世纪云图 理工社®

2016［张宇考研数学系列丛书］

18 LECTURES ON ADVANCED MATHEMATICS

Mr. Zhang

张宇高等数学18讲

张宇 ◎ 主编

http://www.yuntubook.c
世纪云图
刮涂层 查真伪

赠 高等数学基础知识点讲解视频
视频上线日期：2015年3月15日
注册网站会员可下载本书视频
（使用方法见封三）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图 理工社®

18 LECTURES ON ADVANCED MATHEMATICS

Mr. Zhang

张宇高等数学18讲

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

张宇高等数学 18 讲 / 张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.1
ISBN 978－7－5682－0084－4

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 309758 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 22
字　　数 / 560 千字
版　　次 / 2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 39.80 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

·总序·

PREFACE

摆在读者面前的这套“张宇考研数学系列丛书”(详细目录与使用说明请见总序后的列表)是经过时间检验的,她们再一次在2015年考研中被证明是正确的备考指导教材——不论是复习思路,还是题目类型,甚至有原题被考中——我和我的作者团队感到欣慰.

2016年考研已经开始.以往来说,考研应该是大三学生的话题;如今而言,现在的考研课堂里,竟坐着很多大二的学生,还有一些大一新生(也许他们还听不懂什么是二重积分).我称这些同学是“未雨绸缪”型的选手,是考上研究生的“苗子”.现在考研竞争之激烈,日趋白热化,年轻的学子们,想考上一个更好的学校,更有前途的专业,为实现自己的人生价值而迈上一个更高的台阶,确实不容易,需要下苦功夫.

一方面,我很体谅甚至心疼他们,这么早就要承担起考研的任务;另一方面,我更支持并且敬佩他们,因为他们清楚地知道前方的道路荆棘丛生、绝不平坦,因为他们清楚地知道自己肩上的责任,因为他们清楚地知道什么叫“十年磨一剑”.

而在这条拼搏之路上,最让人头疼的,往往就是数学.正所谓:对于考研,得考研数学者得天下.考研数学在所有的考研公共科目中,分值最高,难度最大,特别能够区分考生.所以,想要考研成功者,必须啃下考研数学这块“硬骨头”.

思考再三,本想给同学们写几句体己话,却总是写着写着,便落了俗套,正当一筹莫展时,脑子里突然闪现出我曾经写过的一篇随笔,叫《用心听者,学到灵魂》,稍作修改,转在这里.

用心听者　学到灵魂

——致2016年考研的同学们

0.1　关于爱的函数

首先我们来制造一个有趣的函数并认真研究它.

世界著名的心理学家罗伯特·斯滕伯格(Robert Sternberg)曾经提出了一个令人着迷的关于“爱”的定义:完美之爱=亲密+激情+承诺(consummate love=intimacy+passion+commitment).其中,intimacy是亲密、亲切的感觉,passion是激情,commitment是承诺.他认为,必须同时具备这三种因素才是完美之爱(consummate love),并且他在这个定义后给出了一些特别有趣的结果:只含其中一种或者两种因素的不同组合的爱.

我们根据斯滕伯格的这个理论,写出“爱的函数表达式”:

$$\text{love}=f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment}).$$

这里,intimacy,passion和commitment是三个自变量,love是因变量,f是关于爱的对应法则.多么给力的函数!三种因素兼备的爱,是多么令人憧憬,可是我们更会对以下由自变量的不同组合所得到的不同的爱产生强烈的共鸣:

(1)若只有passion和commitment,则

$$f(\text{passion},\text{commitment})=\text{fatuous love(愚昧的爱)}.$$

想想看,刚认识不久的一对恋人,彼此没有深入的相处,对性格、脾气、生活习惯统统不了解,只是一时冲动(passion),便要私订终身(commitment),这叫什么?这叫闪婚.我们说,大多数情况下,这种承诺是没

有用的，这样的爱是不能长久的.

(2)若只有 commitment，则

$$f(\text{commitment})=\text{empty love}(\text{空洞的爱}).$$

要么是父母之命，媒妁之言；要么是坐在宝马车里哭泣，只有面包的爱情. 如此这般冷冰冰的爱，空有承诺(commitment)，饱受煎熬，何谈幸福？

(3)若只有(passion)，则

$$f(\text{passion})=\text{infatuation}(\text{迷恋}).$$

这个函数所创造的过程是疯狂的，可是却毫无结果. 真的，不要迷恋哥，哥只是个传说.

0.2　关于考研之爱的函数

走在考研路上的各位考生，你们与考研之间是什么样的爱呢？

从考研的角度上，让我们把 intimacy，passion 和 commitment 作新的解释：

① intimacy——对事物本身的亲密感；

② passion——对成功的欲望；

③ commitment——对坚持不懈的承诺.

根据 0.1 的分析，我们可以很顺利地讨论你与考研之爱，写出"爱的函数表达式"：

$$\text{love of kaoyan}=f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment}).$$

多么惊人相似地可以得到如下结果(请你比照自己，对号入座)：

(1)若只有 passion 和 commitment，则

$$f(\text{passion},\text{commitment})=\text{fatuous love of kaoyan}(\text{对考研愚昧的爱}).$$

有一类考研的学生，对考研本身并不了解，看到身边很多人都去考了，看到这个社会考研的氛围很浓，于是不管三七二十一，凭着对成功的憧憬(passion)，便立下壮志(commitment)，大声宣告：我要考研了！此人，有勇无谋，此志，恐难长久. 是你吗？

(2)若只有 commitment，则

$$f(\text{commitment})=\text{empty love of kaoyan}(\text{对考研空洞的爱}).$$

这类考生往往被家庭或者社会所逼迫，成为"被考研"(commitment)一族. 试想，假如我们如此冷漠无奈地对待考研，考研会如何对待我们？是你吗？

(3)若只有 passion，则

$$f(\text{passion})=\text{infatuation}(\text{迷恋}).$$

空想主义者，只有一番豪情壮语，从不付诸行动，我们只能说：不要迷恋考研，考研对你，只是个传说. 是你吗？

0.3　你与考研的完美之爱

你是否发现，在 0.2 中所叙述的种种令人遗憾的爱的函数中，都缺乏了一个共同的因素，那就是"亲密感"(intimacy)，这才是我们要说的关键.

什么是对一个人的亲密感？你了解他，信任他，理解并包容他，和他在一起，无论是苦是甜，都愿共同承担，都始终有一种亲切温暖的感受…这才是

$$f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment})=\text{consummate love}.$$

那么，你对考研呢？我们绝不是强求所有人一开始就对考研有一种亲密无间的感觉，那不可能！可是，你愿意去了解它、信任它、理解并包容它吗？你愿意在今后的道路上，不论是一片坦途，还是荆棘丛生，不论是顺风顺水，还是步履蹒跚，都和考研一起同甘苦共患难吗？

聪明、有上进心的同学们，你应该读懂了这个函数：当你选择了考研，就请你郑重地担起这份责任，在踌躇满志、持之以恒的条件下，用心去做，爱上考研. 我坚信，像呵护爱情一样去经营考研，你就一定能够收

获成功，收获那份只属于你自己的奋斗之幸福！

请你在纸上认真地、郑重地写下这些字：

$$f(\text{intimacy}, \text{passion}, \text{commitment}) = \text{consummate love of kaoyan}.$$

能不能实现你的愿望，取决于你想不想，你有多想.

祝福所有为了梦想而努力拼搏的人，有一句我很欣赏的话送给大家：生活不是等待风暴过去，而是要学会在雨中翩翩起舞.

以上所言，发自肺腑；用耳听者，学到皮肤；用心听者，学到灵魂.

张宇

2015 年 1 月　于北京

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	拟出版时间	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2015 年 3 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了超过 1000 道高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，知识相对混编，难易变化无常，利于考生复习过程中保持实战演练的状态. 原命题组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2015 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题(1987—2015)，给读者提供原汁原味的实考题. 原命题组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2015 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2015 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组长与命题成员参与.

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

· 前言 ·

FOREWORD

打开这本书，你就会看到这个前言. 这个前言，很长，不知道读者愿不愿意读下去.

一、"活生生"地学，学得"活生生"的

你应该知道，我们即将开始讲授的高等数学(后面我更愿意用微积分来称呼这门课程)，承载了一段无与伦比的科学史. 在这段历史中，充满了精彩绝妙的思想、至高无上的荣耀，也留下了泽被后世的成果、令人扼腕的遗憾.

牛顿与莱布尼茨之争

你可能知道，牛顿和莱布尼茨因各自独立的开创性工作而并列成为了"微积分的创立者". 可是，你可能不知道，为了这份荣誉，牛顿会长和他的英国皇家学会不断地打压势单力薄的莱布尼茨，最后让这个不论是在内容阐述还是符号记法上都比牛顿先进的天才，含恨而死. 也许去世时的莱布尼茨已经绝望，他很可能以为微积分创立者的名号根本没有他的份儿了，可是，令人却给了他公道——不仅全世界学习微积分的人都知道他是微积分的独立创造者，就连著名的"牛顿—莱布尼茨公式"，都是以他们两个人的名字命名的. 又也许，莱布尼茨和牛顿如果活着，根本不愿意今天的我们把他们俩的名字放在一起，不过那又怎样？微积分的学习者们都在认真地写着"由 N—L 公式，得"这样的话语，足以让莱布尼茨欣慰并安息；也同样让牛顿明白，即使是功高盖世的绝对权威，也无法阻止历史沉淀后的事实与公正.

黎曼的终生遗憾

你可能知道，德国天才数学家黎曼创造了定积分，于是人们也把定积分称为"黎曼积分". 可是，你可能不知道，就是这个十九世纪无人能出其右的数学分析大师，到死都没有想明白到底一个函数不连续到什么程度依然是可积的. 这个问题至关重要，因为这牵涉到他倾注全力的积分理论的完整性——函数可积的充要判别法. 庆幸的是，这个事情由后人勒贝格解决了(勒贝格在测度论的基础上，完成了黎曼的"遗愿"，全面解决了函数可积的问题，并将黎曼积分收入其"囊中"，这就是勒贝格积分).

真实的洛必达

你可能知道，初学微积分的人，都会在求函数极限时见到一个叫做"洛必达法则"的重要工具. 可是，你可能不知道，法国数学家洛必达其实是一个"高富帅"，在 1694 年 7 月 22 日，他给老师约翰·伯努利写了一封信，在信中直言不讳，请老师把一个重要的研究成果(就是我们今天所称的"洛必达法则")卖给他，请老师开价. 没想到，伯努利竟然欣然接受，主动拿着论文找到学生洛必达，一手交钱一手交货. 从此以后，洛必达将这个法则冠以自己的名字. 因为这个法则，洛必达声名大噪，而这个法则的真正创造者却被大多数人所遗忘. 怪不得在洛必达死后，伯努利公开了这封信，告诉所有人，这个法则是他的. 可是人们不再理他——为什么当初你为了蝇头小利，就卖了那个法则？

数学大师与他们的微积分

你可能知道，今天的教科书都说，微积分的创立者是牛顿和莱布尼茨. 可是，正如牛顿的名言——"我之所以看得远，是因为我站在巨人的肩膀上"(此言并非牛顿谦虚，他说的是实

话)——所说的那样，微积分里的巨人还有很多：伯努利家族、黎曼、费马、柯西、拉格朗日、欧拉、维尔斯特拉斯、阿贝尔、洛必达、勒贝格、贝尔，等等. 这里面的人，也许有你非常熟悉的，也许有你听说过的，当然也有你闻所未闻的. 不管怎样，他们都在人类的科学史上留下了名字，更重要的是，他们给生活在当今世界上的我们，留下了宝贵的财富——不仅是丰富的物质和发达的科技，更是无价的思想.

知识和历史都是活生生的人创造的，学习这门课，就是在学习知识、学习历史，而且是"**活生生**"地学，学得"**活生生**"的.

二、洛必达与泰勒之争

前面那些话是我在讲故事给读者听吗？好像很轻松. 可是下面我要说的话，着实不那么让人舒服. 大部分微积分的初学者，都不会接触到她丰富多彩的历史和思想，而是直入"主题"——定义、公式、定理、例题、习题……，好像这些才是微积分的核心. 就是这种直入主题的"功利性"，把充满求知欲的初学者拒之门外，即使他们努力"挤"了进来，"残酷"的微积分也会把他们弄得遍体鳞伤，让他们得出"珍爱生命，远离微积分"的让人苦笑的结论. 也许我们真的忘了"兴趣是最好的老师"这个真理，越挫越勇的意志品质，是要有兴趣做后盾的，不是吗？

我不想说"是时候该我们做些什么了"，我本来就在努力去做，而且这并不特别，更不伟大，做一件本就该做的事，太平常不过了.

我在各种场合不遗余力地宣传**数学的文化、思想和过程性**对于学习和教授数学的重要性. 下面是我做的一个数学普及讲座的稿子. 我的学生给这个讲座起了个名字，叫做"洛必达与泰勒之争"，我觉得这个名字不错，就借用下吧. 我坚信，你能够从我对这个问题的详细分析中悟出一些道理.

请读者认真跟着我看一道典型的数学题目，这是一道研究生招生考试试题.

例 1 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　).

(A)$k=1,c=4$　　(B)$k=1,c=-4$　　(C)$k=3,c=4$　　(D)$k=3,c=-4$

不管你是否已经忘记了函数极限计算的方法，请先 浏览 一下此题的解答. 该题若用洛必达法则，则求解如下：

由题意，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=1,$$

则，原式 $\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1,$$

于是，$k=3,c=4$，答案选择(C).

细数一下，我们用了三次洛必达法则才得出了答案. 做完这个题，是不是就可以说完成任务了呢？远远不够. 且再看一题：

例 2 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　).

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$　　(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

请读者对比看，这两个题目何其相似！我们能不能从这两个几乎一样的题目中去寻找数学题目背后的"规律"呢？请注意下面的分析思路.

第一件事情. 读者在本科一年级学习高等数学(微积分)时，都知道一个"耳熟能详"的结论："作乘除运算时可用等价无穷小替换，而作加减运算时则不能用等价无穷小替换"，例如：

当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x$,故

$$x\cdot\sin x\sim x\cdot x=x^2\text{,完全正确.}$$

但,

$$x-\sin x\sim x-x=0\text{,却是错误的!}$$

如果你回想起并确认了这个结论,那么,接下来的$\boxed{\text{第二件事情}}$则顺理成章.请读者想想,是"加减法"的极限难算,还是"乘除法"的极限难算?当然是"加减法"!也就是说,不管谁出数学题,"$A\cdot B$"或者"A/B"型的极限计算一般都难不倒你,因为可以用"等价无穷小替换";但是"$A\pm B$"型的极限计算则一般都比较棘手,因为这时候无法直接用"等价无穷小替换"这个强有力的工具了.

于是,$\boxed{\text{第三件事情}}$出现了.看看上面两个极其类似的例题,恰恰反映出一个"不以人的意志为转移的规律",那就是,$\boxed{\text{数学的命题人非常喜欢出“}A\pm B\text{”型这种棘手的极限计算题来为难你.}}$

规律被我们分析出来后,接下来就是要解决这个问题.如何应对呢?真正的好办法是用泰勒公式!别怕,别怕,也许有人看到"泰勒公式"就头疼(我称其为"太累公式",为什么这么称呼?因为大家都觉得这个知识记起来太累,用起来也太累),事实上,泰勒公式很亲切,关键是我们怎样把它学到手,来试试看:

首先,请你帮我记住下面这个式子:

当 $x\to 0$ 时,$\boxed{\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$,注意,只记此式,不记规律,不记其他,则

$$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

注意:$o(x^3)$是一个记号,所以它的前面写加号即可.

于是,当 $x\to 0$ 时,$\boxed{x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3}$,看到了吗,我们把"$A\pm B$"型的极限作了整体替换!接着,将其广义化,得:

$$\boxed{\text{狗}-\sin\text{狗}\sim\frac{1}{6}(\text{狗})^3\ (\text{狗}\to 0)}$$

莫笑,莫笑,这个表达式极其重要,且只有这个公式中四个位置的"狗""长得一模一样"时才能成立.作为出题人,$\boxed{\text{“狗}-\sin\text{狗”中的两个“狗”,必须相等}}$时才好出题,于是便有了如下对例 2的"高级"解法:

由题意,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,则$\boxed{x-\sin ax\text{ 中的 }x\text{ 与 }ax\text{ 必须相等}}$!所以立即得到 $a=1$,于是 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$,$x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$,故 $b=-\frac{1}{6}$,这是选择题,搞定!

再看例 1,你知道该怎么做了么?你能否立即看出 $k=3$ 呢?(详细答案请看后面的相关内容,最好自己先做做看)

以上的分析至少给了我们两个重要启发:

(1)数学题是有规律可循的,且这种规律"不以人的意志为转移",抓住这种规律,你就找到了学习数学的方向;

(2)数学题有"基础性"的解法(比如上面的洛必达法则);也有"技术性"的解法(比如上面的泰勒公式).在把握"基础性"解法的条件下,掌握"技术性"解法,才能够技压群雄,稳操胜券.

进一步地，我以"用洛必达法则求函数的极限"为例，把读者在数学学习过程中对一个知识掌握的程度分成三种境界.

第一种境界，叫**"朦胧地感知"**，感知(feeling)往往是指当你学习到一个概念、公式或者结论时，只是$\boxed{\text{形式上知道或者了解它}}$而已. 比如，你了解到的洛必达法则是——在某种函数极限计算中，有一种方法，形式上是$\boxed{\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$，也就是可以通过$\boxed{\text{分子分母同时求导}}$去解决，仅此而已. 举个例子：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1,$$

这就解决问题了.

第二种境界，叫**"清晰地再现"**，再现(reappearance)的前提是$\boxed{\text{忠实于事实本身}}$，不可以有任何的偏差和走样. 我们至少要达到这种境界，才有可能达到合格的水平. 继续研究洛必达法则，看个例子，如何计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$？如果我们只知道通过分子分母同时求导去解决，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}.$$

右边这个极限是不存在的，所以得出结论$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$不存在. 这显然是错误的，因为事实上，根据"无穷小与有界量的积是无穷小"，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

是存在的.

我们看到，如果使用洛必达法则，算出来是不存在；而事实上人家是存在的，怎么会出现矛盾呢？

关键的问题是，对于上面这个极限，$\boxed{\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}\text{这个公式不能用！}}$因为：如果$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在也不为$\infty$，是不能推出$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}$不存在也不为$\infty$的. 简单一点说就是，对于$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$，"$\boxed{\text{右存在，则左存在；但左存在，并不意味着右一定存在}}$". 这是一个很细致、很隐蔽的问题，稍不注意就可能出错(天才数学家柯西可以帮助我们更好地理解并记住这个问题，有兴趣的话，就好好研读本书中的内容吧).

看懂了这一段话，我们引入一个更为重要的问题，请回看本前言最开始例 1 的解法：

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}\boxed{=1}$，则

$$\text{原式}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots$$

这里"=1"是没有依据的，你看出来了吗？

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}\boxed{=1}$$

于是，我们可以明确指出，虽然答案是对的，但是这个解法是站不住脚的.

第三种境界，叫"**灵活地融通**"，融通（communicating and grasping thoroughly），就是能够将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，形成一种强大的解题能力. 这才是学习数学的高境界.

根据上面的分析，我们看出，洛必达法则并不一定是求解函数极限最好的办法，尤其对于含有未知参数或者抽象函数这样的研究对象（因为你不知道求导之后极限是否会存在）. 事实上，我们在复习完函数极限计算后，应该形成一个好的思路：对于"$A\pm B$"型的函数极限计算，首选的方法是——泰勒公式！

根据前面的分析，当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\sin 3x=3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3),$$

于是，

$$3\sin x-\sin 3x=\left[3x-3\cdot\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3)\right]=4x^3+o(x^3),$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o(x^3)}{cx^k}=1,$$

立即可得 $k=3,c=4$.

对比洛必达法则来看，泰勒公式完胜！

请读者一定要比照自己，"对号入座"，在今后的学习中，时刻想到我们在这里归纳的三种境界，从而检验自己对知识的掌握程度.

三、关于本书

这本著作是在我多年讲授高等数学（微积分）课程和考研数学辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

最初，讲稿编成了上课的讲义，发给学生使用，后来，讲义经过整理，在北京理工大学出版社出版了《考研数学高等数学 18 讲》《考研数学命题人高等数学考试参考书》，又在西安交通大学出版社出版了《高等数学辅导讲义》，这期间，尤勇同志、邝金武同志、苏康同志都提供了宝贵的意见、支持，起到了重要作用，而且这些书这些年都在我讲课的考研数学辅导班上作为上课教材使用，是对我的课程的重要配合和补充.

再后来，我又参与了同济大学《高等数学（第六版）》的《习题解答与考研指导》的编写并任主编，担任高等教育出版社《考研数学大纲解析》高等数学部分的编写人、全书统稿人，以及主审了高等教育出版社的《考研数学历年真题解析》. 这些工作对于本书的形成具有重要意义. 期间，清华大学胡金德教授、浙江大学蔡燧林教授以及何英凯教授给予了我很多帮助，特别表示感谢.

现在，在北京理工大学出版社的大力支持下，我将此书做了全面的修订，供考研究生的读者和有志于提高高等数学学习水平的读者们参考.

本书分为 18 讲，每一讲由"内容精讲"、"例题精解"、"习题精练"三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

"内容精讲"全面准确地阐述了本科教学基本要求和考研数学大纲中高等数学所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

"例题精解"通过精心挑选或者编制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

"习题精练"给读者留下了作业:独立完成这些优秀的试题,既检验自己的学习成果,又培养自己独立做题的能力,且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢?我提四个建议.

(1)坚持不懈,细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲:"一天不练功,只有我知道;三天不练功,同行也知道;一月不练功,观众全知道."复习数学,我们建议读者也一定要这样,捧着这本书,每天都要看内容,每天都要做题目,坚持不懈,细水长流,便可水到渠成.

(2)不求初速,但求加速

一开始读数学书,总会吃力一些,遇到的困难多一些,这很正常,我们不要畏难,应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂,把每一个难点攻克,这样,开始复习的速度就会慢一些.但是,只要能够坚持,复习了一定的内容之后,你便会发现,复习速度不断提高,理解能力和解题能力都会显著增强.这符合数学学习的规律,请读者把握住.

(3)独立思考,定期检验

复习一个知识,先要读基本的概念、定理和公式,然后看例题,再去做习题.只有通过做题,才能知道自己是否真正掌握了这个知识.一定不要翻着答案做题,稍有不会就看答案,这样效果不好.读者先不要看答案,自己独立地去做,调动起自己所有的知识储备,看能不能做出来,做出来了,自然很好,即使做不出,时间也没有白费,其他的知识在你脑子里过了一遍,也是一种复习.只是要注意,如果全力以赴也未做出题目,看完答案后要好好总结经验.在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段,都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)吸取教训,善于总结

人没有不犯错误的,尤其在学习数学的过程中,做错题,不会做题,是再平常不过的了.人们常说:"失败是成功之母",就是这个意思.我们常告诉学生:如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题,可能会有两种态度,一种态度是消极的,题目不会做,心情不好,自暴自弃,复习效率大打折扣;一种态度是积极的,题目做不出,正是找到了自己复习的薄弱环节,找到了自己的不足之处,正是遇到了自己提高、进步的机会,我们当然支持后面一种态度,这才是正确的态度.所以,希望在考研复习的过程中,读者准备一个笔记本,通过不会做或者做错的题目,认真分析自己到底问题出在哪里,哪些知识还复习不到位,吸取教训,多做总结,这样的笔记日积月累,对提高你的数学水平,是有极大帮助的.

我无意用"水平有限"来作为遁词,诚心接受读者和同行专家的批评指正.

张宇

2015 年 1 月　于北京

目录

CONTENTS