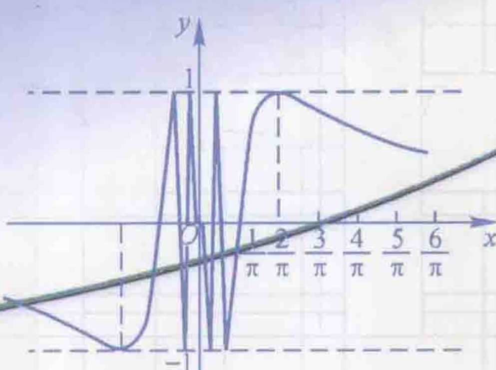
面向“十二五”高职高专规划新教材

公共基础课系列

高等数学

（工科类）

高职高专规划新教材编审委员会组编



吉林大学出版社

面向“十二五”高职高专规划新教材

公共基础课系列

大学语文
社交礼仪
法学概论
大学生就业
经济数学基础
概率论与数理统计
大学生体育与健康
· 高等数学（工科类）
大学生心理健康教育
大学生职业发展与就业指导
线性代数
文学欣赏
口才与演讲
应用文写作
新编实用物理
大学生军事教程
大学生音乐欣赏
计算机应用基础
计算机应用基础上机指导

策　　划：华职教育
责任编辑：王世林
执行编辑：郭新芳

ISBN 978-7-5601-5743-6

9 787560 157436 >

定价：33.00元

面向“十二五”高职高专规划新教材

公共基础课系列

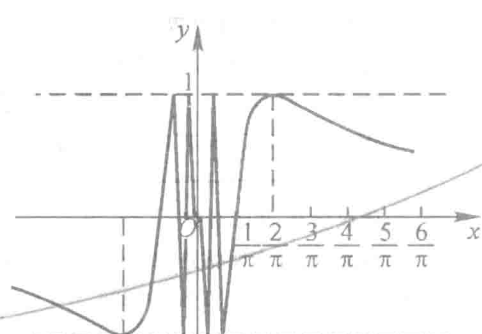
高等数学

（工科类）

高职高专规划新教材编审委员会组编

武术胜　刘贞民　主　编

李玉玲　张　强　覃平阳　梁永平　副主编



吉林大学出版社

【内容简介】 本书是为适应和满足高职高专教育快速发展的需要，根据高职高专教育人才培养目标及要求，遵循教育部制定的高职高专数学课程的基本要求，针对高职高专学生的实际情况，结合教学实践而编写. 按照“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，全书共分10章，分别为极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数和拉普拉斯变换. 书中每节都有习题，每章都有复习题，书后还附有参考答案.

本书可作为高职高专院校工科类专业公共基础课教材，也可作为广大青年朋友学习的参考用书.

图书在版编目(CIP)

高等数学:工科类 / 高职高专规划新教材编审委员会组编.

—长春 : 吉林大学出版社, 2010.6

面向“十二五”高职高专规划新教材

ISBN 978-7-5601-5743-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①高等数学－高等学校:技术学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 082654 号

书名:高等数学(工科类)

作者:高职高专规划新教材编审委员会组编

责任编辑、责任校对:王世林　　封面设计:华职教育

吉林大学出版社出版、发行　　北京楠萍印刷有限公司　印刷

开本:　787×1092　毫米　1/16　　2010 年 06 月 第 1 版

印张:　16.75　　字数:356 千字　　2010 年 06 月 第 1 次印刷

ISBN 978-7-5601-5743-6　　定价:33.00 元

社址:长春市明德路 421 号　　邮编:130021

发行部电话:0431-88499826

网址:http://www.jlup.com.cn

E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

Preface

前言

高职高专教育是高等教育不可或缺的一个重要组成部分.目前,我国高职高专教育已进入到"以加强内涵建设、全面提高人才培养质量为主"的新阶段.高职高专教育的目标是培养社会一线需要的人才,即技术应用型人才,以此来适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求."以服务为宗旨,以就业为导向,走产学研结合的发展道路"成为高职高专教育发展的理论导航.

为了适应和满足高职高专教育快速发展的需要,我们组织了高职高专规划新教材编审委员会经过长期调研,根据高职高专教育人才培养目标及要求,遵循高职高专教育教学特点,针对高职高专学生的实际情况,结合教学实践,编写了本套"面向'十二五'高职高专公共基础课规划新教材".

高等数学是高职高专院校工科类专业必修的基础课.作为一门科学,高等数学有其固有的特点,这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性.抽象性是数学最基本、最显著的特点,有了高度抽象和统一,我们才能深入地揭示其本质规律,才能使之得到更广泛的应用.严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中,无论是概念和表述,还是判断和推理,都要运用逻辑的规则,遵循思维的规律.所以说,数学也是一种思想方法,学习数学的过程就是思维训练的过程.人类社会的进步,与数学这门科学的广泛应用是分不开的.尤其是到了现代,电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域更加拓宽,现代数学正成为科技发展的强大动力.

本书是根据教育部制定的高职高专数学课程的基本要求而编写的.在编写的过程中力求体现以下几个特点:

(1)从高职高专教育的实际出发,结合数学教学改革的实际经验,按照"以应用为目的,以必须够用为度"的原则,以"理解基本概念,掌握运算方法及应用"为依据,删去了不必要的逻辑推导,强化了基本概念的教学.

(2)对数学概念的叙述更加通俗、易懂,淡化了深奥的数学理论,强化了几何直观.

(3)充分考虑高职高专学生的数学基础,较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接.适度淡化逻辑论证,充分利用几何说明,帮助学生理解有关概念和理论.

Preface

(4)根据工科类专业的教学需要,优选了一些应用实例.

(5)为了方便教与学,每节配有习题,每章配有复习题,书后附有参考答案.

在本书的编写过程中,我们参阅了大量的书籍,并引用了其中的一些资料,在此向作者深表感谢.

由于作者水平有限,编写时间仓促,书中难免存在不妥之处,敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见,以便修订时改进.

编　者

2010 年 3 月

Contents

目录

第一章 极限与连续

第二章 导数与微分

第三章 中值定理与导数的应用

Contents

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　多元函数微积分

第七章　无穷级数

Contents

第一章

极限与连续

在解决一些实际问题时，需要研究变量的变化趋势. 例如，当自变量无限接近于某个常数时，函数无限接近于什么？这就需要极限理论. 极限理论是微积分学的基本推理工具，微积分学中的很多概念和定理都是用极限方法推导出来的. 本章将主要介绍极限与连续的基本概念，以及它们的一些性质，为进一步学好微积分打下基础.

第一节　函数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是由数组成的集合. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值和它对应,那么将对应法则 f 称为在 D 上 x 到 y 的一个函数,记作 $y=f(x)$,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域.

当 x 取 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的一切数时,对应的函数值集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

在函数的定义中,如果对于每一个 $x\in D$,都有唯一的 y 与它对应,那么这种函数称为单值函数,否则称为多值函数. 例如由方程 $x^2+y^2=9$ 所确定的以 x 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{9-x^2}$ 是一个多值函数,而它的每一个"分支" $y=\sqrt{9-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{9-x^2}$ 都是单值函数. 以后如果没有特别说明,所说的函数都是指单值函数.

2. 函数的表示法

(1) 表格法

将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法. 如三角函数表、常用对数表以及经济分析中的各种统计报表等.

(2) 图像法

用图像表示两个变量函数关系的方法. 如图 1-1 所示.

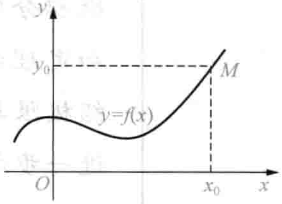


图 1-1

(3) 解析法

用一个等式表示两个变量的函数关系的方法. 例如 $y=x+3$,$y=\lg(x+2)$ 等.

3. 函数的定义域

在实际问题中,函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义,而仅就抽象的解析式来研究函数时,这时定义域就取使解析式有意义的自变量的全体. 要使解析式有意义,我们通常考虑以下几点:

(1)分式的分母不能为零;

(2)偶次根式的被开方数必须为非负数;

(3)对数式中的真数必须大于零;

(4)幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域;

(5)若函数表达式是由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集；

(6)分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

【例1】 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0\\ 3, & 0\leqslant x<1\\ \ln(2x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$

求 $f(-3)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(1+h)$.

【解】 $f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$，

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3,$$

$$f(1+h)=\begin{cases}\sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0\\ 3, & 0\leqslant 1+h<1\\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1\\ 3, & -1\leqslant h<0.\\ \ln(1+2h), & h\geqslant 0\end{cases}$$

【例2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$； (2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

【解】 (1) 若使函数有意义，则 $x^2+2x+1\neq 0$，即 $(x+1)^2\neq 0$. 即 $x\neq -1$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2) 若使函数有意义，则 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x^2-1>0\end{cases}$. 即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$，解得 $1<x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x<-1$. 所以函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

二、函数的几种特性

1. 奇偶性

定义2 设函数的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数. 否则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，如图 1-2 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-3 所示.

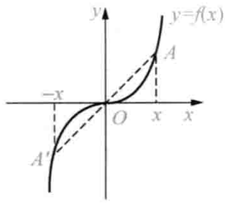


图 1-2

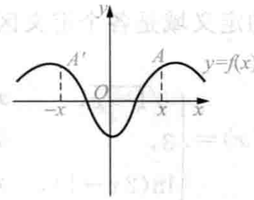


图 1-3

注意

在判断函数的奇偶性时,一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称.

【例 3】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2$;　　(2) $f(x)=2\sin 2x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

【解】 (1) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=2\sin(-2x)=-2\sin 2x=-f(x)$,所以 $f(x)=2\sin 2x$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(x)$的定义域是 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,定义域不关于原点对称,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$是非奇非偶函数.

(4) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$都有 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$,所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$是偶函数.

2. 单调性

定义 3 若对于区间 D 内任意的两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么 $f(x)$在区间 D 上单调增加,区间 D 称为单调增区间;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么 $f(x)$在区间 D 上单调减少,区间 D 称为单调减区间.

单调增函数图像沿 x 轴正向上升,如图 1-4 所示;单调减函数图像沿 x 轴正向下降,如图 1-5 所示.

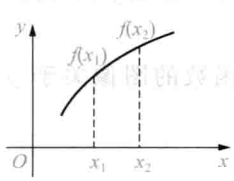


图 1-4

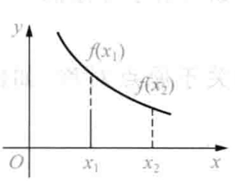


图 1-5

【例 4】 证明 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

【证明】 设 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)={x_1}^2-{x_2}^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

因为 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2>0$，$x_1-x_2<0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

3. 有界性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个上界，如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个下界，如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有界，如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使$|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$在 X 上无界.

【例 5】 就函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内来说，数 1 是它的一个上界，数-1 是它的一个下界(当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于-1 的任何数也是它的下界). 又

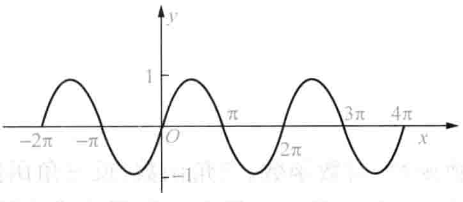
$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使$|f(x)|\leqslant M$ 成立).

4. 周期性

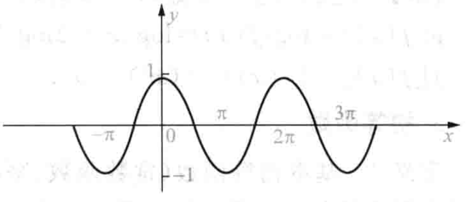
定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 对于任意的 $x\in D$，存在不为零的数 T，使 $f(x+T)=f(x)$，那么 $f(x)$为 D 上的周期函数. T 称为函数的一个周期，并且 nT(n 为非零整数)也是它的周期. 平时，我们把函数的最小正周期称为函数的周期.

【例 6】 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像分别如图 1-6，图 1-7 所示.



函数 $y=\sin x$ 的图像

图 1-6



函数 $y=\cos x$ 的图像

图 1-7

三、初等函数

1. 基本初等函数

我们把常数函数 $y=c$(c 为常数)、幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)、指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数)、对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数)、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

定义 6　若函数 $y=f(u),u=g(x)$,且 $u=g(x)$的值域或部分值域包含在 $f(u)$的定义域中,则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系,这个对应关系称为 y 是 x 的复合函数,u 是中间变量,x 是自变量,通常将

$$y=f(u),\quad u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)]$$

例如,$y=\sin^2 x$,就是由 $y=u^2,u=\sin x$ 复合而成的,这个复合函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

同样地,$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ 复合而成的,这个复合函数的定义域为$[-1,1]$,它只是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分.

注意

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

【例 7】 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\cos^2 x$;　(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

【解】 (1) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2,u=\cos x$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$是由 $y=\sqrt{u},u=x^2+2x$ 复合而成的.

【例 8】 设 $f(x)=x^2,g(x)=\log_2 x$,求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x$;

$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|$;

$f[f(x)]=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4$.

3. 初等函数

定义 7　基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次的加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算,以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,叫做初等函数.