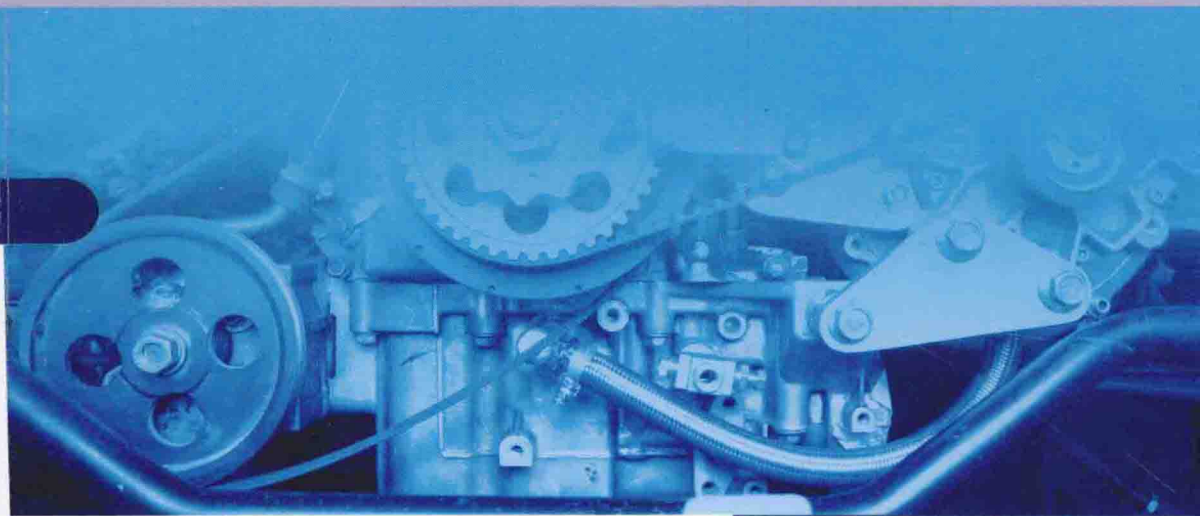


机械振动与噪声控制的理论、技术及方法

王可 樊鹏 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

机械振动与噪声控制的 理论、技术及方法

主 编 王 可 樊 鹏
副主编 于慎波 孙兴伟
参 编 唐宗军 陶 柯 杨赫然
王 蔚 丛龙涛



机械工业出版社

本书是编者根据多年的理论研究和科研实践经验编写而成,从理论和应用两个方面深入浅出地阐述了机械结构振动与噪声控制的理论、技术和方法。全书共分为3篇:第1篇为减振与隔振,第2篇为降噪与消声,第3篇为测试与分析。主要内容包括机械结构振动特性分析、结构动态优化、阻尼处理技术、振动噪声产生与控制机理、振动噪声的评价方法、振动测试和信号分析技术,以及国内外振动噪声控制元器件、新技术、新材料、新产品介绍等,涉及面广,图文并茂。本书理论与实践相结合,强调理论,突出应用,同时兼顾学术与工程,做到提高与普及相结合。

本书可作为高等院校机械工程类专业教师、学生的教材,也可作为从事机械振动和噪声研究的科研人员与工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动与噪声控制的理论、技术及方法/王可,樊鹏主编. —北京:机械工业出版社,2014.10

ISBN 978-7-111-48292-5

I. ①机… II. ①王…②樊… III. ①机械振动—振动控制②机器噪声—噪声控制 IV. ①TH113.1②TB533

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第241367号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:何月秋 责任编辑:何月秋 刘本明

版式设计:赵颖喆 责任校对:樊钟英

封面设计:马精明 责任印制:李洋

北京市四季青双青印刷厂印刷

2015年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·17.5印张·1插页·333千字

0 001—2 500册

标准书号:ISBN 978-7-111-48292-5

定价:65.00元



凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

读者购书热线:(010) 88379203

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

策划编辑电话:(010) 88379879

封面无防伪标均为盗版

前 言

噪声污染与空气污染、水污染一起被公认为当今社会的三大污染,严重影响人们的正常工作和生活。工业企业中的高噪声对人体健康产生的危害,已日益引起人们的广泛关注。在机械工业的各种噪声污染中,机械结构振动所产生的噪声是一种重要的噪声来源。因此,如何减振、控制噪声,将噪声降低到无害的程度,是环境保护和劳动保护的一项重要课题。

沈阳工业大学机械工程学院是较早研究机械结构振动与噪声的单位之一,长期从事机械结构振动与噪声控制机理、结构动态优化、阻尼技术、减振与隔振技术、机械系统检测与分析技术等振动与噪声控制的理论、试验和工程应用研究。现将我们的研究经验和成果进行总结,为该领域的科技人员、工程师和大专院校师生提供一个学习机械结构振动与噪声相关知识的平台。

本书理论性与实用性相结合,从机械结构振动力学、机械振动噪声以及信号检测分析等多方面,全面、系统地阐述了机械振动与噪声控制的理论、技术及方法,可以使相关人员对机械结构振动与噪声的基本原理、控制方法和工程应用有一个比较全面的认识。

本书分3篇,共24章。

机械结构振动所产生的噪声是一种重要的噪声来源,所以首先学习有关振动的基础知识。第1篇减振与隔振介绍了机械结构振动特性的基础理论知识,阐述了阻尼处理技术和结构动态优化方法,并给出了几种国内外先进的减振器和吸振器。

在此基础上,进一步研究来源于振动的噪声的相关技术。第2篇降噪与消声介绍了声学的基础知识,论述了振动噪声的产生与控制机理,以及振动噪声的评价方法,给出了几种常用隔声器和消声器的作用机理。

在前两篇理论知识的基础上,第3篇测试与分析主要研究噪声与振动的测试与分析技术,论述了几种信号测试仪器的的工作原理和特性,阐述了振动噪声信号分析技术、方法及其在工程中的应用,介绍了国内外先进的振动噪声控制元器件、新产品等。

本书由樊鹏、王可主编,其中第1章、第2章、第8章、第10章、第23章由樊鹏、于慎波编写,第3章、第7章、第20章、第24章由樊鹏、孙兴伟编写,第4章、第5章、第6章、第9章、第19章、第21章由王可编写,第11章、第12章由于慎波、唐宗军编写,第13章由陶柯编写,第14章由孙兴伟、

丛龙涛编写，第 15 章、第 22 章由樊鹏、王蔚编写，第 16 章、第 17 章、第 18 章由樊鹏、杨赫然编写。全书由孙兴伟整理统稿，由王可教授最后审定。

本书在编写过程中参考了一些国内外专家、学者的成果和相关论著，在此致以真诚的感谢！

限于编者的水平，书中错误或不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第1篇 减振与隔振 1

第1章 振动的基本概念 2

1.1 质点的振动 2

1.2 振动系统 4

第2章 阻尼与振动运动 15

2.1 能量损耗基础 15

2.2 粘性阻尼与自由振动 17

2.3 临界阻尼 19

2.4 粘性阻尼与强迫振动 20

2.5 等效阻尼 21

2.6 频率比及阻尼比对稳态响应的 影响 22

2.7 对数减量 23

第3章 结构中的阻尼 25

3.1 阻尼的特性参数 25

3.2 结构滞回阻尼 27

3.3 摩擦阻尼 28

第4章 激振源和振动的力 传导 33

4.1 激振源 33

4.2 激发力的响应和力传导 38

4.3 振动结构的隔离 43

第5章 大阻尼材料 49

5.1 粘弹性阻尼材料 50

5.2 阻尼合金 53

5.3 复合阻尼材料 53

第6章 阻尼处理技术 56

6.1 阻尼处理的方法 57

6.2 薄板的阻尼处理 65

6.3 几种阻尼处理实例 66

第7章 法郎姆调谐减振 68

7.1 法郎姆 (Frahm) 振动缓冲 原理 68

7.2 动力阻尼减振器 72

7.3 粘性阻尼器 75

7.4 离心调谐的摆式减振器 77

第8章 吸振器 81

8.1 无阻尼吸振器 81

8.2 粘性吸振器 84

8.3 工业缓冲器 86

8.4 离心摆吸振器 88

8.5 扭振缓冲器 90

8.6 兰彻斯特粘性阻尼器 91

第9章 振动的危害 94

9.1 概述 94

9.2 减小振动的途径 95

第2篇 降噪与消声 97

第10章 声学基础 98

10.1 声波的概念 98

10.2 声波在空气中的传播 101

10.3 声场 109

10.4 计权声级 110

第11章 声的产生与传播 111

11.1 声的形成过程 111

11.2 固体中声的传播与衰减 113

11.3 摩擦噪声 119

11.4 表面辐射特性 119

11.5 声发射 122

第12章 冲击噪声与加速度 噪声 123

12.1 冲击噪声 123

12.2 加速度噪声 127

第 13 章 声能传播中的衰减 ...	129
13.1 声能传播的过程	129
13.2 声能损耗机理	129
第 14 章 吸声材料	134
14.1 吸声系数与降噪系数	134
14.2 对理想吸声材料的要求	136
14.3 多孔材料的种类及其吸声系数	136
14.4 穿孔共振吸声结构	139
14.5 降噪量	141
第 15 章 吸声材料处理技术 ...	143
15.1 房间的吸声处理	143
15.2 多声源的吸声处理	145
15.3 连接管的吸声处理	145
15.4 吸声材料的保护	146
15.5 空隙的效果	147
第 16 章 隔声材料与隔声屏障	148
16.1 隔声机理	148
16.2 隔声材料	153
16.3 隔声屏障	154
16.4 声桥与隔声屏的安装	157
第 17 章 噪声的封闭与隔声罩	159
17.1 全封闭与部分封闭	159
17.2 封闭罩的插入损耗	161
17.3 封闭罩的通风	162
17.4 设计与安装封闭罩的注意事项	163
第 18 章 消声器的作用机理 ...	164
18.1 消声器的降噪特性	164
18.2 声波在消声器中的传播	166
18.3 消声器中流体流动的影响与再生噪声	168
第 19 章 消声器设计	171
19.1 消声器的基本类型	171
19.2 消声器消声值的计算	176
19.3 消声器的有效频率范围	181
19.4 气流在消声器内的压力损失	183
第 3 篇 测试与分析	185
第 20 章 传声器与前置放大器	186
20.1 传声器	186
20.2 前置放大器	197
第 21 章 拾振器与阻抗头	199
21.1 惯性拾振器的力学模型	199
21.2 压电式加速度计	203
21.3 磁电式速度拾振器	210
21.4 伺服式加速度计	211
21.5 阻抗头	213
第 22 章 激振器	215
22.1 电动式激振器	215
22.2 电磁激振器	216
22.3 电液激振器	219
第 23 章 数字信号分析	220
23.1 基本知识	220
23.2 离散傅里叶变换	223
23.3 快速傅里叶变换	225
23.4 泄漏与窗函数	229
23.5 噪声与平均技术	232
23.6 数字信号分析仪的工作原理	235
23.7 小波变换及其应用	238
第 24 章 噪声与振动测试分析软硬件新产品	251
24.1 丹麦 Brüel&Kjær 公司的主要新产品	251
24.2 德国 HEAD Acoustics 公司的主要产品	253
24.3 美国 NI 公司的 LabVIEW 和晶钻公司的 CoCo 分析仪	262
24.4 法国 01dB-stell 公司和 OROS 公司的主要产品	266
参考文献	270

第1篇

减振与隔振

- 第1章 振动的基本概念
- 第2章 阻尼与振动运动
- 第3章 结构中的阻尼
- 第4章 激振源和振动的力传导
- 第5章 大阻尼材料
- 第6章 阻尼处理技术
- 第7章 法郎姆调谐减振
- 第8章 吸振器
- 第9章 振动的危害

第 1 章

振动的基本概念

工业产品实质上是各种结构的组合。例如，冶金矿山机械、车辆、金属切削机床、船舶，或者空间运载设备、动力机械、化工设备或管道等，都是把一些结构组装在一起，彼此之间相互固定或可作一定相对运动的装置。

很早以前，这些产品结构比较简单，但常具有很大的质量，常采用很笨重的木块、铸件或石头等材料，而且激振源的质量很小，因此，这类构造方法所制出的结构一般具有很大的内阻尼，它对于动态激发只给出很低的响应。

后来发展出了强度比较高的轻质材料，例如高强度铸铁、合金钢、合金铝等，同时，人们关于材料特性及结构负载的知识也更加丰富，要满足一个具体的功能，结构的质量相对于以前可大大减轻。随着设备效率的提高、旋转速度的增加、功率的增大，激振力也加大了，因此有必要研究结构的动态特性，以生产出可接受的产品。

研究与分析结构的动态特性，需要先弄清有关振动的基本概念。

1.1 质点的振动

当一个质点相对于其平衡位置（或称原点）作往复运动时就构成了振动现象。质点在某一瞬时相对于其平衡位置的距离叫做位移。这是一个矢量，既有距离也有方向，所以符合矢量的规律及特性。最大的位移就是振幅。如果原点固定，则位移是一个绝对值；如果原点本身在运动，则位移是一个相对值。图 1-1 中矢量 $\vec{S}$ 是 P 点相对于原点 O 的位移。可以选择任何一种坐标系来描述矢量 $\vec{S}$ 。

$$\vec{S} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} \quad (1-1)$$

式中 $\vec{S}$ —— P 点相对于原点 O 的位移矢量 (m)；

$\vec{X}$ 、 $\vec{Y}$ 、 $\vec{Z}$ ——分别表示 P 点相对于原点 O 在 X 轴、 Y 轴、 Z 轴的位移矢量 (m)。

P 点的瞬时速度 v 是位移 $\vec{S}$ 对时间的变化率。

$$v = \frac{d\vec{S}}{dt} = \dot{\vec{S}} \quad (1-2)$$

式中 v —— P 点的瞬时速度 (m/s)。

如果 P 点作直线运动, 例如沿 Y 轴移动, 则其位移和速度只是坐标 Y 的函数, 即

$$v_Y = \frac{dY}{dt} \quad (1-3)$$

此时 P 点只有一个自由度, 一个坐标就可以确定 P 点的位置。

再来看 P 点作曲线运动的情况。图 1-2 所示的单摆在 YZ 平面内运动。速度矢量 $\vec{V}_\theta$ 的方向是单摆行程中瞬时的切线, 而且是该系统被约束状态下的函数。速度矢量的模正比于角位移的变化率, 即

$$\vec{V}_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} \quad (1-4)$$

式中 $\vec{V}_\theta$ —— P 点的速度矢量 (m/s);

ρ ——从摆动中心 O 到 P 点的距离, 即摆的长度 (m)。

另外, 速度矢量 $\vec{V}_\theta$ 可以用 $\frac{dZ}{dt}$ 及 $\frac{dY}{dt}$ 两个分矢量描述:

$$\vec{V}_\theta = \frac{dZ}{dt} + \frac{dY}{dt} \quad (1-5)$$

式 (1-5) 需要两个坐标 Y 及 Z , 外加一个几何约束方程 $\rho^2 = Y^2 + Z^2$ 描述。

瞬时加速度是速度的变化率, 它可以用任何一组坐标中的加速度矢量来表示:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \ddot{\vec{S}}$$

式中 $\vec{a}$ —— P 点的加速度矢量 (m/s²)。

如果加速度是单一坐标的函数, 则可采用标量加速度。

以上所讨论的运动是质点的运动。如果运动包括刚体, 则还要考虑刚体的转动问题, 即角位移。角位移是一个给定线的角度位置的变化, 它从一条方便的参考线量起。角速度是角位移的变化率, 其定义与线速度相似:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

角加速度是角速度的变化率:

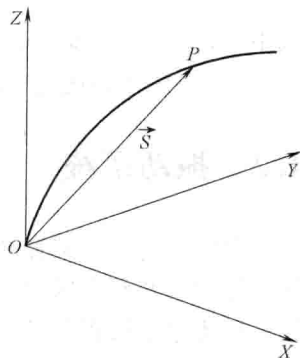


图 1-1 矢量 $\vec{S}$

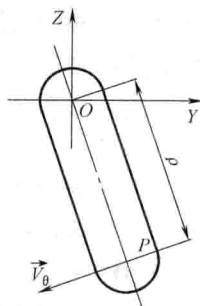


图 1-2 单摆

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$$

式中 ω ——角速度 (rad/s);
 $\vec{\alpha}$ ——角加速度 (rad/s²)。

1.2 振动系统

各种结构由于某种激发而产生振动, 相关联的结构部件便形成一个振动系统。振动系统研究时可分为两类, 典型的是集中参数系统。这类系统假设构成振动系统的各元件(如弹簧、箱体、机架、底座、轴等)不论尺寸及几何形状如何, 都看成是一个物理性质集中的实体, 其质量假设集中在重心。弹簧的弹性假设是均匀的, 其弹性也集中在位于中心线的一点上。简化的弹簧-质量系统如图 1-3 所示。质量块 m 的质量和刚度远远大于弹簧, 因此质量块的弹性变形和弹簧本身的质量对此系统振动的影响可以忽略不计。这种由弹性元件和质量元件所构成的理想化的振动系统就是集中参数系统。

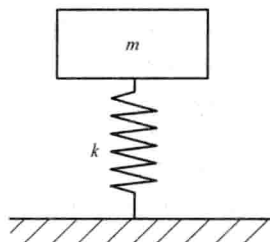


图 1-3 弹簧-质量系统

由于每个元件都有一定的质量, 所以在运动时都有一定的惯性, 同时每个元件又都具有一定的弹性变形和恢复过程, 都有各自消耗能量的方式, 有些场合不能简单区分为质量元件和弹性元件。例如, 一些承受分布载荷的横梁、平台以及杠杆等振动时都有不同的瞬时变形, 尤其在精确计算时必须把载荷或其他作用力的分布情况, 以及其本身质量的分布情况考虑进去。这样的系统便是分布参数系统。分布参数系统还可分为均匀分布参数系统和不均匀分布参数系统。

事实上任何物体都具有一定尺寸, 物体上各点的振动状态均不相同。但是如果其尺寸与振动传播的波长相比小得多, 则仍可近似地看作是均匀的, 这一物体就可以看作是集中的。实践中所研究的振动系统基本上都可以近似地假设是由集中参数构成的结构。

1.2.1 单一自由度系统的振动

如果图 1-3 中的质量块 m 自其平衡位置向上移动了距离 A , 这时弹簧被拉长, 便对质量块有一个拉力 F 。如果伸长量没有超过弹性变形范围, 则弹簧的弹性力与位移的大小成正比。弹性力的作用方向与位移的方向相反, 即 $F = -kx$ 。其中 F 为弹性力, 单位为 N; k 为弹簧刚度, 它描述产生单位长度的变形所需的作用力, 单位为 N/m; x 为质量块的位移, 单位为 m; 负号表示弹性力与位移方向相反。如果质量块在此位置突然松开, 弹簧弹性力的作用会使其得到一个加速度而运动。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \text{ 或 } \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

设 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, 则运动方程变成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1-6)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 称为这个振动系统的固有角频率, 单位为 rad/s。这个方程表示了质量块的自由振动。 m 以其平衡位置为中心上下振动, 其振幅便是最大位移 A 。此微分方程的一般解为

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t \quad (1-7)$$

A_1 及 A_2 是积分常数, 由初始的运动条件决定。这个解也可以写成

$$x = A \cos(\omega_0 t - \phi)$$

质量块 m 的位移随时间变化的规律是一种简谐运动, 如图 1-4 中的正弦曲线所示。

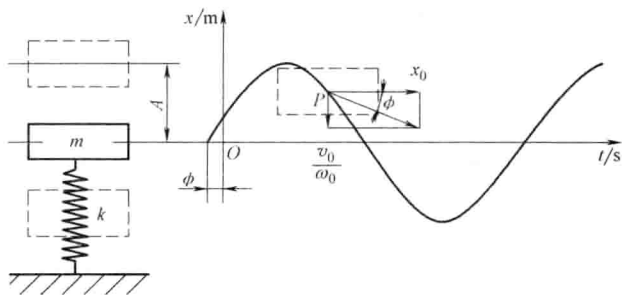


图 1-4 在弹性力作用下的自由振动

集中参数系统将质量块 m 看成一个点 P , 图中表示其初始相位角等于 ϕ , 振幅 A 是其最大位移, $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 就是振动系统的频率。这个质量-弹簧系统作自由振动的频率是由系统本身的参数 m 和 k 决定的, 因此 f_0 又称为此系统的固有频率, 单位为 1/s。开始时 $t=0$, 质量块 m 被移至 x_0 , 故有

$$x_0 = A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0$$

所以 $A_1 = x_0$ 。

由式 (1-7) 可知

$$\frac{dx}{dt} = -A_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + A_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

故 $v_0 = A_2 \omega_0$, $A_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$ 。于是有

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1-8)$$

其中, $x_0 \cos \omega_0 t$ 是由初始位移引起的振动位移, $\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ 是由初始振动速度引起的振动位移, 两者相位差 90° , 如图 1-4 所示。如果只是一次质量块位移, 系统内只有一个弹簧力起作用, 则此振动很快就会停止。

如果振动持续不停, 则必然有另一个系统不断地对此振动系统补充激励能量以维持振动。有外力不断作用着的振动称为强迫振动。一般外力角频率 ω 与振动的固有角频率 ω_0 不相等。假设此外力为 $F e^{j\omega t}$, 则此系统的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F e^{j\omega t} \text{ 或 } \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{j\omega t} \quad (1-9)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 是振动系统的固有角频率, $\omega = 2\pi f$ 是外力的角频率。这个方程的解包括两个部分:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F}{m} \frac{\cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1-10)$$

式中 A ——振动的最大位移, 即振幅 (m);

ω_0 ——振动系统的固有角频率 (rad/s);

ω ——外力的角频率 (rad/s);

ϕ ——初始相位角 (rad);

t ——瞬时时间 (s);

F ——系统所受的外力 (N);

m ——质量块的质量 (kg)。

其中第一项即自由振动解的形式, 称为自由振动分量; 第二项是由于外力而产生的简谐力, 它与外力的频率有关, 称为强迫振动分量。如果所加外力的频率和系统的固有频率相等, 即 $\omega \rightarrow \omega_0$, 则构成共振条件, 其解为

$$x(t) = \frac{Ft}{2m\omega} \sin \omega t$$

此系统的振幅将随时间而不断增大, 如图 1-5 所示。如果两者频率不相同, 则可能产生拍频振动。拍频等于外力的频率和振动系统固有频率的最小公倍数。

实际上由于阻尼的存在, 振幅不可能无限地增大。当振动结构的运动速度不很大时, 阻尼力 F_f 与物体的运动速度成正比, 其方向总是与速度的方向相反, 即 $F_f = -c \frac{dx}{dt}$, 其中 c 为阻尼系数。

于是振动系统的运动方程为

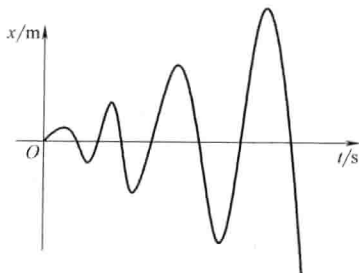


图 1-5 共振系统

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F \cos \omega t$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} e^{j\omega t}$$

设 $\zeta = \frac{c}{2m}$, 称为阻尼比, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为振动系统的固有角频率, 则有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{j\omega t} \quad (1-11)$$

其力学模型如图 1-6 所示, 其解如下:

$$x(t) = Ae^{-\zeta t} \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F \sin(\omega t - \phi)}{\omega \left[c + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right]} \quad (1-12)$$

这个解的第一项表示自由振动分量, 由于它的振幅随时间而衰减, 经过一段时间后便消失, 所以称为暂态分量。第二项的振动频率是外加激励力的频率, 这是强迫振动的分量。所以强度振动发生时振动现象是在变化的, 但是经过较短时间的过渡状态, 振动便变成一种稳定状态。运动方程的解式 (1-10) 中的第一项变成零, 只剩第二项。振动的发展过程如图 1-7 所示。

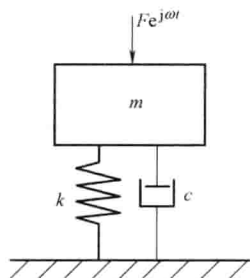


图 1-6 力学模型

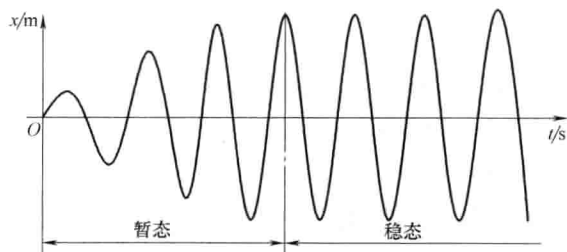


图 1-7 振动的发展过程

在稳定状态下强迫振动也具有简谐振动形式, 即

$$x = A' \cos(\omega t + \phi)$$

其中振幅 A' 和初始相位 ϕ 不仅取决于外加力的大小和频率, 还取决于振动系统的固有频率 ω_0 和阻尼比 ζ 。它们与开始时的运动状态无关。

$$\begin{cases} A' = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}} \\ \phi = \arctan \frac{-2\zeta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} \quad (1-13)$$

稳态振动的周期就是外激励力的周期，其角频率为 ω 。

在强迫振动中振动系统因外力做功而获得振动能，同时因为有阻尼而损耗能量。强迫振动开始时外力的功往往大于阻尼所损耗的能量，所以振动系统的总能量增大，振幅加大，结构件各点的运动速度随着增大。由于阻尼力正比于速度，所以每循环阻尼所损耗的能量也在增加。如果外力恒定，则当外力所做的功恰好补偿阻尼消耗的能量时就保持稳定的等幅振动，如图 1-7 所示。如果撤去外力，则此系统变成有阻尼的自由振动，能量逐渐被消耗，最后停止振动。

1.2.2 扭转振动

图 1-8 所示为研究扭转振动的模型。一个惯性矩为 J 的圆盘固定在一根抗扭刚度为 k_T 的轴上。如果此圆盘扭转一个角度 θ 后松开，就会得到扭转振动。其运动方程为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k_T \theta = 0$$

这是一个简谐运动，其频率为 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_T}{J}}$ ，单位是 Hz。

轴的抗扭刚度 k_T 是指其抵抗扭转变形的能力，可用下式计算：

$$k_T = \frac{GJ}{l}$$

式中 G ——轴的剪切模量 (MPa)；

J ——圆盘的惯性矩 (m^4)；

l ——轴的长度 (m)。

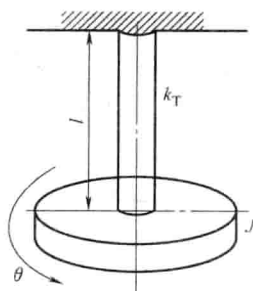


图 1-8 扭转振动系统

由于阻尼的作用，圆盘的扭转角逐渐减小，最后静止。

1.2.3 多自由度系统的振动

一个系统自由度的数目与要描述这个系统的状态所需要的独立坐标的数目相等。当一个系统只作一维运动时，其自由度的数目对应于此系统中固有的元件数。

图 1-9a 所示为一种简单的二自由度系统，其中两个质量块垂直地由弹簧连接，可能发生相对运动，因此，每个质量块需要一个独立坐标。此系统有两个自由度。

系统处于相对平衡位置时各质量块的力分析如图 1-9b 所示。其中 Δ_1 及 Δ_2 表示质量块 m_1 及 m_2 的位移，即弹簧相对于其自由长度的变形。其平衡方程为

$$\begin{cases} m_1 g + k_2 \Delta_2 - k_1 \Delta_1 = 0 \\ m_2 g - k_2 \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

当这个系统产生振动时，两个质量块由其平衡位置分别移动了 x_1 及 x_2 ，如

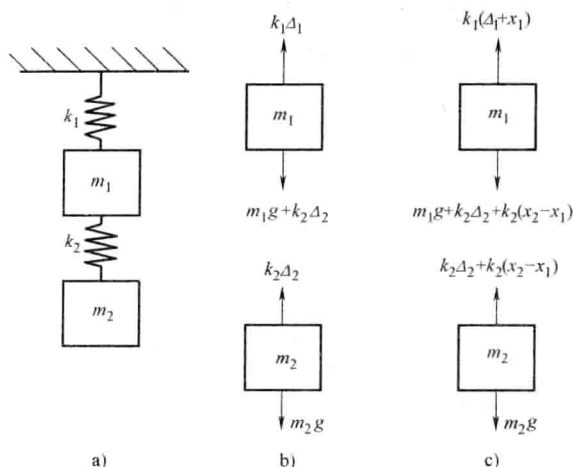


图 1-9 二自由度系统及力分析

a) 二自由度系统 b) 静平衡的力分析 c) 动平衡的力分析

图 1-9c 所示。为了方便起见, 假设位移都是正的, 于是 $x_2 > x_1$ 。弹簧 k_2 处于拉伸状态。依照牛顿第二定律, 得出如下方程:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + k_2 \Delta_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_1 (\Delta_1 + x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - k_2 \Delta_2 - k_2 (x_2 - x_1) \end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = m_1 g + k_2 \Delta_2 - k_1 \Delta_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = m_2 g - k_2 \Delta_2 \end{cases} \quad (1-15)$$

将式 (1-14) 代入式 (1-15), 就可以消去静平衡项而得到如下方程:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2} x_2 - \frac{k_2}{m_2} x_1 = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

这就是该系统的运动微分方程。它们是带有常系数的二阶线性微分方程, 而且都是齐次的。此系统沿其平衡位置上下振荡, 两个质量块由弹簧连接, 所以称为弹性耦合。

图 1-10a 及图 1-10b 所示为典型的二自由度结构, 它们作平衡振动的运动方程是

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \end{cases} \quad (1-17)$$

对于图 1-11 所示的二自由度的扭转振动, 微分方程可以按如下步骤确定:

如果将图中两个圆盘分别转过角 θ_1 和 θ_2 ，它们由中间弹性杆 k_2 连接。其自由体如图 1-11b 所示，其中 $\theta_2 > \theta_1$ 。从图中可得出运动方程为

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_2 - \theta_1)$$

及

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_2 (\theta_2 - \theta_1) - k_3 \theta_2$$

整理可得

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{k_1 + k_2}{J_1} \theta_1 - \frac{k_2}{J_1} \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{k_2 + k_3}{J_2} \theta_2 - \frac{k_2}{J_2} \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (1-18)$$

式中 $J_1 J_2$ ——两个圆盘的惯性矩。

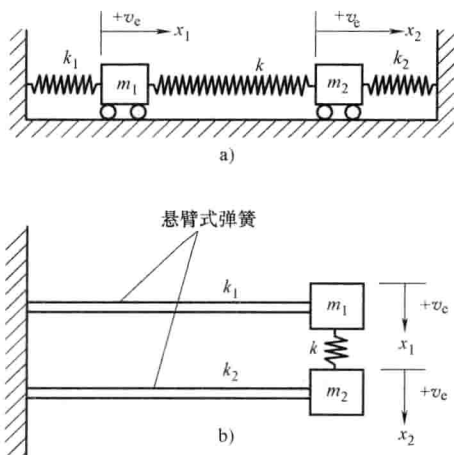


图 1-10 平移振动的二自由度结构

- a) 水平方向振动的二自由度结构
b) 竖直方向振动的二自由度结构

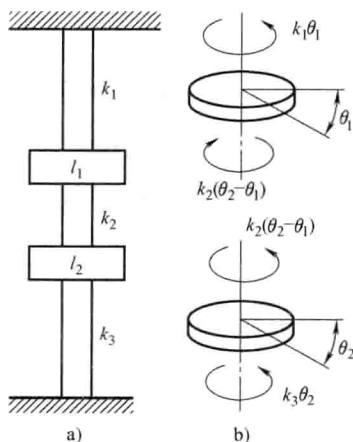


图 1-11 二自由度的扭转振动

- a) 二自由度结构
b) 扭转振动的自由体

1. 固有频率和主振型

求解两质量块 m_1 和 m_2 的位移 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 。这些解必是在任何时间 t 都满足式 (1-16)，并满足一定的起始条件。假设 m_1 及 m_2 以同样频率 ω 作同相或相差 π 相位的振动，并设其解为

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi), \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

其中 A_1 及 A_2 为质量块 m_1 及 m_2 的振幅， ω 为其角频率， ϕ 为其相位角。进行微分并代入运动微分方程式 (1-17) 可得

$$\begin{cases} -m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -k_1 A_1 \sin(\omega t + \phi) - k(A_1 - A_2) \sin(\omega t + \phi) \\ -m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -k_2 A_2 \sin(\omega t + \phi) + k(A_1 - A_2) \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (1-19)$$