贵州民族大学学术文库
贵州民族大学学术著作出版基金资助

分數階微分方程的高阶数值方法研究

曹俊英◎著

西南交通大学出版社

贵州民族大学学术文库
贵州民族大学学术著作出版基金资助

分数阶微分方程的高阶数值方法研究

曹俊英◎著

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

分数阶微分方程的高阶数值方法研究 / 曹俊英著.
—成都：西南交通大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5643-3477-2

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①微分方程－高阶－数值方法 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 224520 号

分数阶微分方程的高阶数值方法研究

曹俊英　著

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //www.xnjdcbs.com
印　　刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印　　张	9
字　　数	161 千字
版　　次	2015 年 1 月第 1 版
印　　次	2015 年 1 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-3477-2
定　　价	36.00 元

贵州民族大学学术文库编委会

前 言

分数阶微积分是研究任意阶积分和微分的数学性质及其应用的领域，是传统的整数阶微积分的推广. 它的出现已有很长的历史，但得到广泛应用则是近年来的事情. 分数阶微分方程的应用领域包含自动控制理论、记忆材料、粘弹性力学、地震分析、电力分形网络、分数阶正弦振荡器、电化学过程、反常扩散、信号处理、分形和多孔介质中溶质的对流与弥散、信息理论、分数电容理论、电极电解质接口描述、分形理论，分子生物学等. 分数阶微分方程的特点是含有非整数阶导数，具有所谓的非局部性，能有效描述某些物质的记忆和遗传性质，但也给数值方法的设计带来困难.

本书讨论分数阶微分方程的数值解法，主要内容包括：

第 1 章，给出了本书的研究背景和意义，总结了前人所做的工作，介绍了一些预备知识，详细给出了本书的研究内容和结构.

第 2 章，考虑阶数为 α 的分数阶常微分方程（FODEs）的数值解. 对非线性 FODEs 构造和分析了一个高阶数值格式. 此方法借助 block-by-block 格式的思想，改进了传统的 block-by-block 技巧，得到了一个除 1,2 层外每一步的解都不耦合的高阶格式，并给出了此方法的稳定性和收敛性分析. 证明了：当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，格式的收敛阶为 $3+\alpha$；当 $\alpha>1$ 时，收敛阶是 4. 最后的数值算例得到了与理论分析一致的结果.

第 3 章，推广第 2 章的方法，得到了一个更高阶的数值格式，并通过稳定性和收敛性分析证明了：当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，格式的收敛阶为 $5+\alpha$ 阶；当 $\alpha>1$ 时，其收敛阶为 6. 最后的数值试验进一步验证了理论结果.

第 4 章，考虑空间分数阶扩散方程. 首先在散落点上用三次 Multiquadric（MQ）函数的平移构造了一个拟插值算子，分析了此拟插值算子的再生性、保形性和对分数阶导数的收敛性，最后利用上述拟插值算子并结合时间差分格式构造了空间分数阶扩散方程的计算格式. 收敛性分析显示：当时间方向用 Crank-Nicolson 格式时，精度为 $O(\Delta t^2+h^{4-\alpha})$；当时间方向用向后 Euler 格式时，精度为 $O(\Delta t+h^{4-\alpha})$，其中 Δt 为时间步长，h 为空间步长. 数值结果表明，MQ 拟插值方法是构造数值格式的一个有效工具.

第 5 章，考虑空间分数阶扩散方程的有限差分/有限元逼近. 用有限差分

思想构造了一个高阶格式，通过建立其与弱形式的等价性，再利用有限元的思想证明了此高阶格式的稳定性和收敛性. 最后给出数值例子以对分析结果进行验证.

第 6 章，研究时间分数阶扩散方程，结合时间方向的有限差分格式和空间方向的 Legendre collocation 谱方法构造了一个高阶稳定格式. 系统的数值试验表明，该格式是无条件稳定的，其收敛阶为 $O(\Delta t^{3-\alpha}+N^{-m})$，这里 N 和 m 分别为空间多项式逼近阶数和精确解的正则度.

作 者

2014 年 4 月

目　录

1 绪 论

1.1 分数阶微积分理论的发展

分数阶微积分理论是许多数学家经过近三百年的共同努力才逐渐发展和完善的，它是数学分析的一个分支，是专门研究任意阶积分和微分的数学性质及其应用的领域. 最早提出这一思想的是数学家 Leibniz. 之后，Euler[1]，Laplace[2]，Lacroix[3]，Fourier[4]，Abel[5]，Liouville[6]，Riemann[7]等先后在该领域做出了杰出贡献，并最终形成了 Riemann-Liouville 分数阶微分和分数阶积分算子. 根据不同的基础和目的，还形成了其他形式的分数阶算子的定义. 例如，Grüwald-Letnikov，Mauchaud，Caputo，Weyl，Erdelyi-Kober 型分数阶算子，以及 Riesz 位势算子等[8-10].

初期由于没有得到物理、力学上的支持，又由于分数阶微积分在物理上与经典的 Newton 整数阶体系相左，发展比较缓慢. 最近，研究者们发现，分数阶微积分算子的非局部性或者所谓的记忆性，非常适合描述具有记忆和遗传特性的材料，并在诸多领域得到了应用. 如：描述分形和多孔介质中溶质的对流与弥散[11, 12]、材料的电性质[13]、电磁波[14]、电化学过程[15]、信号处理[16]、信息理论[17]、输送管中的边界层效应[18]、动力系统中的控制理论[19, 20]、粘弹性材料[21-24]、反馈放大器[25]、生物系统中的电导[26]、分形动力学[27, 28]、混沌[29]、神经细胞中离子的反常扩散[30-33]、生化[34]、水文[35]、金融[36]等. Nutting[37]，Gemant[38, 39]和 Scott-Blair[40]将分数阶微积分理论引入粘弹性材料的本构关系；另外，Caputo[41]，Mainardi[42, 43]等人将分数阶微积分理论很好地应用在有关地震、冶金等方面. 20 世纪 70 年代末，Mandelbrot[44]提出了分形学说，并且将 Riemann-Liouville 分数阶微积分用以分析和研究分形媒介中的布朗运动，之后，分数阶算子，尤其是分数阶微积分和分数阶微分方程理论及其应用研究在国际上得到了广泛关注和迅速发展.

1.2 研究动机

随着分数阶微分方程涉及的应用学科越来越多，分数阶微分方程的研究引起了人们广泛的关注，并逐渐成为一个新的活跃的研究领域，而如何求解

分数阶微分方程就成为一个紧迫和重要的研究课题.

与整数阶微分方程不同，分数阶微分方程的理论研究在文献中很少看到. Diethelm 等人考虑了分数阶常微分方程（FODEs）初值问题解的适定性[45]，Kilbas 等人利用广义的 Mittag-Leffler 函数研究了 Volterra integro-dierential 方程的解的表达式[46]，Diethelm 在文献[47]中给出了 FODEs 理论方面的最新发展.

给定一个一般的右端项 f, 确定分数阶微分方程的解析解是相当困难的. 因此，我们必须寻找有效求解 FODEs 的数值方法. 虽然在整数阶方程的数值研究方面有很多文献，但是对 FODEs 的数值解研究却十分有限，这可能是因为理论分析 FODEs 的数值解比较困难. 虽然如此，我们看到对 FODEs 数值解的研究兴趣日趋高涨. 2002 年和 2004 年，Diethelm 等人利用预估校正格式和分数阶 Adams 方法求 FODEs 的数值解[48, 49]；2007 年，Lin 和 Liu[50] 分析了一个线性多步法，证明了此方法的稳定性和收敛性；2006 年，Kumar 和 Agrawal[51]对 FODEs 的一组初值问题提出用 block-by-block 方法求解. 随后，2012 年，Huang 等人[52]证明了此方法的收敛阶至少是 3 阶，但是，此格式在每一块上需要耦合求解，这大大增加了计算量. 本书第 2 章借助 block-by- block 格式的思想，改进了传统的 block-by-block 方法，得到了一个除 1, 2 层外每一步的解都不耦合的高阶格式，给出了此方法的稳定性和收敛性分析. 第 3 章根据同样的思想构造了一个更高阶的格式，并给出了稳定性和误差估计.

另一方面，由于径向基函数具有简单性、精确性、各向同性以及便于向高维问题的扩展等优点，越来越多的研究者用它们构造插值函数，得到了非常好的结果. Light[53], Schaback 和 Wu[54]分别在 1992 年和 1996 年用径向基函数构造了一些插值函数. 1971 年，Hardy[55]首次介绍了 Multiquadric（MQ）函数. 1982 年，Franke[56]指出：就精度、稳定性、有效性、内存要求和易于实现而言，MQ 函数在 29 种散落数据插值格式中首屈一指. 然而，当插值点数非常大时，插值矩阵可能病态. 与插值相比，拟插值不但避免了病态问题，而且具有多项式再生性质和保形性质. 1989 年，Madyeh 和 Nelson[57]证明了：用 MQ 作为插值，总是得到最小半范数误差. 1990 年，Buhmann[58] 研究了 $MQ:\varphi(r)=\sqrt{r^2+c^2}$ 和逆 $MQ:\varphi(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+c^2}}$ 在奇数维 Euclid 空间上插值的收敛阶. 1992 年，Buhmann 和 Mieehelli[59]研究了多变量整数网格点的 MQ 局部化性质的改进问题. 2004 年，Ling[60]，Zhang 和 Wu[61]构造了一些拟插值. 2009 年，Chen 等人[62]发展了一个 MQ 拟插值，并

证明了该拟插值的线性再生性和保单调性. 2009 年, Feng 和 Li[63]利用三次 MQ 函数构造了一个拟插值算子. 1998 年, Hon 和 Mao[64]将 MQ 插值应用到 Burgers 方程. 2006 年, Chen 和 Wu[65]将 MQ 拟插值应用到双曲守恒律方程. 2010 年, Gu 等人[66]将基于径向基函数的无网格法用在了反常次扩散方程. 2011 年, Liu 等人[67]对时间分数阶扩散方程用基于径向基函数的无网格法来逼近. 从上述文献发现, 拟插值的逼近阶数不是很高, 且仅用在整数阶算子上. 本书第 4 章在散落点上用三次 MQ 函数的平移构造了一个高阶拟插值算子, 然后将该拟插值算子用在分数阶导数上, 并结合时间差分格式构造了空间分数阶扩散方程的计算格式.

2004 年, Fix 和 Roop[68]采用最小二乘有限元法对两点边值问题进行数值近似. 2006 年和 2007 年, Ervin 和 Roop[69, 70]提出用 Galerkin 有限元法求空间分数阶对流扩散方程的弱解. 2008 年, Huang 等人[71]针对对流-弥散方程用 Caputo 导数发展了一个无条件稳定的有限元方法. 2010 年, Zheng 等人[72]给出了有限元求解空间分数阶非齐次对流扩散方程的误差估计. 2011 年, Chen 等人[73]用 edge-based 光滑的有限元方法 (ES-FEM) 推广到了各向异性介质的分数阶问题. 本书第 5 章用有限差分思想构造了一个高阶格式, 建立其与弱形式的等价性, 然后利用有限元思想证明了此高阶格式的稳定性和收敛性.

对分数阶偏微分方程数值近似的研究, 起步相对也比较晚, 理论分析方面目前比较有限. 从 20 世纪末开始, Gorenflo[74, 75]等陆续考虑了时间导数为整数阶或 Caputo 分数阶, 空间导数为 Riesz-Feller 位势算子的时间、空间、时间-空间分数阶扩散方程, 借助于一定条件下 Riemann-Liouville 分数阶导数与 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的等价性, 用移位的 Grünwald-Letnikov 分数阶导数级数表达式中有限项级数和来近似 Riemann-Liouville 分数阶导数, 得到方程的有限差分离散近似格式, 进而把相应的离散格式解释成时间、空间、时间-空间上的离散随机游走模型. 此外, 在文献[76]中, Gorenflo 和 Mainardi 还进一步证明了离散格式在分布意义下的收敛性. 2005 年, Langlands 和 Henry[77]考虑了分数阶扩散方程, 对时间分数阶导数用 L_1 方法来逼近. 2006 年, Sun 和 Wu[78]对时间分数阶导数, 用 L_∞ 逼近构造了一个差分格式; 2007 年, Lin 和 Xu[79]对时间分数阶扩散方程提出在时间方向采用有限差分法, 并严格证明了时间方向上的收敛阶是 $2-\alpha$ 阶. 上述这些文献, 涉及的分数阶算子的数值近似格式的收敛阶都不超过 2 阶. 本书第 6 章结合时间方向的有限差分格式和空间方向的谱方法构造了一个高阶稳定格式. 数值例子显示该格式的收敛阶为: 时间方向 $3-\alpha$ 阶, 空间方向为谱精度.

1.3 本书主要工作

本书从数值计算方面对分数阶常微分方程和分数阶偏微分方程进行了深入研究，取得了一些新的结果. 具体内容如下：

第 1 章，绪论部分，给出了分数阶微积分的一些预备知识，讨论了分数阶微分方程模型在复杂系统中的应用，概括了分数阶微分方程在理论研究和数值方法等方面的研究工作，以及本书的研究内容和结构.

第 2 章，考虑分数阶常微分方程（FODEs）的数值解. 受 block-by-block 方法的启发，我们提出了一种构造高阶数值格式的一般方法. 除开始两步外，我们改进了传统的 block-by-block 方法，以避免在每一步上求解耦合方程. 同时，我们的方法保持了传统的 block-by-block 方法的稳定性. 利用该数值方法，我们对阶数为 α 的 FODEs 构造了一个高阶格式，并给出了该格式的稳定性和收敛性分析. 我们证明了：当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，格式的收敛阶为 $3+\alpha$；当 $\alpha>1$ 时，收敛阶是 4. 最后，通过一系列的数值算例验证了理论分析结果.

第 3 章，推广了第 2 章的方法，得到了一个更高阶数的格式，给出了稳定性和收敛性分析. 证明了：当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，收敛阶为 $5+\alpha$ 阶；当 $\alpha>1$ 时，收敛阶是 6. 数值实验结果说明了理论分析的正确性，最后，我们推广到其他更高阶的数值格式.

第 4 章，考虑空间分数阶扩散方程的数值解. 在散落点上用三次 Multiquadric（MQ）函数的平移构造了一个拟插值算子，分析了此拟插值算子满足三次多项式再生性、三阶导数和四阶导数严格保形性以及分数阶导数的收敛性. 然后，利用上述拟插值算子并结合时间差分格式构造了空间分数阶扩散方程的计算格式. 收敛性分析显示：当时间方向用 Crank-Nicolson 格式时，时间精度为 2 阶，空间精度为 $4-\alpha$ 阶；当时间方向用向后 Euler 格式时，时间精度为 1 阶，空间精度是 $4-\alpha$ 阶. 数值结果表明，MQ 拟插值方法是构造数值格式的一个有效工具.

第 5 章，给出了空间分数阶扩散方程的有限差分和有限元的逼近. 用有限差分思想构造了一个高阶格式，通过建立其与弱形式的等价性，然后利用有限元思想证明了此高阶格式的半离散和全离散的稳定性和收敛性，最后给出数值例子并对分析结果进行了验证.

第 6 章，考虑时间分数阶扩散方程的数值解. 构造了有效求解时间分数阶扩散方程的高阶稳定格式. 所提出的方法是基于时间方向的有限差分方法及空间方向的 Legendre collocation 谱方法. 数值结果表明，该高阶格式是无条件稳定的，其收敛阶为：时间方向 $3-\alpha$ 阶，空间方向为谱精度.

1.4 预备知识

1.4.1 分数阶微积分的一些定义

定义 1.1[10]（Caputo 分数阶导数） 对于正实数α，满足$n-1<\alpha\leqslant n$，n是正整数，$u(x)$为定义在$[a,b]$（a,b为有限或者∞）区间上的函数，则称

$$
{}_{a}\mathrm{D}_{x}^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_{a}^{x}(x-s)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(s)\mathrm{d}s, & n-1<\alpha<n,\\ \dfrac{\mathrm{d}^{n}u(x)}{\mathrm{d}x^{n}}, & \alpha=n\end{cases} \tag{1.1}
$$

为左侧α阶 Caputo 导数；

$$
{}_{x}\mathrm{D}_{b}^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_{x}^{b}(s-x)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(s)\mathrm{d}s, & n-1<\alpha<n,\\ (-1)^{n}\dfrac{\mathrm{d}^{n}u(x)}{\mathrm{d}x^{n}}, & \alpha=n\end{cases} \tag{1.2}
$$

为右侧α阶 Caputo 导数.

定义 1.2[10]（Riemann-Liouville 分数阶导数） 对于正实数α，满足$n-1<\alpha\leqslant n$，n是正整数，$u(x)$为定义在$[a,b]$（a,b为有限或者∞）区间上的函数，则称

$$
{}_{a}^{R}\mathrm{D}_{x}^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\displaystyle\int_{a}^{x}(x-s)^{n-\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s, & n-1<\alpha<n,\\ \dfrac{\mathrm{d}^{n}u(x)}{\mathrm{d}x^{n}}, & \alpha=n\end{cases} \tag{1.3}
$$

为左侧α阶 Riemann-Liouville 导数；

$$
{}_{x}^{R}\mathrm{D}_{b}^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\displaystyle\int_{x}^{b}(s-x)^{n-\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s, & n-1<\alpha<n,\\ (-1)^{n}\dfrac{\mathrm{d}^{n}u(x)}{\mathrm{d}x^{n}}, & \alpha=n\end{cases} \tag{1.4}
$$

为右侧α阶 Riemann-Liouville 导数.

引理 1.1[10]（Caputo 分数阶导数和 Riemann-Liouville 分数阶导数之间的关系） 对于正实数α，$n-1<\alpha\leqslant n$，n是正整数，当定义在$[a,b]$区间上的

函数 $u(x)$ 有直到 $n-1$ 阶连续导数，并且 $u^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 是可积的，那么：

$$ {}_a^R\mathrm{D}_x^\alpha u(x) = {}_a\mathrm{D}_x^\alpha u(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)}. \tag{1.5} $$

可以看出，当函数 $u(x)$ 满足下面条件：

$$ u^{(j)}(a) = 0,\ j = 0,1,\cdots,n-1 $$

时，Caputo 分数阶导数和 Riemann-Liouville 分数阶导数是等价的.

下面引入标准的 $L^2(\Omega)$ 内积和范数定义：

$$ (u,v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x,\ \| u \|_0 = (u,u)^{\frac{1}{2}},\ \forall u, v \in L^2(\Omega). $$

我们用 $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 来表示通常的 Sobolev 空间，相应的范数记为 $\|\cdot\|_m$.

下面引入分数阶 Sobolev 空间. 对于任意实数 $s \geqslant 0$，记：

$$ H^s(R) = \{ v(x) \mid v \in L^2(R);\ (1+|\omega|^2)^{\frac{s}{2}} F(v)(\omega) \in L^2(R) \}, $$

赋予范数：

$$ \| v \|_{s,R} = \| (1+|\omega|^2)^{\frac{s}{2}} F(v)(\omega) \|_{0,R}, $$

其中 $F(v)$ 表示 v 的傅里叶变换.

1.4.2 拟差值的有关理论

作为逼近理论中的常用工具之一，拟插值方法是逼近论中的一个研究热点. 给定一组各不相同的数据点 $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ 和在这些数据点上的函数值 $\{f(x_0), \cdots, f(x_n)\}$，我们的主要目标是要找出这个未知函数 $f(x)$ 的逼近函数 $f^*(x)$. 构造这样的逼近函数的一种方法是：通过选择适当的函数

$$ \xi_i : \Omega \to \mathbf{R}\ (\text{其中 } 0 \leqslant i \leqslant n) $$

把数据点和数据值分开考虑. 可见 $\xi_i(x)$ 仅仅依赖于数据点 X. 有了 $\xi_i(x)$ 就可以构造如下形式的逼近：

$$ f^*(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\xi_i(x). $$

如果函数 $\xi_i(x)$ 是关于 X 的 Kronecker-delta 函数，即

$$\xi_i(x_j)=\delta_{i,j},$$

其中 $0\leqslant i,j\leqslant n$，则这个逼近是插值. 相反地，则称这个逼近为拟插值.

下面给出一些定义.

定义 1.3[80] 给定非负整数 m，对任何 $p(x)\in P_m$，当 $f(x)=p(x)$ 时，拟插值 $f^*(x)$ 满足：

$$f^*(x)=p(x),$$

则称该拟插值 $f^*(x)$ 在 $[x_0,x_n]$ 上具有 m 次多项式再生性，其中 P_m 表示一切次数不超过 m 的实系数实变量多项式所构成的多项式空间.

注释 由定义 1.3 可知，当 $m=0$ 时，称拟插值 $f^*(x)$ 是常数再生的；当 $m=1$ 时，称拟插值 $f^*(x)$ 是线性再生的；当 $m=2$ 时，称拟插值 $f^*(x)$ 是二次再生的.

定义 1.4[61] 对于单调增加（减少）的已知数据 $f_i, i=0,1,\cdots,n$，如果拟插值 $f^*(x)$ 是单调增加（减少）函数，则称拟插值 $f^*(x)$ 在 $[x_0,x_n]$ 上具有保单调性.

2　分数阶常微分方程的一个高阶数值格式

形如

$$ {}_0\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)) $$

的分数阶常微分方程(FODEs)经常出现在许多实际应用问题中，这里 $\alpha>0$, ${}_0\mathrm{D}_t^{\alpha}$ 是分数阶微分算子. 在文献[85]中，我们借助 block-by-block 方法的思想[51]对非线性 FODEs 构造和分析了一个高阶格式. p-block-by-block 方法是一个对积分方程的线性多步法[81]. 此方法导出了一个在 $m+1$ 个步长块上有 p 个未知量 $u^{pm+1},u^{pm+2},\cdots,u^{pm+p}$，然而解这 p 个未知量是非常困难的，尤其当 p 个未知量是空间变量 x 的函数时. 本章的主要创新点在于改进了传统的 block- by-block 技巧，得到了一个高阶格式，可以单独来求未知量. 这个方法的优势在于除了第一层和第二层外，其余的未知量不需要耦合求解，仍能得到与传统的 block-by-block 格式相同的精度. 而且，如果将格式推广到时间分数阶微分方程：

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t,x)=f(t,x,u(t,x),\Delta u(t,x)), $$

将减少计算量. 尽管新的格式的系数与传统方法的系数不一样，我们仍然能得出稳定性和误差估计，并证明了：当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，收敛阶为 $3+a$ 阶；当 $\alpha>1$ 时，收敛阶为 4 阶. 据我们所知，这是第一个基于严格收敛性证明下的如此高阶的格式. 数值算例显示了理论分析的正确性.

2.1　高阶格式

我们考虑如下分数阶常微分方程：

$$ {}_0\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\alpha>0, \tag{2.1} $$

满足下面的初值条件：

$$ u^{k}(0)=u_0^{(k)},k=0,1,\cdots,n-1, \tag{2.2} $$

这里 n 是正整数，α 是分数阶导数的阶数，且满足 $n-1<\alpha\leqslant n$，$u^{k}(t)$ 是 u 的 k 阶导数，$u_0^{(k)}, k=0,1,\cdots,n-1$, 为已知函数.（2.1）中的 $\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t)$ 为 α 阶 Caputo 分数阶导数[10]，定义为

$$
{}_0\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int(t-\tau)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.3}
$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数.

关于（2.1）的数值方法，研究者们已经做了大量的工作，例如，文献[77～99]用有限差分法对分数阶导数（2.3）进行直接离散. 由现有的文献可知，当 $0<\alpha<1$ 时，用有限差分方法得到的收敛阶的最高阶为 $2-\alpha$ 阶. 文献[50，52]将（2.1）转化为 Volterra 型积分方程，则可利用积分方程的一些技巧[51]. 在本章，我们改进了传统的 block-by-block 方法，对（2.1）构造了一个高阶格式.

对于初值问题（2.1）～（2.2），假设解是连续的，文献[45]已经证明它和下面的 Volterra 积分方程是等价的：

$$
u(t)=g(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{2.4}
$$

其中 $g(t)$ 为

$$
g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}u_0^{(k)}\frac{t^k}{k!}.
$$

为了构造高阶格式，我们将区间[0，T]分成 $2N$ 个等分的子区间，其中 $\Delta t=\dfrac{T}{2N}$，设 $t_j=j\Delta t, j=0,1,\cdots,2N$. 方程（2.4）在点 t_j 上的数值解记为 u_j，并记 $g_j=g(t_j), f_j=f(t_j,u(t_j))$.

构造高阶格式的思想如下：我们开始计算最初二步的解，首先确定 $u(t)$ 在 t_1 上的值. 使用二次拉格朗日插值，$f(t,u(t))$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上的逼近式为

$$
f(t,u(t))\approx\varphi_{0,0}(t)f_0+\varphi_{1,0}(t)f_{\frac{1}{2}}+\varphi_{2,0}(t)f_1,\quad \forall t\in[t_0,t_1], \tag{2.5}
$$

其中 $t_{\frac{1}{2}}=t_0+\dfrac{\Delta t}{2}, f_{\frac{1}{2}}=f(t_{\frac{1}{2}},u(t_{\frac{1}{2}})), \varphi_{k,0}(t), k=0,1,2,$ 是二次拉格朗日插值基函数，定义为