“十二五”全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

YINGYONG SHUXUE XIANXING DAISHU

应用数学——线性代数

◎主编 李秀玲 刘丽梅 张奎

中国商业出版社

“十二五”全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

应用数学
——线性代数

主　编　李秀玲　刘丽梅　张　奎
副主编　王　宇

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学——线性代数/李秀玲，刘丽梅，张奎主编.
—北京：中国商业出版社，2014.2
ISBN 978-7-5044-8250-1

Ⅰ.①应… Ⅱ.①李…②刘…③张… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①F224.0②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 223885 号

责任编辑：蔡 凯

中国商业出版社出版发行
010-63180647 www.c-cbook.com
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京市书林印刷有限公司印刷

* * * * *

787×1092 毫米 1/16 11 印张 260 千字
2014 年 2 月第 1 版 2014 年 2 月第 1 次印刷

定价：28.80 元

* * * *

前　言

《线性代数》是高等院校经济与管理专业的必修基础课。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们在多年的线性代数教学实践的基础上，经过统一策划、集体研究编写了本教材。本教材力求实现基础性与应用性相结合、科学性与通俗性相结合，着力体现加强基础、重视应用、培养创新能力的教学理念。本教材在保留线性代数基本内容的基础上，以矩阵为主线，突出矩阵方法，用矩阵的初等变换来研究线性方程组和二次型。各章配有两组习题及习题参考答案，A组习题为基本题型，B组习题有一定难度，以帮助学生通过系统训练培养应用数学知识分析和解决实际问题的能力。

本教材内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型，以及习题、习题参考答案。

本教材分五章:第1章由吉林财经大学应用数学学院李秀玲编写;第2章由中国劳动关系学院张奎编写;第3、4章由吉林财经大学应用数学学院刘丽梅编写;第5章由吉林财经大学应用数学学院王宇编写。全书框架结构安排、统稿、定稿由李秀玲承担。

因编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2014年2月

“十二五”全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

编 委 会

本书编写人员 李秀玲 刘丽梅 张 奎 王 宇

目 录

第1章 行列式

行列式是线性代数中的一个重要概念，是求解线性方程组的一个常用工具，也是经济管理研究中常用的数学工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

考虑含有两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

利用加减消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于记忆公式(1.2)，我们引入二阶行列式的概念：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称为**二阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，其第一个下标 i

称为**行标**，表示这个元素所在的行数；第二个下标 j 称为**列标**，表示这个元素所在的列数. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的**展开式或值**.

为了方便记忆二阶行列式的计算公式(1.3)，我们给出二阶行列式的对角线法则(图 1.1)，图中用实线连接的两个元素的乘积减去用虚线连接的两个元素的乘积即为二阶行列式的值，其中 a_{11} 和 a_{22} 两个元素的连线称为**主对角线**，a_{12} 和 a_{21} 两个元素的连线称为**副对角线**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式可以表示线性方程组(1.1)的解. 将线性方程组(1.1)的系数排成的二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为线性方程组(1.1)的**系数行列式**. 因此，当线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.1)有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_1 = \frac{D_2}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1.1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3)-1\times 1 = -7 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解,又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 7\times(-3)-1\times(-2) = -19,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2)-7\times 1 = -11,$$

于是方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

类似地，对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.4}$$

利用加减消元法得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22},\\&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_2\\&=b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23},\\&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_3\\&=b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21},\end{aligned}$$

因此，当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时，方程组有唯一解为

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},\\x_2&=\frac{b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},\\x_3&=\frac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

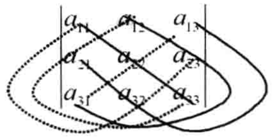
为便于记忆公式(1.5)，我们引进三阶行列式的概念：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1.6}$$

称为**三阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，其第一个下标 i 称为**行标**，表示这个元素所在的行数；第二个下标 j 称为**列标**，表示这个元素所在的列数. 右端项称为三阶行列式的**展开式或值**.

同样，为方便记忆三阶行列式的计算公式(1.6)，我们给出三阶行列式的对角线法则(图1.2)，图中实线连接的三个元素的乘积取正号，虚线连接的三个元素的乘积取负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的值，其中 a_{11}，a_{22}，a_{33} 三个元素的连线称为**主对角线**，a_{13}，a_{22}，

a_{31} 三个元素的连线称为**副对角线**.



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

图 1.2

例如，

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\times2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times1+1\times3\times3-1\times2\times1-(-1)\times3 \\ &\quad \times(-2)-2\times(-5)\times3 \\ &= 28. \end{aligned}$$

同样利用三阶行列式可以表示线性方程组(1.4)的解. 将线性方程组(1.4)的系数排成的三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为线性方程组(1.4)的**系数行列式**. 因此，当线性方程组(1.4)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.4)有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

即 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列换成方程组(1.4)的常数项 b_1, b_2, b_3 后所得到的三阶行列式.

例 1.2 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 26, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 55,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -15,$$

所以方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{55}{5} = 11, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-15}{5} = -3.$$

从以上讨论可以看出，利用二阶、三阶行列式可以很方便地求解二元、三元线性方程组. 但在实际应用中，遇到的方程组的未知量常常多于三个，而且在某些理论研究上也需要讨论 n 元线性方程组的求解问题. 这样，要把二阶、三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念 .

二、排列与逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式上，首先引入排列的概念.

定义 1.1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n **级排列**.

例如，2143 是 4 级排列，43125 是 5 级排列.

显然，n 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$个. 如3 级排列的总数为$3! = 6$个，即

$$123 \qquad 132 \qquad 213 \qquad 231 \qquad 312 \qquad 321.$$

若排列中各数是按照从小到大的自然顺序排列的，通常称为**标准排列**. 上述排列中的 123 是标准排列，而其余排列中都存在较大的数排在较小的数之前的情况，对此我们定义

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果较大的数排在较小的数的前面，称这两个数构成一个**逆序**. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数称为此排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数是偶

数的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

显然，标准排列的逆序数为0，故标准排列是偶排列.

例 1.3 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1)43125;(2)$n(n-1)\cdots21$.

解 (1)$\tau(43125)=3+2+0+0+0=5$，故该排列为奇排列;

(2)$\tau[n(n-1)\cdots21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，该排列为奇排列.

下面给出与排列有关的另一个概念.

定义 1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置，其余各数位置不变，就得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$. 这种变换称为一个**对换**，记为$(i_s,i_t)$.

例如，$43125\xrightarrow{(1,5)}43521\xrightarrow{(2,4)}23541$. 不难看出，进行一次对换对排列的奇偶性是有影响的. 容易计算 $\tau(43521)=8$，$\tau(23541)=5$，说明奇排列43125经过一次对换(1,5)变成偶排列43521，偶排列43521经过一次对换(2,4)变成奇排列23541.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性发生改变.

证明 先讨论一种特殊情形，即对换相邻两个数的情形. 设原排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

这里“…”表示那些不变的数. 经过对换(i,j)得到一个新排列

$$\cdots ji\cdots.$$

我们比较这两个排列的逆序数. 在这两个排列中，“…”部分排列的逆序数不变，且数 i 与 j 和其余的数所构成的逆序显然也没有改变. 如果 i 与 j 在原来的排列中没有构成逆序，即 $i<j$，则在新排列中就构成了一个逆序，即新排列较原排列的逆序数增加1. 如果 i 与 j 在原来的排列中构成逆序，即 $i>j$，则在新排列中就没有构成逆序，即新排列较原排列逆序数减少1. 因此对换相邻两个数，排列的奇偶性一定改变.

再讨论一般情形，即对换的两数之间有 $s(>0)$ 个数的情形. 设原排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots,$$

即 i 与 j 两数之间有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，经过对换(i,j)得到一个新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

显然，这样一个对换可以经过一系列的相邻两数的对换来实现：在原排列中，先把 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻两数的对换，化为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots,$$

再把数 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻两数的对换，就得到新排列，也就是说原排列经过 $2s+1$ 次相邻两数的对换就得到了新排列. 因此一个排列中的任意两个数对换，排列

都改变奇偶性.

定理 1.2 在全部 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 假设在 $n!$ 个 n 级排列中，有 k 个奇排列，t 个偶排列，则 $k+t=n!$. 对于这 k 个奇排列施以同一个对换，由定理1.1，可得到 k 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一个对换后不能得到同一个偶排列，故奇排列的个数不会大于偶排列的个数，即 $k \leqslant t$. 同理可得 $t \leqslant k$，所以有

$$k=t=\frac{n!}{2}.$$

三、n 阶行列式

现在来研究二阶、三阶行列式展开式的结构，并加以推广，从而引进 n 阶行列式的概念.

我们先分析二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

它的展开式具有以下特点：

1. 二阶行列式的展开式有 $2!=2$ 项；
2. 每一项是位于不同行与不同列的两个元素的乘积；
3. 每一项所带的符号是这样确定的：当该项两个元素的行标为标准排列时，如果列标构成偶排列，那么该项带正号；如果列标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，项 $a_{11}a_{22}$ 的两个元素的列标构成偶排列12，所以它带正号. 而项 $a_{12}a_{21}$ 的两个元素的列标构成奇排列21，所以它带负号.

根据这些特点，二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二级排列求和.

我们再来分析三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它的展开式具有以下特点：

1. 三阶行列式的展开式有 $3!=6$ 项；
2. 每一项是位于不同行与不同列的三个元素的乘积；
3. 每一项所带的符号是这样确定的：当该项三个元素的行标为标准排列时，如果列标构

成偶排列，那么该项带正号；如果列标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的三个元素的列标构成偶排列 231，所以它带正号. 而项 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 的三个元素的列标构成奇排列 132，所以它带负号.

根据这些特点，三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

按照上面分析，将二阶、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式上.

定义 1.4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

称为 n **阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，其第一个下标 i 称为**行标**，表示这个元素所在的行数；第二个下标 j 称为**列标**，表示这个元素所在的列数. 右端项称为 n 阶行列式的**展开式或值**，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 由于 n 级排列共有 $n!$ 个，因此，n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和. 在这 $n!$ 项中，每一项为位于不同行与不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.8}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，项(1.8) 带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，项(1.8) 带负号. 在 n 阶行列式中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 这 n 个元素的连线称为**主对角线**，$a_{1n},a_{2\,n-1},\cdots,a_{n1}$ 这 n 个元素的连线称为**副对角线**. n 阶行列式也简记为 $|a_{ij}|$.

例 1.4 在五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中，下列两项(1) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$；(2) $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 各带什么符号?

解 (1) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$ 的行标为标准排列，列标 14523 的逆序数为 4，所以该项带正号；

(2) 将 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 改写为 $a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$，其行标为标准排列，列标 54123 的逆序数为

7，所以该项带负号.

例 1.5 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&a&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&c\\d&0&0&0\end{vmatrix}.$$

解 由定义 1.4 得

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

在和式中只有当 $j_1=2,j_2=3,j_3=4,j_4=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=(-1)^3abcd=-abcd.$$

例 1.6 计算**上三角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 在行列式 D 的展开式中，一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

显然，不为零的项中必有 $j_n=n$，而 j_{n-1} 可取 n 或 $n-1$，但 $j_n\neq j_{n-1}$，因此 $j_{n-1}=n-1$，依此类推，可得 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$，即展开式中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为上三角形行列式的特殊情形，**对角形行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得，**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由上述分析可知，上(下)三角形行列式及对角形行列式都等于主对角线上 n 个元素的乘积.

按照定义1.4，为了确定行列式中每一项的符号，需要把这一项的 n 个元素的行标排成标准排列，再由列标所构成排列的奇偶性来确定符号. 由于数的乘法满足交换律，因而这 n 个元素的次序可以是任意的. 在 n 个元素次序任意的情况下，仍然可以直接确定符号. 一般地，有如下结论

定理1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项可写为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

例如,在例1.4中，可以直接确定项 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 所带的符号为 $(-1)^{\tau(32145)+\tau(14523)}=(-1)^{3+4}=-1$.

按定理1.3来确定行列式中每一项的符号的好处在于，不需要重排因子的顺序就可以确定符号. 同时定理也表明，元素的行标和列标的地位是对称的，因而为了确定每一项的符号，同样可以把每一项的列标排成标准排列，于是 n 阶行列式定义的另一种表示法为

$$D=|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{1.9}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 级排列.

§1.2 行列式的性质

利用行列式的定义计算一般的行列式，计算量是非常大的. 为了简化行列式的计算，本节介绍行列式的性质. 这些性质不仅可以简化行列式的计算，而且在行列式的理论研究及应用上也具有重要意义.

一、行列式的性质

性质1 将行列式的行、列互换，行列式的值不变，即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D^T$.

这里行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**. 显然，D 也是 D^T 的转置行列式，因此，我们称 D 与 D^T **互为转置行列式**.