浙江省精品课程教材

浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

线性代数

王定江 主编

科学出版社

浙江省精品课程教材

浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

线 性 代 数

主 编 王定江

副主编 丁晓东 张 隽

金建国 马 青

罗和治

浙江工业大学重点教材建设项目基金资助

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据学生专业学时要求，遵循易教易学的原则安排内容体系，是浙江省精品课程建设成果之一，也是浙江工业大学重点教材建设项目，是编者们总结多年的教学经验并在大量参考国内外同类教材的基础上编写而成.

本书共七章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量的线性关系、向量空间、矩阵的相似变换和二次型，每节后配有思考题，每章后配有习题、复习题，本书最后附有习题答案. 本书一至六章内容符合工科及管理类等专业基本要求，教学约 32 学时. 加上每章附录和第七章内容，可为部分理科专业选用. 本书中带*号内容为根据课时选讲内容.

本书可供高等院校相关专业作为线性代数课程的教材使用，也可供自学者和专业人士阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王定江主编. —北京：科学出版社，2015
(浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书)
浙江省精品课程教材
ISBN 978-7-03-043068-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 013824 号

责任编辑：石 悦 / 责任校对：刘小梅
责任印制：霍 兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015 年 1 月第一次印刷 印张：12
字数：242 000

定价：23.00 元

“浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书”

编　委　会

总　　序

近年来, 关于数学的各种新观点不断出现.

有一种观点认为, 随着数学的发展, 数学已经从自然科学中分离出来, 成为独立的科学门类 —— 数学科学.

持这种观点的学者的依据是: ① 从现代数学的发展情况可以看出, 数学的许多内容和方法的产生, 不再是基于研究自然界中存在的物质运动规律的需要, 而是基于数学自身的需要. 例如, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=5+5=3+7$, 等等, 即每一个大于等于 6 的偶数都可以表示为两个奇素数的和, 这就是哥德巴赫猜想, 至今没有证明. 但是, 这样一个在数学中显得十分重要的著名的猜想, 其结果的对与否, 不会对数学之外的任何学科产生影响, 证明它不是自然科学的需要, 而仅仅是数学科学的需要. ② 数学不仅具有应用功能, 而且具有其他学科不能比拟的教育功能. 数学的应用功能表现在: 没有数学, 现代科技无从谈起; 任何一种学科, 只有应用了数学, 才能成为科学学科. 数学的教育功能表现在: 在中国, 语文、数学、英语被认为是初等教育中最重要的三门课程; 在世界范围内, 有不学中文的学生, 有不学英语的学生, 但没有不学数学的学生.

我同意这种观点, 希望在数学教学改革和科学研究中体现这种观点.

数学教学改革, 首先需要的是教材的改革, 而教材的改革, 涉及的只有两个方面: 一是内容; 二是方法.

如何在一本数学教材中以数学科学的观点选取内容、介绍方法?

我的认识是: 无论是选取内容方面, 还是介绍方法方面, 都要关注数学的应用功能和教育功能的展现.

在内容的选取方面, 既不是不管数学的教育功能, 狭隘地全部以目前生产生活的实际应用为目的, 打乱系统, 什么 “有用” 就选什么, 什么 “没用” 就跳过什么; 也不是完全从数学的需要出发, 一点也不考虑所选取的内容和实际应用的联系. 本套丛书采取有实际应用背景的内容优先选取的原则. 我们的考虑是: 没有迹象表明, 没有实际应用背景的内容在体现数学的教育功能时强于有实际应用背景的内容, 既然如此, 后者更有利于同时展现数学的应用功能和教育功能.

在方法的介绍方面, 既不完全采用公理化体系的做法, 让读者在接受严格数学训练的基础上自然地受到数学科学的熏陶; 也不完全摒弃数学特有的推理过程, 以急功近利的方式只讲结果, 只讲计算公式. 我们知道, 公理化体系的做法是将数学

的训练目的不直接说出来, 而是藏起来, 藏在严密的过程背后, 让学生不知不觉得到严格的数学训练. 这种体系在介绍内容时, 不交代前因后果, 一上来就是莫名其妙的定义、公理, 然后一步步以极其严密的方式展开讨论. 这种做法在知识门类相对少的过去是有效的, 但在知识爆炸、课程门类不断增加、学生同时要有做学问和实际应用两手准备的现在, 没有时间这样做. 训练要有, 但训练目的不是藏起来, 而是尽可能直接讲出来. 例如, 数学书籍中一定会用到归纳法、演绎法、反证法, 这些方法不是数学特有的, 但可以被数学最为有效地传授给学生, 这一事实恰好可以说明数学的教育功能的强大. 但是, 如果我们去问一下数学系的毕业生什么是演绎法, 恐怕很少有人能说周全, 究其原因, 是我们的教材没有明确地告诉学生演绎法的基本内容和过程. 本套丛书将致力于改变这种状况.

本套丛书注意到: 根据课程和授课对象的不同, 数学的应用功能和教育功能的展现需分层次, 两种功能的展现要有机配合. 例如, 有的数学分支本来就属于应用数学, 对这样的课程, 在选取内容和介绍方法时必须首先保证应用方面的需要, 其次才考虑教育功能的融入; 有的授课对象是文科学生, 对这些学生, 在编写教材时就要充分注意他们的基础、兴趣、思维方式和希望通过数学的学习要达到的目的, 因此要首先考虑数学的教育功能, 其次才考虑应用功能的融入.

现代化的标志是数字化, 也就是要在所有的领域尽最大可能地使用计算机技术, 因此, 在数学教学中, 对数字化的配合和适应是必需的. 为了展现数学的应用功能, 在数学教学的每个环节, 都应该关注计算机技术, 包括有意考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题. 我们知道, 介绍如何应用数学软件的最好环境, 当为相应的数学课程. 因此, 本套丛书中的教材, 特别注意介绍与主要内容配套的软件的应用. 例如, 介绍相应的 MATLAB 软件包的使用.

科学研究成果整理成学术著作, 可以总结和条理化研究问题, 这对于传播研究成果、深化研究工作是有利的, 这些著作还可以作为研究生教材使用.

本套丛书中学术著作的撰写遵循了如下的原则:

首先, 作为介绍学术成果的学术著作要有新内容、新观点, 学术系统应是明显的, 不是杂乱的、拼凑的, 特别是著作中作者的成果应有重要的分量.

其次, 本套丛书中的学术著作特别注意内容的系统性、完备性.

再次, 也是最重要的, 本套丛书中的学术著作和教材一样注意展现数学的应用功能和教育功能, 在必要时, 还考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题.

最后, 在写作细节上, 本套丛书要求作者以严格的科学态度对待自己的著作, 概念和符号应明确, 推导和介绍要细致, 避免突然出现翻遍全书都找不到介绍的概念和符号, 避免用显然、易知等词语掩盖困难的证明过程.

教学改革涉及的问题很多, 有些问题需要一步步解决, 有的还需要根据形势的变化调整解决方案. 我们仅做了初步的尝试, 加之水平有限, 本套丛书中的问题一定很多, 迫切希望读者批评指正.

邱继征

2013 年 3 月 8 日

前　　言

线性代数课程作为高校的一门重要基础课, 不仅起着学习近代科学技术知识的基础作用, 而且它对培养人的思维品质、逻辑推理能力和数值计算能力等方面具有更重要的作用. 线性代数的基础知识是大学生后续专业课程必需的; 线性代数的抽象逻辑性是培养大学生思维能力必备的; 线性代数解决问题的思想方法是大学生必学的; 线性代数知识的应用性是当代大学生必须培养的.

本书主要根据学生专业学时要求, 遵循易教易学的原则安排内容体系. 以线性代数中的矩阵这一重要研究对象为中心, 一方面系统讨论矩阵的基本代数运算 (第二章主要内容, 其中第一章行列式也可看作方阵取行列式运算对应的, 矩阵分块出行向量组和列向量组, 而向量组有关内容对应第四章和第五章, 第七章二次型主要对应对称矩阵), 另一方面讨论矩阵的变换 (第三章初等变换和第六章相似变换). 线性方程组作为线性代数一个重要内容, 基本贯穿线性代数内容体系, 我们根据解决线性方程组问题的方法和工具, 将其内容分散到第一章、第三章和第五章内容中, 作为这些章节所讨论内容的一些应用. 这样既解决了线性方程组的有关问题, 又降低了有关内容的抽象性. 本书每节后配有思考题, 主要帮助学生深入理解本节内容; 每章后配备的习题, 主要是留给学生做作业; 每章后的复习题, 主要是帮助学生小结、复习本章内容和期末总复习. 考虑到一些专业的课时限制, 再兼顾内容体系的严密逻辑性, 我们将有些结论的复杂证明过程放在了本章后的附录中选讲. 本书最后只给出习题的答案, 每一章习题的详细解答在本章内容讲完后放到我们的线性代数课程网站上 (http://mathzjut.oicp.net:74/xxds1).

本书作为浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书中之教材, 也是浙江省精品课程建设成果之一, 同时作为浙江工业大学重点教材建设项目, 是编者们总结多年的教学经验并在大量参考国内外同类教材的基础上编写而成的. 编写组经过多次讨论, 集体确定编写提纲, 具体编写分工如下: 张隽编写第一章, 马青编写第二章和第三章一、二节, 金建国编写第四章和第五章第一节, 丁晓东编写第六章和第五章第二节, 罗和治编写第七章, 王定江编写第三章第三节和第五章第三节, 由王定江和丁晓东完成全书统稿.

在本书编写过程中, 我们参考并吸纳了国内外众多线性代数教材的精华, 对这些参考文献的作者表示衷心感谢. 我们对浙江工业大学理学院应用数学系线性代数所有任课教师的好建议以及丛书主编邸继征、邬学军老师的大力支持表示衷心感谢, 也非常感谢浙江工业大学重点教材建设项目和浙江省应用数学重点学科对本

书的支持, 特别感谢科学出版社为本书出版作出的努力.

由于编者水平和经验所限, 书中难免存在不足和疏漏之处, 恳请关心爱护本书的广大读者批评指正, 希望将意见和好建议通过科学出版社反馈给我们, 以便我们不断改进和完善.

编　者

2014 年 5 月

目 录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中基本的运算工具之一. 本章先利用线性方程组, 引出低阶行列式的定义; 再通过排列的逆序数概念, 给出 n 阶行列式的重要定义; 随后讨论行列式的重要性质与计算方法; 最后介绍利用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则.

第一节　n 阶行列式

一、二阶与三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1.1}$$

为了消去未知数 x_2, 第一个方程和第二个方程两边分别同乘上 a_{22} 与 a_{12} 后再相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

类似地, 消去未知数 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 的解是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1.2}$$

式 (1.2) 中的分子、分母都是由四个数组成的计算式, 这些计算式的结构完全一样, 即都是两两相乘再相减, 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 由方程组 (1.1) 中的未知数的四个系数来确定. 我们不妨把这四个数按照它们在方程组 (1.1) 中的位置, 排成两行两列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \tag{1.3}$$

记
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \tag{1.4}$$
称式 (1.4) 是数表 (1.3) 所确定的**二阶行列式**, 数 $a_{ij}(i=1,\ 2; j=1,2)$ 称为行列式 (1.4) 的**元素**或**元**, 元素 a_{ij} 的第一个下标表明该元素位于第 i 行, 称为**行标**, 第二个下标表明该元素位于第 j 列, 称为**列标**. 如图 1.1 将 a_{11}, a_{22} 所组成的对角线称为**主对角线**, 这两个元素称为**主对角元**; 而 a_{12}, a_{21} 所组成的对角线称为**副对角线**. 因此, 可以用对角线法则来记忆二阶行列式的定义, 即二阶行列式是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

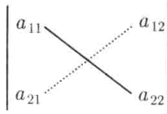

图 1.1

根据二阶行列式的定义, 式 (1.2) 中的分子也可以写成二阶行列式, 即
$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$
若记
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$
则式 (1.2) 可写成
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组 (1.1) 的未知数的系数所确定的行列式, 称为**系数行列式**. x_1 的表达式中的分子 D_1 是将系数行列式 D 中的第一列元素依次替换成常数项 b_1, b_2; x_2 的表达式中的分子 D_2 是将系数行列式 D 中的第二列元素依次替换成常数项 b_1, b_2.

2. 三元线性方程组与三阶行列式

下面我们再利用消元法来求解三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \tag{1.5}$$

类同于上述二元线性方程组, 经过稍显复杂的消元法计算, 当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时, 方程组 (1.5) 的解是

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\ x_2&=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\ x_3&=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

式 (1.6) 中分子和分母的计算式的结构完全相同, 我们利用式 (1.6) 中的分母, 给出三阶行列式的定义.

定义 1　由 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}, \tag{1.7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.8}$$

称式 (1.8) 为数表 (1.7) 所确定的**三阶行列式**.

从定义 1 可知, 三阶行列式含 6 项, 每项都是不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则: 图中三条实线上的三个元素的乘积项取正号, 三条虚线上的三个元素的乘积项取负号, 取正号的三个元素所在的实联线可以看作与主对角线平行, 取负号的三个元素所在的虚联线可以看作与副对角线平行.

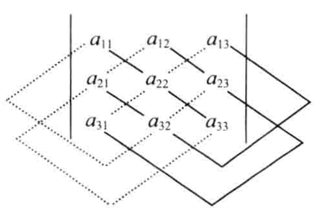

图 1.2

利用三阶行列式的定义, 将式 (1.6) 中的分子写成三阶行列式, 即

$$b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若记

$$\begin{gathered} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \end{gathered} \tag{1.9}$$

式 (1.6) 可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D, D_j\,(j=1,2,3)$ 如式 (1.9) 所示.

注意用三阶行列式表示三元方程组的解与二元方程组解的行列式的表示规律完全相同, 即分母都是由方程组的未知数的系数确定 (称系数行列式), $x_j(j=1,2,3)$ 的表达式中的分子 $D_j(j=1,2,3)$ 是将系数行列式 D 中的第 j 列元素依次替换成常数项 b_1,b_2,b_3.

例 1 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D &= 1\times 0\times 1+2\times 4\times(-1)+(-3)\times 2\times(-2) \\ &\quad -(-1)\times 0\times(-3)-(-2)\times 4\times 1-1\times 2\times 2 \\ &= 8. \end{aligned}$$