

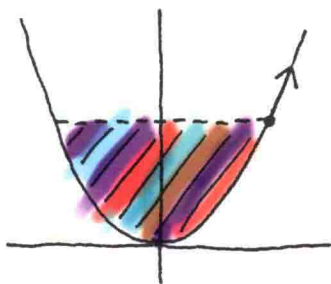
Measurement

度量

一首献给数学的情歌

〔美〕保罗·洛克哈特 著

王凌云 译

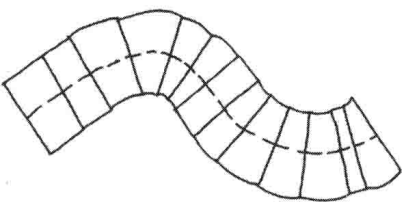
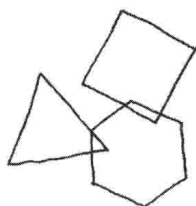
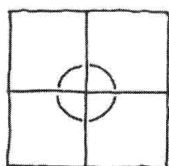
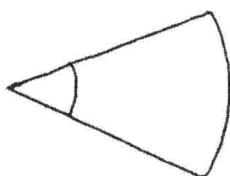
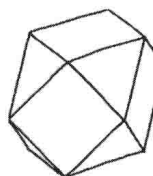


中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵新知

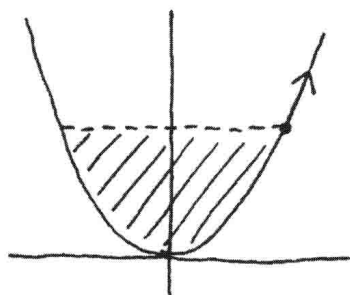


「美」保罗·洛克哈特 著
王凌云 译

首献
★
献给数学的情歌

度量

Measurement



人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

度量：一首献给数学的情歌 / (美) 洛克哈特著；
王凌云译. — 北京：人民邮电出版社，2015.7

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-39318-0

I. ①度… II. ①洛… ②王… III. ①数学—普及读
物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第100175号

内 容 提 要

这是作者一首坦诚的献给数学的情歌。他对数学的热爱在字里行间显露无遗，同时他也不讳言旅途的艰难。本书分为两个部分，分别介绍了对形状和运动的度量。他以平实的语言将几何学和微积分的复杂概念以及两者之间的精妙关联解释得清晰易懂，生动展示了数学家都在做什么，以及他们为什么要这么做。很多读者都评论说，要是当初自己的数学老师这样教的话，想必他们也会爱上数学的。

◆ 著 [美] 保罗·洛克哈特

译 王凌云

责任编辑 楼伟珊

责任印制 杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：880×1230 1/32

印张：11.75

字数：292千字

2015年7月第1版

印数：1-4 000册

2015年7月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2014-4765号

定价：39.00元

读者服务热线：(010)51095186转600 印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京崇工商广字第0021号

版 权 声 明

MEASUREMENT

by Paul Lockhart

Copyright © 2012 by the President and Fellows of Harvard College

Published by arrangement with Harvard University Press

through Bardon-Chinese Media Agency

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Posts & Telecom Press

ALL RIGHTS RESERVED

本书中文简体字版由 Harvard University Press 通过 Bardon-Chinese Media Agency 授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

版权所有，侵权必究。

献给威尔、本和亚罗

目 录

现实与想象 / 1

论数学问题 / 4

第一部分 大小和形状 / 19

我们开始考察抽象的几何图形。——马赛克图案与角度的度量。
——等比例缩放与比例。——长度、面积与体积。——穷竭法及其应用。
——多边形与三角学。——圆锥曲线与射影几何。——机械曲线。

第二部分 时间和空间 / 185

关于数学中的运动的一些思考。——坐标系与维度。——运动作为一种数值关系。——向量表示与相对运动。——速度的度量。——微分学及其诸多应用。——临末给读者的一些鼓励。

致谢 / 368

现实与想象

有很多不同的现实同时存在着，当然其中就包括我们自己生活在其中的物理现实。还有那些与物理现实十分相似的想象世界，比如其他的一切都与物理现实完全一样，只是其中的我五年级的时候不再尿裤子的想象世界；又比如在公交车上有一位头发乌黑的漂亮姑娘向我转过身来，然后我们开始聊天并最终坠入爱河的想象世界。请相信我，有很多这样的想象世界，只是它们既不在这儿，也不在那儿。

我想谈谈一个不同的地方，我将要称呼它为“数学现实”。在我的脑海里，一直有着这样的一个世界，各种漂亮的形状和模式四处飘动，并做着各种令人好奇、使人惊讶的事情，这些事情让我身心愉悦并陶醉其中。那真是一个神奇的地方，我很爱它！

事实是，物理现实是一场灾难。它太复杂了，任何事情都不是表面看上去的那样简单：其中的物体会热胀冷缩，而原子则会飞来飞去。特别是，没有任何东西能够在真正的意义上被度量。我们不知道一株小草真正的高度，在物理现实中，任何度量都必然只能够是粗略的近似。这也并不能够说坏，这只是物理现实的性质。最小的微粒也不是一个点，最细的金属丝也不能说是一条直线。

另一方面，数学现实则是想象的。它可以像我想的那样简单精致，同时我能够拥有那些我在现实生活中不可能拥有的美好事物。虽然我的手里永远不可能握着一个真正的圆，但在我的头脑中却可以装一个这样的圆，而且我可以度量它。数学现实是我自己创造的一个美丽仙境，我可以探索它、思考它，也可以和朋友们讨论它。

2 | 度量：一首献给数学的情歌

由于各种各样的原因，人们纷纷对物理现实产生了浓厚的兴趣。天文学家、生物学家、化学家以及其他学科的科学家们都尝试着去探索它的工作原理，并试图向我们描述它。

在这本书中，我想要描述的是数学现实。找出模式，找出隐藏在其背后的工作原理，这就是包括我在内的数学家们努力去做的事情。

关键是，我同时拥有物理现实和数学现实，它们都很漂亮、有趣（当然也不免有些吓人）。物理现实很重要是因为我就生活在其中，数学现实很重要则是因为它已然是我生命的一部分。在生活中，我同时拥有这两个美好的事物；亲爱的读者，你也和我一样。

在本书中，我们将会设计模式，找到形状和运动的模式，然后我们试着去理解这些模式并对它们进行度量。我确信我们将会看见美好的事物。

但是亲爱的读者，我也不想对你们撒谎，这同时也是一项非常艰苦的工作。数学现实就像是一片无垠的丛林，其中充满了无数迷人的奥秘，但它绝不会轻易吐露其中的秘密。让我们做好奋斗的准备吧，无论是智力方面，还是创造力方面。事实上，我不知道还有哪一项人类活动对想象力、洞察力以及创造力有如此高的要求。不过，无论怎样，我都要做这件事，因为我情不自禁要这样做。一旦你走进这片丛林，你就再也不能够真正地离开，它会让你魂牵梦绕、流连忘返。

因此，我诚挚地邀请你踏上这段神奇的旅程！同时，我也很希望你能够热爱这片丛林，并被它的魅力所征服。在这本书中，我会尝试着去描述我对数学的感觉，并向你展示一些最漂亮、最激动人心的发现。请不要期望书中有任何注解、参考文献或者类似的学术性的内容。本书属于个人化的写作，我希望我能够用平白易懂同时不乏趣味的方式来传达这些深邃而迷人的思想。

同时，我也期望这一过程是平缓的。我不会把你当作孩子而不让你

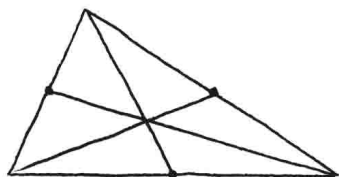
接受真理的洗礼，也不会因为旅途艰难而向你道歉。领会一种新的思想需要花费几个小时甚至几天，这一点也不奇怪，要知道最开始的时候人们为了领会它甚至花了几个世纪！

我将假定你喜欢美好的事物，并且很想学习它们。在阅读的旅程中，你唯一需要的只有常识和天生的好奇心。因此，请保持轻松。艺术是用来欣赏的，而本书就是一本关于艺术的书。数学并不是一场比赛或者竞赛，而是你在与自己的想象力玩耍。愿你有一段美好的阅读时光！

论数学问题

数学问题是什么？对数学家来说，一个问题就是一次探索，就是对数学现实的一次测试，看看它会有怎样的性质。用我们通常的话来说，就是“用树枝捅一下”，然后看看会发生什么。面对某部分未知的数学现实（它可以是形状的构成，也可以是数字的模式，或者随便别的什么），我们想知道它是怎样运作的以及它为什么这样运作。因此，我们“捅”它一下，不过并不是用手或者树枝，而是要用我们的头脑。

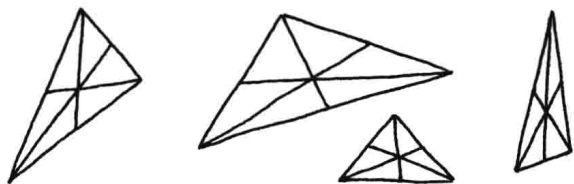
我们来看一个例子，比如说你正拿着三角形在玩，并将它们剪切成新的小三角形，碰巧有了如下图所示的这个发现。



当你一一连接三角形的三个顶点与其对边的中点时，你发现这三条线似乎都相交于一点。于是你又试了很多不同形状的三角形，然而，似乎这三条线还是会相交于一点。现在，你发现了一个秘密。不过让我们认真想一想，这个秘密到底是什么呢？它与你所画的图无关，也与纸上正在发生的事情无关。用铅笔在纸上画出来的三角形是否也会这样相交，是一个关于物理现实的科学问题。比方说，如果你画的时候很粗心，这些直线可能就不会相交于一点。我想你也可以画得特别仔细认真，画完后放在显微镜下，不过即使这样，你也只是对石墨和纸纤维有了更多的了解，而不是对三角形。

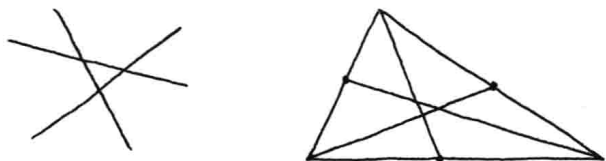
这里，真正的秘密是关于三角形的，不过这个三角形实在太完美了，只能够存在于想象的数学现实中。而这里的问题则是，这三条同样完美的直线是否真的会相交于一点。铅笔和显微镜现在都帮不了你的忙。（在这本书中，我会一直强调数学现实与物理现实之间的区别，有可能会到你厌烦的程度。）那么我们要怎样处理这个问题呢？我们真的能够了解这样的想象出来的对象吗？这样的知识又会是什么样的形式呢？

在考察所有这些问题之前，让我们先暂时庆祝一下我们提出了这个问题，并欣赏一番这里所说的数学现实的性质。



这里，我们遇到的是一个隐藏很深的秘密。很明显，肯定有某种潜在的（目前对我们来说还是未知的）结构间的相互作用使这三条线相交于一点，这使我觉得有些不可思议，同时也有些吓人。三角形会知道哪些我们所不知道的呢？有时，想到所有美丽而深刻的真理就在那儿等着我们去发现、去将它们彼此联系起来，我就会感到不安。

那么，这里这个秘密到底是什么呢？秘密就是事情为什么会这样，三角形为什么愿意做这样一件事情呢？毕竟，如果你随机地扔下三根树枝，通常它们并不会相交于一点，而是会两两相交于三个点，并由此在三角形的中间形成一个小三角形。难道这不正是我们所期望发生的吗？



我们寻求的其实是一个解释。当然，之所以解释没有出现，一个可能的原因是这个认识本来就是错误的。也许我们是被自己一厢情愿的想法或者拙劣的图画欺骗了。在物理现实中有很多事情都是似是而非的，因此，很有可能只是我们没有看见这个由这三条线交叉形成的小三角形而已。也许它太小了，隐藏在污点与铅笔痕之间，所以我们看不见。不过话说回来，也有可能这三条线真的相交于一点，这个论断具有数学家希望在规律身上看到的许多特质：自然、优美、简洁以及某种必然性。因此，它很有可能是真的。但问题是，原因是什么呢？

这正是技术派上用场的地方。为了给出解释，我们必须创造一些东西。也就是说，我们必须构造出论证，即可以解释为什么这种现象会发生的推理过程，从而满足我们的好奇心。这是一个相当艰巨的任务。首先，画出或者构造出一系列的物理三角形，然后观察是否几乎所有的这些三角形都会这样，这对于我们的目的来说并不足够；这并不是解释，而更像是“大概的验证”。而我们遇到的问题则是更严肃的理论问题。

如果不知道这三条直线为什么会相交于同一点，我们又怎么会知道它们确实会相交于同一点呢？与物理现实相反，在数学现实中，我们并不能观察到什么。对于纯粹想象的世界，我们怎么能够知道些什么呢？这里的关键是，什么是真的并不那么重要，重要的是为什么它是真的。只有知道了原因，我们才知道什么是真的。

这里我并没有想要低估我们通常的感觉的作用，丝毫没有这个意思。相反，我们迫切地需要那些有助于我们发挥直觉和想象力的东西，包括图画、模型、电影以及其他任何我们可以获得的东西。只是我们必须要知道：最终所有这些东西都不是真正的对话主题，也不能够告诉我们关于数学现实的真相。

因此，实际上我们现在正处于困境之中。我们发现了一个漂亮的事

实，不过我们必须证明它。这正是数学家一直在做的事情，我希望你也能够喜欢。

这样的事情做起来会特别难吗？是的，的确如此。那么有没有什么好的诀窍或者方法可以遵循呢？遗憾的是，没有。这是抽象的艺术，纯粹而简单；既然是艺术，总是需要人们付出努力的。我们都知道，漂亮、有内涵的绘画或者雕塑作品的创作并不存在什么系统的方法；优美、有意义的数学证明的产生也同样如此，并没有什么规律可循。真是很抱歉。而且数学还可以说是其中最困难的，不过这也正是我热爱它的理由之一。

因此，我并不能告诉你要怎么做，也不会手把手地教你或者在书的后面给出一些提示与解答。如果你想在心里画一幅画，那么画布的背面是不会有“画的答案”的。如果你正在解一道题并陷入苦思冥想之中，那么欢迎你加入我们的俱乐部，数学家也同样不知道要怎样求解他们的问题。如果我们知道了，那么这些问题也就不再是问题了。我们总是在未知的边缘上工作，也总是会被困住，直到有一天我们有了突破。我希望你也能够取得不少的突破，这真是一种难以置信的感觉！不过研究数学并没有什么特殊的捷径，我们所能够做的只是勤于思考，并希望在某个时刻灵感能够降临。

当然，我也不会直接把你拖入这片丛林，然后将你一个人留在那儿。不过，你依然需要充分发挥你自己的智慧和好奇心，因为这些就相当于你进入丛林时所携带的水壶和弯刀。或许，我可以向你提供一些一般性的建议，作为你进入这片丛林后的指南针。

第一个建议是，你自己的问题永远是最好的问题。作为勇敢的智力探索者，思想是你的，探险是你的。数学现实也是你的，它就存在于你的头脑中，你可以在任何你想的时候探索它。那么，你都有哪些问题呢？你又想去哪儿探索呢？我想提出一些问题供你思考，不过这些仅仅是我

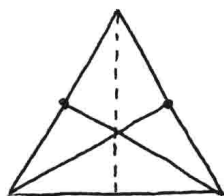
播下的种子，以帮助你培育出自己的数学丛林。不要害怕你回答不了自己的问题，对于数学家来说这是很自然的状态。此外，试着同时思考五到六个问题，紧抱着一个问题苦思冥想而没有丝毫进展，就像是一直在用头撞同一面墙，这是非常令人沮丧的。（如果有五六面可供选择的墙则要好得多！）说实在的，思考一个问题一段时间后休息一会，似乎总是会对我们有所帮助。

还有一个很重要的建议，那就是合作。如果你有一个朋友也愿意研究数学，那么你们可以一起，并相互分享其中的喜悦与挫折，这与共同演奏音乐很像。有时候，我会花六到八个小时与朋友共同研究一个问题，即使我们几乎没有取得任何进展，能够傻傻地待在一起我们还是很高兴。

那就让困难的问题来吧！尽量不要气馁或者太把你的失败放在心上，因为并不只有你在理解数学现实时会遇到困难，我们大家都会这样。同时，也不用担心你没有经验或者觉得你没有“资格”，能够使一个人成为数学家的并不是专门的技术和渊博的知识，而是永不满足的好奇心和对简单美的渴望与追求。做你自己吧，去你想去的地方吧！也不要害怕失败和混乱，要大胆地去尝试，去拥抱数学所有的惊奇和神秘，并快乐地将问题弄得一塌糊涂。是的，你的想法可能并不会起什么作用，你的直觉也可能是错误的。不过这都没有关系，我们依然欢迎你加入数学俱乐部。每天我都会有很多错误的想法，其他的数学家也不例外。

现在，我知道你正在想什么：前面我们对美和艺术以及创造过程的艰辛进行了大量粗略的、浪漫的讨论，这些都很不错，然而，我到底要怎样做呢？我还从来没有进行过任何数学证明，难道你就不能给我更多的提示，好让我能够继续走下去吗？

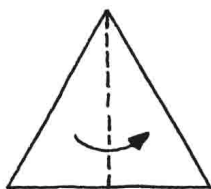
让我们回到前面所说的三角形和三条直线相交的问题。我们怎样才能形成论证呢？或许，我们可以从观察对称的三角形开始。



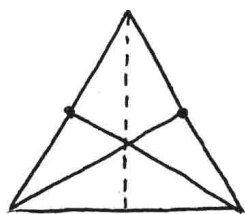
这种类型的三角形，通常也称之为等边三角形（equilateral，拉丁语“边相等”的意思）。我知道，这样的三角形非常的特殊，不具有典型性。但这里我们的想法是：如果在这种特殊的情况下，我们能够设法解释为什么这三条直线会相交于一点，这或许可以为我们处理更一般的三角形提供一些有用的线索。当然，也有可能这种方法并不能派上什么用场。世事难料，我们只能够这样不断地去尝试、去探索，数学家们则喜欢称之为“搞研究”。

无论如何，我们都必须要有一个切入点。在这种特殊的情况下弄清楚某些问题至少要相对容易一些，我们的优势则是这个三角形特别的对称性。千万不要忽视了对称性！在很多情况下，它都是我们所拥有的最强有力的数学工具。（将它放进你的背包里，与水壶和弯刀放在一起。）

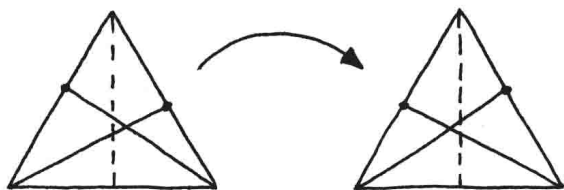
这里，对称性可以使我们得出这样的结论，即发生在三角形任意一条边上的事情也会发生在另外一条边上。换种方式说就是，如果我们将三角形沿对称轴翻转 180 度，那么三角形看起来还是会和原来完全一样。



特别地，三角形左右两条边的中点则会相互交换位置，同时连接它们到相对顶点的两条直线也会相互交换位置。



不过这也意味着，这两条直线的交点不会位于对称轴的任何一侧；否则的话，当我们将三角形翻转 180 度时，这个交点就会移动到另外一侧。如果出现这种情况的话，我们就能够说这个三角形翻过来了。



因此，这个交点事实上必然位于这条对称轴上。很明显，第三条直线（连接最上面的顶点与底边中点的直线）就是对称轴本身，所以这就是为什么这三条直线会相交于一点。难道这不是一个很好的解释吗？

这就是数学论证的一个示例，此外它也被称为**证明**。一个证明就是一个故事，问题的要素扮演其中的角色，而故事的情节则完全取决于你。与任何虚构文学作品一样，我们的目标是写出一个叙事引人入胜的故事。就数学来说，这意味着情节不仅要合乎逻辑，同时也要简单优美，没有人会喜欢曲折、复杂的证明。毫无疑问，我们需要遵从理性前进，但同时我们也想被证明的魅力和美征服。一句话，证明既要漂亮，也要符合逻辑，两者缺一不可。

这让我想到了另外一条建议：改进你的证明。虽然你已经给出了解释，但这并不意味着它就是最佳的解释。你能够减少其中不必要的混乱或复杂之处吗？你能够找到一种完全不同但却能让你更加深入地理解

问题的证明方法吗？证明，证明，继续证明，对于研究数学的人来说，这就是通常所说的“拳不离手，曲不离口”。画家、雕塑家以及诗人也是这样。

比如说我们刚才的证明，虽然逻辑清晰简单，但却显得有些主观。尽管我们基本上是在用对称性证明，但是我们给出的证明却有让人感觉不对称的地方（至少对我来说是如此）。具体来说，我们的证明似乎偏向其中的一个顶点。虽然说选定一个顶点并以经过这个顶点的直线作为对称轴并没有什么不妥，不过既然我们的三角形是完全对称的三角形，我们似乎不必做出这种主观的选择。

其实，除了镜像对称之外，我们也可以利用这个三角形的另外一个性质，即旋转对称。也就是说，如果我们将这个三角形绕着一个点旋转三分之一周角，那么它看起来还和原来一样。这就意味着，这个三角形必然有一个中心点。



现在，我们沿着三条对称轴中的任意一条翻转这个三角形（并没有偏向任何一个顶点），三角形都不会发生变化，因此它的中心点必然固定不动。这说明，这个中心点位于所有三条对称轴上。所以这就是这三条直线相交于一点的原因。

这里，我并不是想说，与前面的证明相比，这个证明更好或者完全不同。（事实上，还有很多其他的证明方法。）我想说的是，用两种以上的方法求解一个问题，可以使我们对这个问题有更深入的理解和领悟。特别地，第二个证明不仅告诉我们这三条直线相交于一点，而且告诉了我