 O 常数与参数 y 有关, 例如

$$\sin(xy) = O_y(x).$$

当然, 在不致引起误会, 或这个参数的引进对整个问题的处理没有影响时, 也可以略去不写.

定义 6 假设当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量 (无穷小量), 且存在常数 $A > 0, B > 0$, 使得

$$Af(x) \le g(x) \le Bf(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

成立, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是同阶无穷大量 (无穷小量), 记为

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \to x_0.$$

注 对于 $x \to -\infty, x \to +\infty$ 以及 $x \to \infty$ 的情形, 请读者给出同阶无穷大量 (无穷小量) 的定义.

例如,

$$3x\sin(x-2) + |\log x| \asymp |\log x|, \quad x \to 0+;$$

$$\left(4 + \cos\frac{1}{1-x}\right)\left(2e^{\frac{1}{(x-1)^2}} + x\right) \asymp e^{\frac{1}{(x-1)^2}}, \quad x \to 1;$$

$$\log(n + \sin n) \asymp 3\log n, \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \asymp \sin\frac{4}{n}, \quad n \to \infty.$$

例 1 设 $\varepsilon>0$ 及 A 是任意常数, 则对于任意的 $a>0$, 有

$$x^A=o((1+a)^{\varepsilon x}),\quad x\to\infty, \tag{1}$$

$$(\log x)^A=o(x^{\varepsilon}),\quad x\to\infty, \tag{2}$$

$$(f(x))^A=o(e^{\varepsilon f(x)}),\quad x\to\infty, \tag{3}$$

其中 $f(x)$ 是单调上升的函数, 且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

解 不妨设 $A>0$. 令 $n=[x]$, $[x]$ 表示 x 的整数部分 (即不超过 x 的最大整数), $m=[A]+1$, 则当 $x\to\infty$ 时, 显然也有 $n\to\infty$, 因此, 当 $n\geq 2m+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}(1+a)^x\geq(1+a)^n\geq C_n^{m+1}a^{m+1}&\geq\frac{a^{m+1}}{(m+1)!}(n-m)^{m+1}\\&\geq\frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}=\frac{a^{m+1}n^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}.\end{aligned}$$

由于 a 与 m 都是常数, 所以当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\frac{(1+a)^x}{x^A}\geq\frac{a^{m+1}n^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{1}{(1+n)^m}\geq\frac{a^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\cdot n.$$

由此得到: 对于任意的常数 A 及 $a>0$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^A}{(1+a)^x}=0. \tag{4}$$

在上式中取 $x=\varepsilon y$, 则

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^A}{(1+a)^{\varepsilon y}}=0,$$

由此得到 (1) 式.

在 (4) 式中取 $a=e-1, x=\varepsilon\log y$, 则

$$\lim_{y\to\infty}\frac{(\log y)^A}{y^{\varepsilon}}=0,$$

这就是 (2) 式.

在 (2) 式中取 $x=e^{f(y)}$, 则当 $y\to\infty$ 时, $x\to\infty$, 于是得到 (3) 式. □

1.2 大 O 与小 o 的运算

下面是有关大 O 与小 o 的基本运算法则, 本书以后各章节中将直接引用它们而不注明具体出处.

法则 1 若 $f(x)$ 是无穷大量, $x \to x_0$, 并且 $\varphi(x) = O(1)$, 则

$$\varphi(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

法则 2 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = O(\psi)$, 则

$$f(x) = O(\psi).$$

法则 3 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = o(\psi)$, 则

$$f(x) = o(\psi).$$

法则 4 $O(f) + O(g) = O(f+g)$.

法则 5 $O(f)O(g) = O(fg)$.

法则 6 $o(1)O(f) = o(f)$.

法则 7 $O(1)o(f) = o(f)$.

法则 8 $O(f) + o(f) = O(f)$.

法则 9 $o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.

法则 10 $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$.

法则 11 $\{O(f)\}^k = O_k(f^k)$, k 是自然数. 一般地, "大 O 常数"与 k 有关.

法则 12 $\{o(f)\}^k = o(f^k)$.

法则 13 若 $f \sim g, g \sim \varphi$, 则 $f \sim \varphi$.

法则 14 若 $f = o(g), g \sim \varphi$, 则 $g \sim \varphi \pm f$.

法则 15　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是正值函数, $f(x)=o(g(x))$, $x\to\infty$, 则

$$\int_A^B f(x)dx = o\left(\int_A^B g(x)dx\right),\quad B>A\to\infty.$$

特别地, 若存在 A_0 使得 $\int_{A_0}^{\infty} g(x)dx<\infty$, 则

$$\int_A^{\infty} f(x)dx = o\left(\int_A^{\infty} g(x)dx\right),\quad A\to\infty.$$

法则 16　若 a_n 与 b_n 都取正值 $(n=1,2,3,\cdots)$, $a_n=o(b_n), n\to\infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{M} b_n\right),\quad M>N\to\infty;$$

特别地, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{\infty} b_n\right),\quad N\to\infty.$$

以上的法则都易验证, 我们仅举几个法则证明如下, 其余请读者补足.

法则 6 的证明　设 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 且

$$|g(x)|\le Mf(x),\quad x\in(a,b).$$

则

$$0\le \lim_{x\to x_0}\left|\frac{\varphi(x)g(x)}{f(x)}\right|\le M\lim_{x\to x_0}|\varphi(x)|=0,$$

于是

$$\varphi(x)g(x)=o(f(x)).$$ □

法则 11 的证明　设 $|g(x)|\le Mf(x)$, $x\in(a,b)$. 则

$$|g(x)|^k\le M^k f^k(x),\quad x\in(a,b),$$

即

$$(g(x))^k = O_k(f^k(x)),\quad x\in(a,b).$$ □

下面是关于大 O 与小 o 两个简单却重要的注记.

注 1 在上面的基本运算中, 我们没有说到关于反函数的性质. 一般地, 如果 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 都是增函数, $\tilde{\varphi}(x)$ 与 $\tilde{f}(x)$ 分别表示它们的反函数, 那么, 由

$$\varphi(x) = o(f(x))$$

不能得到

$$\tilde{f}(x) = o(\tilde{\varphi}(x)).$$

这可从下例看出:

$$f(x) = e^x, \quad \varphi(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \to \infty.$$

注 2 $\varphi = O(f)$ 是一个不等式, 而 $\varphi = o(g)$ 所表示的则是一个极限. 一般地, 由

$$f = O(g) \quad 与 \quad f = O(h)$$

不能得到任何关于 g 和 h 的关系的信息. 例如, 我们有

$$\sin x = O(1), \quad \sin x = O(2), \quad \sin x = O(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

但是从上面的 "等式" 难以断定 1, 2 及 x 的关系.

上面的基本法则虽然简单, 却使我们能够容易地处理大量的阶的估计问题. 例如,

当 $x \to \infty$ 时,

$$5x + \sin x \sim 5x; \quad 3e^x + x^4 \sim 3e^x; \quad 8e^x + x^3 \log x = O(e^x);$$
$$2 + \sin\frac{1}{x} = O(1); \quad x^n \log(\log\log x)^2 = o(x^{n+1});$$

当 $x \to 0+$ 时,

$$x^2 + x^3 = o(x); \quad x\log x + x^2(\log\log(1+x^2))^3 = o(\sqrt{x}); \quad e^x \log\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right);$$
$$x\cos x + \sin x = O(x); \quad \frac{1}{|\log x|^3 + 5} = o\left(\frac{1}{\log\log\frac{1}{x}}\right).$$

例 1　设 $f(x)\to\infty,\ x\to x_0,\ P(x)$ 与 $Q(x)$ 是多项式:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

则当 $x\to x_0$ 时, 有

$$(1)\ P(f(x))+Q(f(x))\begin{cases}\sim a_n(f(x))^n, & n>m,\\ \sim(a_n+b_n)(f(x))^n, & n=m, a_n+b_n\neq 0,\\ \sim b_m(f(x))^m, & n<m;\end{cases}$$

(2) $P(f(x))Q(f(x))\sim a_nb_m(f(x))^{n+m}$;

(3) $\dfrac{P(f(x))}{Q(f(x))}\sim\dfrac{a_n}{b_m}(f(x))^{n-m}$.

解　此处给出结论 (3) 的证明. 结论 (1) 与结论 (2) 的证明与之类似.

由定理条件, 当 $x\to x_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{P(f)}{Q(f)}&=\frac{a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0}{b_mf^m+b_{m-1}f^{m-1}+\cdots+b_1f+b_0}=\frac{a_nf^n(1+o(1))}{b_mf^m(1+o(1))}\\&=\frac{a_n}{b_m}f^{n-m}(1+o(1)).\end{aligned}$$ □

例 2　设 $a_n=O(b_n), n\geq 1$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$, 则存在常数 C, 使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=C+O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$

解　显然, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 因此存在常数 C 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=C$, 于是

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=C+O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$ □

注　在例 2 中, 如果使用估计 $\sum_{k=1}^{n}a_k=O\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$, 那么, 只能得到估计 $\sum_{k=1}^{n}a_k=O(1)$, 由此可见, 稍微细致的估计技巧常能产生更为精确的结果.

1.3 几个基本定理及其应用

定理 1 在 x_0 的某个邻域内, 若 $f^{(n)}(x)$ 存在, 且 $|f^{(n)}(x)| \le M$, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O(|x-x_0|^n)$$

在 x_0 的该邻域内成立.

这是 Taylor 公式的推论.

由定理 1 立即可以得到下面的推论.

推论 1 下面的估计式成立:

(1) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5),\ x\to 0;$

(2) $\cos x = x-\frac{x^2}{2}+O(x^4),\ x\to 0;$

(3) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+O(x^3),\ x\to 0;$

(4) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+O(x^2),\ x\to 0;$

(5) $e^x = 1+x+O(x)^2,\ x\to 0.$

更一般地, 有下面的推论.

推论 2 若 $f(x)$ 满足条件 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, 则有下面的估计式:

(1) $\sin f(x) = f(x)-\frac{f^3(x)}{3!}+O(|f^5(x)|),\ x\to x_0;$

(2) $\cos f(x) = 1-\frac{f^2(x)}{2}+O(f^4(x)),\ x\to x_0;$

(3) $\log(1+f(x)) = f(x)-\frac{f^2(x)}{2}+O(|f^3(x)|),\ x\to x_0;$

(4) $(1+f(x))^a = 1+af(x)+O(f^2(x)),\ x\to x_0;$

(5) $e^{f(x)} = 1+f(x)+O(f^2(x)),\ x\to x_0.$

例如,

$$\log(1+\sin x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+O(|\sin x|^3),\quad x\to 0.$$

上面所列举的几个常用的公式, 当然不是仅在 $x=0$ 的邻域内才

能使用. 例如, 有

$$e^x = 1 + x + O(x^2), \quad |x| < 1,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4), \quad |x| < \infty.$$

下面, 我们给出定理 1 及其推论的几个简单应用.

例 1　证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\log n} = 1. \tag{1}$$

解　因为

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log n}{n}\right) = 1 + \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

所以

$$n(\sqrt[n]{n}-1) = \log n + O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

$$\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\log n} = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

由此推出

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\log n} = 1.$$ □

例 2　设 $a = O(1)$, $b = O(1)$, 则

$$(n+a)^{n+b} = n^{n+b}e^a\left(1 + \frac{a\left(b-\frac{a}{2}\right)}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{2}$$

解　记 $a_n = (n+a)^{n+b}$, 则

$$\begin{aligned}\log a_n &= (n+b)\log(n+a) = (n+b)\left(\log n + \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + (n+b)\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{a^3}{n^3}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + a + a\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$