线性代数学习指导与习题解析

■ 邱森　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

线性代数学习指导与习题解析

■ 邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题解析/邱森编著. —武汉：武汉大学出版社，2014.10

ISBN 978-7-307-12914-6

Ⅰ.线… Ⅱ.邱… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 050177 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:鄢春梅　　版式设计:韩闻锦

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北民政印刷厂
开本：720×1000 1/16　印张:23.25　字数:485 千字　插页:1
版次:2014 年 10 月第 1 版　2014 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-12914-6　定价:42.00 元

前　言

线性代数是经济管理类专业的重要数学基础课程之一，本书是为该课程编写的同步学习指导书，具有本类专业应具有的特色，其内容包括行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换等六章。每章包括五个部分：

一、主要内容：其知识网络与配套教材《线性代数（经济管理类）》（第二版）（武汉大学出版社出版）一致，提纲挈领，一目了然。本书除了特别说明外，都在实数范围内进行讨论。

二、典型例题解析：各章例题都经过精选，具有典型性、代表性，题量不大，但基本上覆盖了本课程的基本内容、基本解题方法和技巧。部分例题解题前增设了“分析”，以揭示思路，启迪思维，归纳总结解题的思想和方法。

三、教材习题全解：教材习题分“习题”和“复习题”两类，复习题又分A组和B组。每题都有详细的解答。教材题型多，题量大，可选做或选读，其中复习题B组供学有余力的学生选做。

四、经济模型分析：配套教材各章设有一节“应用”和一节“章课题”，建立了一些经济模型，“章课题”中还提了一些问题，供学生自主探究。本书在本部分将所有这些经济模型详加诠释，并新增了一些经济学中的应用例子。这些现代的经济模型都是线性的，虽然比较简单，但是许多更复杂的经济模型也可以用其原理加以建立和分析，它们提供了当今经济学的一些基本分析方法，其中还蕴涵一些原创性的经济学思想。虽然本书对“章课题”中的问题做了详细解答，但是我们还是希望读者先尽量不看答案，尝试独立完成，体验数学建模的过程，积累运用数学解决实际问题的经验。

五、本章小结：从不同的角度回顾与反思知识产生、发展和应用的过程。例如：为什么矩阵及其运算如此有用，矩阵的合同、相似和等价之间有什么联系，矩阵的特征值与特征向量在实际问题中有什么应用，等等。通过小结，挖掘知识内涵，揭示知识本质，对线性代数有新的理解，回味隽永。

在本书编写和出版过程中，我们得到了武汉大学出版社的支持和协助，在此深表谢意。最后，对书中的不妥之处，也企盼同行、读者批评指正。

编　者

2014 年 9 月

目　录

第一章　行　列　式

一、主 要 内 容

1. 2 阶行列式与 3 阶行列式

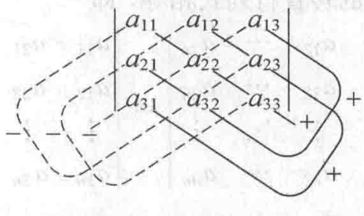
■ 2 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

■ 3 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

■ 3 阶行列式的对角线规则



2. n 阶行列式

■ n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j},$$

其中 M_{1j} 是一个 $n-1$ 阶行列式，它是从原来的 n 阶行列式中去掉第 1 行与第 j 列后，余下的元素按原来的次序排列而得到的. 这样，计算一个 n 阶行列式，归结为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式，依次类推，最后归结为 2 阶行列式的计算. 当行列式只有 1 行 1 列(即只有 1 个元素）时，规定行列式的值就是此元素的数值.

■ 余子式与代数余子式的定义

在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的各元素，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成的一个 $n-1$ 阶行列式称为**元素 a_{ij} 的余子式**，记为 M_{ij}. 在 M_{ij} 前面附以符号 $(-1)^{i+j}$，得到 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为**元素 a_{ij} 的代数余子式.**

■ 行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

3. 行列式的性质

■ 行列式最基本的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 交换行列式两行(列)，行列式改变符号(用 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$）表示交换第 i 行(列）与第 j 行(列）的位置).

性质 3 行列式中某一行(列）元素的公因子可以提到行列式的记号外面来(用 $r_i \div k$（或 $c_i \div k$）表示第 i 行(列）提取公因子 k).

性质 4 把行列式某一行(列）的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变(用 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$）表示将第 j 行(列）的 k 倍加到第 i 行(列)).

■ 行列式的其他性质

性质 5 行列式有两行(列)元素完全相同，则行列式的值为零.

性质 6 如果行列式中有一行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

性质 7 行列式两行(列)成比例，则行列式等于零.

性质 8 如果一个行列式的某一行(列)是两组数的和，那么这个行列式等于两个行列式的和，而这两个行列式的这一行(列)分别是这两组数中的一组数，这一行(列)之外的元素全与原来行列式的相应元素一样.

■ 行列式的三角化

主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**，主对角线下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**，上三角形行列式和下三角形行列式统称为**三角形行列式**.

反复利用行列式的性质，把给定的行列式化为三角形行列式，此时行列式的值等于该三角形行列式主对角线上的元素的积.

4. 行列式按行(列)展开

■ 重要定理

定理 1.1(行列式按行(列)展开定理) n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)所有元素与它们的代数余子式对应乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或 $D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (k = 1,2,\cdots,n)$.

定理 1.2 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中某一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式对应乘积之和等于零，即

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad (k \neq i)$$

或 $a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = 0 \ (l \neq j)$.

■ 主要公式

1) 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

2） 特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 克拉默(Cramer)法则

■ 克拉默法则

定理 1.3 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad ①$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组 ① 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

■ 克拉默法则的推论

定理 1.4 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases} \tag{②}$$

如果它的系数行列式 $D\neq 0$，那么它只有零解. 换言之，如果齐次线性方程组 ② 有非零解，那么必有 $D=0$.

二、典型例题解析

例 1 用定义计算行列式：

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$； 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 1) 原式 $=(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \\ n & & & \end{vmatrix}$

$$=(-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \\ n & & & \end{vmatrix}=\cdots$$

$$= (-1)^{n-2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} n!.$$

2） 原式 $= (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

例 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

解法 1（将行列式化为上三角形行列式）

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

解法 2（原式第 1 行已有 1 个 0，用行列式性质 6 把 a_{13} 和 a_{14} 消为 0）

$$\text{原式} \xlongequal[c_4 + c_1]{c_3 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -7 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按定义}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -5 & -7 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按定义}} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 6.$$

例 3 计算 $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

分析 此类行列式称为**箭形行列式**. 我们可以先计算 $n=3$ 等低阶行列式，来发现规律. 容易看到，只要用 $c_1-\dfrac{1}{a_1}c_2, c_1-\dfrac{1}{a_2}c_3, \cdots$，行列式可以化为三角形行列式.

解 原式$\xlongequal[c_1-\frac{1}{a_n}c_{n+1}]{\substack{c_1-\frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1-\frac{1}{a_2}c_3 \\ \vdots}}\begin{vmatrix} a_0-\dfrac{1}{a_1}-\cdots-\dfrac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$=\prod_{i=1}^{n} a_i\left(a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right).$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 此类行列式称为**行(列)和相等行列式**，计算时将其各列(或行)加到第 1 列(或行)或第 n 列(或行)，然后再化简.

解 原式$\xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ \vdots}}\begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_n-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\\vdots}}(n-1)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\1&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\therefore&\vdots&\vdots\\1&-1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按定义}}(-1)^{[(1+n)+1]+[(1+n-1)+1]+\cdots+[(1+2)+1]}(n-1)$$

$$=(-1)^{(n+2)+(n+1)+\cdots+4}(n-1)=(-1)^{\frac{(n+6)(n-1)}{2}}(n-1)$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}(n-1).$$

例 5 计算 $\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

解 行列式第 3 行已有一个零，保留 $a_{33}=1\neq 0$，用列消法变换使 a_{31} 与 a_{34} 化为零，即

$$\text{原式}\xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-1&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1\\-1&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}5&-4&1\\-1&2&-1\\-5&0&0\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}-4&1\\2&-1\end{vmatrix}=-10.$$

例 6 计算 10 阶行列式 $\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\-1&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$.

解 按第 1 列展开，有

$$\text{原式}=x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}x&-1&&\\&x&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&x\end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{10+1}\begin{vmatrix}-1&&&\\x&-1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&x&-1\end{vmatrix}$$

$$= x^{10} + (-1)(-1)^{10+1}(-1)^9 = x^{10} - 1.$$

例 7 证明下列等式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

分析 形如 $\left|\diagdown\diagdown\diagdown\right|$ 的行列式称为**三对角行列式**，将 n 阶行列式 D_n 按第 1 列展开，可得递推关系式，然后用数学归纳法证明.

证 $D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2D_{n-1} - D_{n-2}$ （将第 2 项的行列式按第 1 行展开，即得 D_{n-2}）.

用数学归纳法. 对于 $n=1$，$D_1 = 2$，结论成立. 设结论对于 $n \leqslant k$ 成立，则对于 $n = k+1$，由归纳法假设知，

$$D_{k+1} = 2D_k - D_{k-1} = 2(k+1) - k = (k+1)+1,$$

得证.

例 8 当 a,b 取什么值时，下面的方程组有唯一解？

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 5. \end{cases}$$

解 由克拉默法则知，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，此方程组有唯一解.

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2a & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= -a(2b-3).$$

因此，当 $a \neq 0$ 且 $b \neq \dfrac{3}{2}$ 时，此方程组有唯一解.

例 9 当 a,b 取什么值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + \ \ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \ bx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1）只有零解？2）有非零解？

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -b\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1).$$

由定理 1.4 知：

1） 当 $D \neq 0$，即 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时，方程组只有零解；

2） 当 $D = 0$，即 $a = 1$ 或 $b = 0$ 时，方程组可能有非零解. 不难验证，当 $a = 1$ 或 $b = 0$ 时，方程组确有非零解（注意：也可以用第二章定理 2.9 来解，当 $D = 0$ 时方程组的系数矩阵的秩 $<$ 未知量的个数 3，故必有非零解）.

例 10 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = a_1, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 + \cdots + a_2^{n-1}x_n = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = a_n, \end{cases}$$

其中 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j;\ i,j = 1,2,\cdots,n)$.

解 方程组的系数行列式 D 为 n 阶范德蒙德行列式的转置，由 $a_i \neq a_j$ 可知

$$D = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0,$$

故由克拉默法则知，方程组有唯一解. 又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ a_2 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = D,$$

$$D_k=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-2} & a_1 & a_1^k & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-2} & a_2 & a_2^k & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-2} & a_n & a_n^k & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=0\quad(k=3,4,\cdots,n),$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=0,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=0,\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}=0.$$

三、教材习题全解

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$； 2) $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ b & 0 & c\\ 0 & d & 0\end{vmatrix}$； 3) $\begin{vmatrix}0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0\end{vmatrix}$； 4) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$.

解 1) 原式 $=1\times3\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times3\times3-2\times2\times2-1\times1\times1$

$=6+6+6-27-8-1=-18.$

2) 原式 $=-a\begin{vmatrix}b & c\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0.$

3) 原式 $=-xyz+xyz=0.$

4) 原式 $=abc+abc+abc-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3.$

2. 验证下列等式成立：

1) $\begin{vmatrix}a+a_1 & b\\ c+c_1 & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & b\\ c_1 & d\end{vmatrix}$；

2) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$；

4) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$；