新世纪高等学校教材

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

面向21世纪课程教材

北京高等教育精品教材

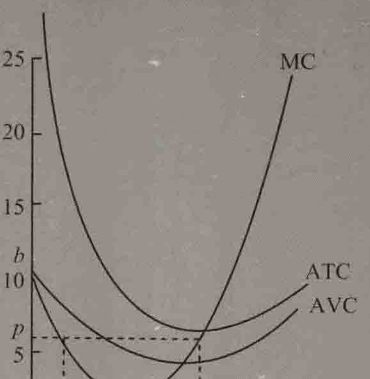
SHUXUE MOXING YU SHUXUE JIANMO

数学与应用数学基础课系列教材

数学模型与数学建模(第4版)

北京师范大学数学科学学院　主　编

刘来福　黄海洋　曾文艺　编　著



北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

面向21世纪课程教材

北京高等教育精品教材

数学与应用数学基础课系列教材

数学模型与数学建模

（第4版）

SHUXUE MOXING YU SHUXUE JIANMO

北京师范大学数学科学学院 主编

刘来福 黄海洋 曾文艺 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学模型与数学建模 / 刘来福，黄海洋，曾文艺编著．—4版．—北京：北京师范大学出版社，2014.7
新世纪高等学校教材 数学与应用数学基础课系列教材
ISBN 978-7-303-12655-2

Ⅰ．①数… Ⅱ．①刘… ②黄… ③曾… Ⅲ．①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ．O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第 022571 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：大厂回族自治县正兴印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：18.5
字　　数：330 千字
印　　数：42 001 ~ 45 000
版　　次：1997 年 9 月第 1 版
2002 年 3 月第 2 版
2009 年 2 月第 3 版
2014 年 7 月第 4 版
印　　次：2014 年 7 月第 11 次印刷
定　　价：30.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：李　菡　　责任印制：陈　涛

内容简介

数学模型是架于数学理论和实际问题之间的桥梁. 数学建模是应用数学解决实际问题的重要手段和途径. 本书是作为数学理论教学的一个补充，通过数学模型和数学建模有关问题的论述和模型实例的介绍，使读者应用数学解决实际问题的能力有所提高. 全书分三篇：第一篇阐述了数学模型和数学建模的有关问题和常用的数学模型及其组建的方法. 第二篇给出了15个模型的实例，以展示不同领域的实际问题中如何组建数学模型及其应用效果. 第三篇介绍了数学模型在相关学科或领域的基础理论研究中的应用.

本书可作为大学数学系“数学模型”课的教材、非数学专业研究生和本科生选修课的教材，也可供高等院校师生以及各类科学技术工作者参考.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院．学院现有教师84人，其中教授36人，副教授28人；有博士学位的教师占96%．特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划入选者2人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人，国家杰出青年基金获得者4人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，获德国洪堡（Humboldt）基金12人．现有全日制在校生1 168人，其中本科生770人，硕士研究生320人，博士研究生78人．

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权．1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科．1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站．1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科．1997年成为国家基础科学人才培养基金基地．1998年获数学一级学科博士学位授予权．2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体，这是我国数学界第1个创新群体，获得3期9年资助．2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台．2007年数学被评为一级学科国家重点学科．2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点．2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队．2011年获统计学一级学科博士学位授予权．2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排名第5．学院还有8个硕士点，9个教研室和《数学通报》杂志编辑部．（李仲来执笔）

2014-01-26

第 4 版前言

自从 1915 年北京高等师范学校成立数学物理部，1922 年成立数学系，2004 年成立北京师范大学数学科学学院以来，学院教师已经出版了 600 多部教材. 在这些教材中，共有 8 种/部（12 本）教材出版第 3 版，其中张禾瑞和郝鈵新教授编著的《高等代数》自 1957 年出版后，在 2007 年出版第 5 版. 这是学院教师中出版第 5 版的唯一的一种教材.

刘来福教授等编著的《数学模型与数学建模》自 1997 年出版第 1 版以来，2002 年出版的第 2 版入选面向 21 世纪课程教材，2009 年出版的第 3 版先后入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材、“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材和北京市高等教育精品教材. 这是学院教师中出版第 4 版的第 2 种教材.

俗话说，事不过三. 一种教材是否有生命力，出版版次是一个重要的指标.

2015 年，北京师范大学将迎来数学学科成立百年华诞. 在 21 世纪，学院希望：(1) 能够有更多的教材经过修订后出版第 4 版，第 5 版…… (2) 能够有更多的教师加入到教材修订中. (3) 在学院从事教学的教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材. 学院还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授（数学专业）、网络教学和在职中学教师等使用和参考.（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院
2014-01-26

第 4 版作者的话

在广大读者的欢迎和关注下，本书又过了五年有余. 国家进入了第十二个五年计划的发展建设阶段. 数学建模，在我国也经历了二十多年的发展历程，无论是作为一门课程，还是作为学术界进行科学研究的手段，甚至于社会上人们考虑问题时的思维模式都产生了巨大的影响. 在基础教育领域的中小学范围内，数学建模也成为青少年人群中流传的、耳熟能详的名词了. 这五年，随着时代的发展，科学技术的进步，数学建模这一领域也在不断地发展变化. 最突出的一个现象是数学建模与计算机的结合更加广泛和深入了. 计算机不仅仅是简单地实现数学模型数值结果的计算工具. 诸如对于复杂的优化问题的实现，大规模动态系统的仿真以及处理随机现象的蒙特卡洛模拟等问题的处理表明，如何在计算机上对复杂的实际现象进行建模和分析已经成为使用数学解决问题的一个重要的途径. 近年来我国举办的大学生数学建模竞赛所涉及的问题也清楚地反映出了这个变化的趋势. 因此在数学模型的教学工作中原有的教学模式面对的挑战是必须正视的. 在当前的数学建模的教学中简单地增加一些计算机的数学软件的使用是达不到预想的目的的. 基于此，在本书的第 4 版中删去了有关使用数学软件 MATLAB 计算数学模型结果的内容，以突出从实际问题到数学模型以及从数学模型结果到问题解决方案的分析思想和教学理念以及如何结合实际问题背景选择模型分析方式和设计算法编程，将数学建模思想融入整个问题解决过程. 至于借助计算机和数学软件

完成数学模型的推理和计算，这不是一门数学建模课程所能承担的教学任务．我们计划配合本书专门编写一本有关“数学建模实验”的书籍供读者参考．

全国大学生建模竞赛已经成为我国大学生的一项重要的课外科技活动．也是对“数学模型”课的一个重要的实习活动，它是“数学建模”课教学效果的一个很好的检验．在以前的三个版本中我们曾经将全国数学建模竞赛的部分赛题以附录的形式附在了书的最后，以便于参赛的学生参考，进一步提高“数学模型”课的教学质量．当前这些赛题可以很容易地在数学建模的官方网站 www.mcm.edu.cn 上找到．我们就不再附上了．

限于作者的水平，书中还会有诸多谬误和不妥．我们热切地希望听到读者的反馈信息，无论是批评指正，还是建议完善，我们都非常欢迎．

编著者

2013 年除夕

于北京师范大学数学科学学院

目 录

第1篇 数学模型和数学建模

数学模型和数学建模是应用数学解决实际问题过程中所遇到的重要的概念和方法．在传统的数学理论研究和教学中涉及不多．这一篇我们系统地阐述了数学模型的有关概念、特征和它的内涵，介绍了应用数学解决实际问题时经常使用的主流的数学模型以及组建这些模型的基本方法．以利于学生正确地理解数学模型不同于数学理论的思维特征，准确地把握数学模型的概念，能够针对实际问题的需求创造性地组建数学模型来解决它．从而较好地掌握数学模型这一解决实际问题的工具．

第1章 数学模型

§1.1 引言

20世纪以来，科学技术得到了飞速的发展. 数学在这个发展过程中发挥了它不可替代的作用，同时它自身也得到了空前的发展. 由于计算机的迅速发展和普及，大大增强了数学解决现实问题的手段. 数学向社会、经济和自然界各个领域的渗透，扩展了数学与实际的接触面. 数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围和方式发生了深刻的变化. 从科学技术的角度来看，不少新的分支学科出现了，特别是与数学相结合而产生的新学科如数学生物学、数学地质学、数学心理学和数学语言学等. 在当今的时代，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理”. 这是当代有识之士的一个共同的见解，也已为发达国家的历史所证实. 大量的事实表明，高技术是保持国家竞争力的关键因素. 高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学. 高技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深刻的程度上直接地相互作用，把我们的社会推进到数学工程技术的新时代. 当代社会和经济发展的一个特点就是定量化和定量思维的不断加强. 它不仅适用于科学技术工作，在经济管理工作中也日益体现出了它的重要作用. 直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误，这些都将成为精明的科技人员和经济工作者所应具备的工作素质. 因此，可以预言：数学以及数学的应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中所起的作用将越来越大，数学科学作为技术改进、经济发展以及工业竞争的推动力的重要性也将日益显现出来.

众所周知，数学最引人注目的特点是它的思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性. 这是在数学发展的漫长的历程中逐渐形成的. 它来源于人们生产和生活的需要，对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而成当今的数学. 它的出现为我们在更深的层次上认识世界提供了一条重要的途径. 它的抽象性和严谨性的特点也成为我们科学地思维和组织构造知识的一个有效的手段；而数学的广泛应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础. 但是在过去的年代由于种种原因，这个特点在人们的印象中反映得并不充分. 往往只把数学理解为训练人们科学思维的工具，致使人们常常感到学了大量的数学知识和方法但是不会用，

也用不上．当前，在数学科学与其他科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能的今天，学术界在探讨数学科学的技术基础及其对经济竞争力的作用时指出："在经济竞争中数学是不可少的，数学科学是一种关键性的、普遍的、能够实行的技术．""高技术的出现把我们的社会推进到数学技术的时代"．数学的应用特征在当今已显得更加突出和重要．

数学模型是应用数学知识和计算机解决实际问题的一种有效的重要工具．不妨看几个例子．对于十字路口的交通问题，为使路口的交通顺畅，需要设计一个路口的最佳交通流的控制方案（如是否设单行道，是否限制载重车辆通行，如何控制交通灯等）．一种办法是将几种不同的交通控制的设计方案交给交通队进行实地试验，进行观测，最后找出最优的方案．显然，这种办法不仅费时费力，而且会造成该路口和临近地区的交通混乱，根本无法执行．另一种办法是由研究人员调查路口的车流规律，收集有关的数据资料，如车流密度、车辆速度、大小、路口状况等，使用数学和统计学的手段提炼出这些量之间的关系并且使用计算机进行分析和比较，就可以找到最优的控制管理方案．这就是交通管理的数学模型．有了它我们还可以评估类似的交通流控制方案．生物医学专家掌握了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，他就可以用来分析药物的疗效，从而有效地指导临床用药．厂长和经理们掌握了他们的工厂、企业的生产与销售的数学模型，他们就可以用计算机控制生产和销售，以获取尽可能高的经济收益，增强工厂、企业的经济竞争力．

应用数学知识和计算机去解决各门学科和社会生产中的实际问题时，首先要通过对实际问题的分析、研究组建用以描述这个问题的数学模型，使用数学的理论和方法或者编程计算对模型进行分析从而得到结果，再返回去解决现实的实际问题．可见，数学模型与数学建模是应用数学理论和计算机解决实际问题的重要手段和桥梁．大量的事实表明，掌握了数学知识只是应用数学解决实际问题的必要条件，在当前实现数学作为一种技术的职能的过程中使用数学解决实际问题的技能的培养也是非常重要和必需的．这主要是数学模型的有关知识和数学建模能力的培养．这也是本书的主要目的．

§1.2　数学模型

我们经常使用模型的思想来认识世界和改造世界．这里的模型是针对原型而言的．所谓原型是指人们在社会活动和生产实践中所关心和研究的实际对象，在科技领域常常用系统或过程等术语．如机械系统、电力系统、生态系

统、交通系统、社会经济系统等；又如导弹飞行过程、化学反应过程、人口增长过程、污染扩散过程等. 模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象. 例如大家熟知的航空模型就是飞机的一个抽象. 除了机翼与机身的相对位置关系外的一切因素，包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了. 虽然它与原型的实际飞机已经相距甚远，但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪. 某城市的交通图是这个城市的一个模型. 在这个模型中城市的人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要，但图中所展示的街道和一目了然的公共交通线路是任何一个实际置身于城市中的人很难搞清楚的. 由此可见，模型来源于原型，但它不是对原型简单的模仿，它是人们为了认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华. 有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究加深对原形的理解和认识.

所谓数学模型是指通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象. 数学模型也不是对现实系统的简单的模拟，它是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具. 数学模型是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、翻译的结果. 它使用数学语言精确地表达了对象的内在特征，通过数学上的演绎推理和分析求解，使得我们能够深化对所研究的实际问题的认识. 例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\mathrm{d}^2x(t)/\mathrm{d}t^2$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，其中 $x(t)$表示运动的物体在时刻 t 的位置，m 为物体的质量，而 F 表示运动期间物体所受的外力，模型忽略了物体的形状和大小. 由于它抓住了物体受力运动的主要因素，这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作. 又如数学家欧拉在分析哥尼斯堡的七桥问题时，他把由河流分割的四块陆地抽象为四个点. 又把连接着四块陆地的七座桥抽象为连接这四个点的七条线. 于是实际问题中的陆地、河流和桥梁的景观都不见了，剩下的是一幅纯数学的，只有点和线相互连接的“图”，但是这位数学家利用这幅简单的“图”很清楚地解决了哥尼斯堡七桥的旅游回路的问题.

数学模型并不是新的事物，很久以来它就一直伴随在我们身边. 可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时，就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻画这个实际问题. 这就是数学模型. 数(整数、有理数、实数等)，几何图形，导数，积分，数学物理方程以至于广义相对论，规范场等都是非常成功的数学模型. 运筹学以及统计学的大部分内容都是关于数学模型的讨论和分析. 可以说在数学的发展进程中无时无刻不留下数学模型的印记，在数学应用的各个领域到处都可以找到数学模型的身影. 只不过在当前随着科学技术的发展，

各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下，数学模型作为数学实现其技术化职能的主要手段之一，它的作用显得愈发突出，从而受到了更加普遍的重视.

数学模型主要是使用数学知识来解决实际问题，因此数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要的基础. 没有广博的数学知识，严格的数学逻辑思维的训练是很难使用数学模型来解决实际问题的，但是数学模型本身也还具有若干不同于数学的特征，这些都是在学习和掌握数学模型过程中特别要注意的.

在实践中，能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的. 也就是说，实际问题很少直接以数学的形式出现在我们面前. 而且对于如何使用数学语言来描述所面临的实际问题也往往不是轻而易举的. 应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象并从中抽象出恰当的数学关系，也就是组建这个问题的数学模型. 这个过程就是数学建模. 与数学不同，数学模型的组建过程不仅要进行演绎推理而且还要对复杂的现实进行总结、归纳和提炼的工作，这是一个归纳总结与演绎推理相结合的过程. 可以设想，在描述人口增长时，如果把年龄、性别、健康、疾病、死亡、择偶、婚配、生育以及社会、灾害、战争等因素都容纳进去，即使用现代的数学工具恐怕也难以进行分析和研究. 因此，建模时必须要对现实问题进行去粗取精、去伪存真的归纳加工过程. 但建模时究竟保留什么因素，忽略什么因素并没有一定的范式，这要根据建模者对实际问题的理解、研究的目的及其数学背景来完成这个过程. 应该说这是一个创造性的过程. 不同的建模者针对同一个实际问题完全可以得到不同的数学模型.

数学模型的另一个重要的特点是要接受实践的检验. 因为建模的目的是要用以研究和解决原型的实际问题，而数学模型是经过简化和抽象得到的，尽管这个数学模型的组建过程中的逻辑推导准确无误，也并不意味着模型是成功的. 因为严格的推理是无法论证抽象、化简过程的准确性的，它必须要接受实践的检验. 经检验被认为是可以接受的模型才能付诸分析、使用.

数学模型是使用数学来解决实际问题的桥梁. 对它的分析和研究的过程中主要运用的是数学的理论、方法. 由于我们的目的是解决实际问题，在分析过程中应用数学理论时数学上的自然的结论不一定是研究数学模型所需要的结果. 像大家在中学数学中所遇到的应用题那样只要套用公式就能解决的问题在实际的数学模型中是很少见到的. 将分析模型所得到的数学结论回到实际中去解决问题同样需要创造性的工作，往往并非简单地套用现有的数学公式或定理

所能奏效的. 因此不能认为数学模型就是数学应用题，特别是不能认为数学模型就是套公式的问题.

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学. 作为一个成功的模型应该有较强的实际背景，最好是直接针对某个实际问题的；模型应该是经过实践检验表明是可以接受的；模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解；而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的.

§1.3 问题举例

对于初学者来说，数学模型是一个较难驾驭的课题，它的处理手法相当灵活. 要掌握数学模型最好的办法是实践，自己一个人独立地实践或几个人一组集体实践. 开始阶段不要急于尝试工业上或科学技术上复杂的建模问题，在我们身边的现实生活中就有许多值得我们思考的问题. 其中不少既简单又实用，是我们学习数学模型的好材料. 这一节所列举的例子将展现给大家实践中的数学模型是什么样子，以利于大家去发现我们身边的模型. 例题是一些极普通的问题，不需要你具备多少实际的专业背景和过多过深的数学知识和方法就可以着手去尝试. 例子中多数都可以找到另外的研究方法，这在数学模型中是不奇怪的. 就像我们在例子中将要看到的那样，也许我们会发现更巧妙的思路来改进例题所得到的结论，这都是很正常的.

例 1.3.1 包扎管道

问题 家庭中的煤气管道或暖气管道以及化工厂中大量的管道在室外的部分经常需要从外部加以包扎以便对管道加以保护. 包扎时用很长的带子缠绕在管道外部. 如何进行包扎才能使带子全部包住管道而且最节省材料?

这个问题是很实际，很生活化的，但仔细想来这个问题的提法是比较笼统、粗糙的. 因为问题没有交代管子的形状和包扎带的情况. 稍微留意你就会发现我们身边的管道形状有直的、弯的、T 形三通的、十字形四通的以及粗转细和直转横的直角型拐弯的管道等多种形式，从剖面上看有圆的、方的、长方的或多角形的. 包扎管道用的带子也没有交代清楚. 面对这样一个笼统、复杂的问题，要想直接就下手寻找一个统一的数学方法来解决它，将是十分困难的，几乎不可能. 因此必须要对所研究的问题进行分析加工，经过删繁就简，逐步的规格化，理想化，将它规范为可以使用数学工具讨论的问题.

我们需要对问题作进一步的假设. 首先我们对如下的情况进行讨论.

1. 管道为直圆管，而且粗细是一致的.