

高等学校教材

数学分析 3

北京大学数学系 廖可人 李正元 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析 3

北京大学数学系 廖可人 李正元 编

高等教育出版社·北京

内容摘要

本书是北京大学数学系编《数学分析》一书的第三册(全书共三册,另配备习题集一册)。内容包括多元函数微分学,积分学,含参变量积分及场论。微分形式与斯托克斯公式作为附录。

对多元函数微积分,本书较传统讲法有较大改变。直接讲 $m(m \geq 2)$ 元情形,将向量函数的应用贯穿于全书,加强了与线性代数的联系。本书内容丰富,理论严谨,既重视加强多元微积分的基本理论,又重视其计算能力的培养。

本书经欧阳光中副教授、董延晖教授审查,可作综合大学、师范院校数学系学生的试用教材或教学参考书。

本书于1986年出版,恰逢高等教育出版社建社60周年,甲午重印,以饷读者。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.3/廖可人,李正元编.——北京:高等教育出版社,2015.1

ISBN 978-7-04-040359-6

I. ①数… II. ①廖… ②李… III. ①数学分析—高等学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第136191号

策划编辑 李蕊	责任编辑 李蕊	封面设计 杨立新	版式设计 于婕
插图绘制 黄建英	责任校对 胡美萍	责任印制 韩刚	

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
印 张	13.75	版 次	2015年1月第1版
字 数	350千字	印 次	2015年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	28.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 40359-00

出版说明

1954年5月,高等教育出版社正式成立。60年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革的成果代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革的发展趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中,西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助,胡乃冈、徐刚编审提供了部分资料和样书,王雒老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计,使得这套教材不仅保持了原有的风貌,更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中,我们克服了重重困难,本着古建筑修复中“整旧如旧”的原则,尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了,我们仍然保留了这些部分,以求保持经典教材的原汁原味,仅做了规范方面的微小改动。重温经典,不仅让老专家、老前辈们抚今追昔,也让我们倍感自豪和使命感,我们还会进一步增加重版的品种,奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成,虽竭尽全力,疏漏之处在所难免,恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014年4月

前 言

北京大学数学系编的《数学分析》分三册出版。第一册由方企勤副教授编写,第二册由沈燮昌教授编写,本书是第三册,内容包括多元函数的微分学和积分学,还有含参变量的积分。

本书是我们在北京大学数学系多年讲授《数学分析》课的基础上编写成的。我们力图使本书在微积分教学现代化方面有较充分而恰当的体现,使它既适应于现代科学技术和数学发展的需要,又切合我国的实际教学情况。

本套《数学分析》教材仍按原来的传统,先讲一元函数微积分学(第一册和第二册),然后再讲多元函数微积分学,由浅入深,便于学生掌握。但是,对于多元函数,我们没有按过去的习惯讲法,从二元、三元讲起,再过渡到 $m(m \geq 4)$ 元,而是直接讲 $m(m \geq 2)$ 元。不仅多元微分学是这样,多元积分学也是这样。实践证明,只要对 $m(m \geq 2)$ 维欧氏空间的完备性,空间中点集的列紧性、紧致性和连通性等性质作了比较深入的阐述,使学生对 $m(m \geq 2)$ 维与一维欧氏空间之间的异同有一个比较清楚的认识,直接讲 $m(m \geq 2)$ 元是可行的。这不仅节省了教学时间,更重要的是适应于发展的前景,使读者更容易从欧氏空间过渡到度量空间以及更一般的拓扑空间中去。

本书对向量函数极为重视,不仅增加了这方面的内容,而且将其应用贯穿于全书之中。在向量函数微分学这一章(第十七章)里,用线性变换定义向量函数的导数,这是古典微积分中导数概念

的深化和发展,有利于学生掌握导数概念的实质和应用。在此基础上,我们用压缩映射原理证明反函数的存在和可微定理,并由此推出隐函数的存在和可微定理。显然,这一部分内容相对来说较为抽象,不够直观,难度稍大一些,初学者不容易掌握。为此,在讲授这些内容之前,在第十六章里先讲了多元数值函数的微分学,还用几何直观较强的方法证明了由一个方程式确定的隐函数存在和可微定理,为学生学习向量函数微分学铺设阶梯和桥梁,循序渐进,逐步提高到预定的理论高度。这样做,免不了有一些重复,但这不是简单重复,而是螺旋式地上升。

在重积分这一章(第二十章)里,我们简要地介绍了若尔当测度及其主要性质。我们所以要增加这一部分的内容,一方面是由于我们直接讲 $m(m \geq 2)$ 重积分,若尔当测度是不可少的;另一方面也是由于若尔当测度本身有许多可取之处。若尔当测度是各种测度中最简单而直观的一种,容易为初学者接受和掌握。应用若尔当测度,可以明确给出重积分中许多定理成立的条件,并简化定理的证明。先在分析课中讲若尔当测度,在实变函数等后续课程再讲勒贝格测度和抽象测度,学生就有可能对各种测度之间进行分析对比,加深对测度概念实质的认识,了解各种积分之间差异的由来。

对于 $m(m \geq 2)$ 重积分的变量替换公式,我们给出了公式成立的两个充分条件,并给予严格的证明。这两个定理的证明是在向量函数微分学的基础上进行的。我们先介绍正则变换及其性质,然后证明在最简单的正则变换下重积分的变量替换公式成立,再利用一般的正则变换可以局部地分解为最简单的正则变换的复合来证明一般的变量替换公式。这样做,一方面通过运用可以巩固和加强向量函数微分学的基础;另一方面可以明确认识作变量替换时要满足的条件,灵活而又准确地运用公式计算 m 重积分。显然,如果在讲授这两个变量替换定理之前,先介绍单位分解这一近代分析的重要概念,利用单位分解定理来证明这两个定理,不仅可

以简化这两个定理的证明,而且更接近于流形上的积分的处理方法,只是考虑到教学大纲的要求和学时的限制,我们没有这样做。

按照教学大纲的要求,我们不讲流形及流形上的微积分,仍按传统,只讲 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线积分和曲面积分,但是场论在数学分析课中是十分重要的内容,需要加强。我们在从物理意义引进场论的散度和旋度概念时作了比较深入细致的分析。为了突出高斯公式和斯托克斯公式的物理意义,这两个公式都放在场论中讲授,都是先从直观引出,再作严格的证明。考虑到 $\mathbf{R}^2$ 中格林公式的证明是比较典型的,这一公式又是斯托克斯公式证明的基础,我们在曲线积分这一章里(第二十一章)先讲这一公式,让学生预先熟悉这一公式的证明和应用。

本书在加强多元微积分理论的同时,对多元微积分的计算也给予高度的重视,选取了一定数量的例题,细致分析解题的典型方法和技巧作为示范。

考虑到有一些不学流形上的微积分的读者阅读近代文献资料的需要,我们特编写了“微分形式与斯托克斯公式”作为附录。

使用本书进行教学时,可以根据学时和学生的水平灵活掌握要求,根据实际情况对内容进行删节和改变讲法。例如,凡是有*的章节可以略去;对于隐函数存在定理的证明,可以重点讲用一个式子确定的隐函数;对于重积分变量替换定理,可以只讲二重积分替换公式的证明;对于重积分的计算,只限于二、三重积分,等等。

本书的初稿,第十五章至第十九章由李正元编写,第二十章至第二十三章由廖可人编写。附录的初稿由方企勤提供,廖可人改编和补充。

方企勤副教授除了提供附录的初稿之外,还对本书正文作过修改,沈燮昌教授具体负责本套书编写的组织和审定工作,对本书提过不少宝贵意见,欧阳光中副教授和董延闾教授在审阅本书时也提出许多宝贵意见,高等教育出版社的责任编辑文小西同志为

本书的出版做了许多深入细致的工作。我们在此谨向他们致以衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中难免有不妥或错误之处,敬请读者赐教指正。

编 者

1985 年 9 月

于北京大学数学系

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第十五章 欧氏空间与多元函数	1
§ 1 m 维欧氏空间	1
§ 2 欧氏空间中的点集	6
§ 3 m 维欧氏空间的性质	15
§ 4 多元向量函数	19
§ 5 多元函数的极限	26
§ 6 多元函数的连续性	35
第十六章 多元数值函数的微分学	41
§ 1 偏导数	41
§ 2 全微分与可微性	47
§ 3 复合函数的偏导数与可微性	59
§ 4 方向导数	65
§ 5 高阶偏导数和高阶全微分	71
§ 6 泰勒公式	85
§ 7 由一个方程式确定的隐函数及其微分法	89
第十七章 多元向量函数微分学	97
§ 1 线性变换	97
§ 2 向量函数的可微性与导数	100
§ 3 反函数及其微分法	112
§ 4 由方程组确定的隐函数及其微分法	121
§ 5 函数相关性	127

第十八章 多元函数微分学的应用——几何应用与

极值问题	133
------------	-----

§ 1 曲线的表示法和它的切线	133
§ 2 空间曲面的表示法和它的切平面	137
§ 3 简单极值问题	143
§ 4 条件极值问题	151
§ 5 最小二乘法	157

第十九章 含参变量的积分

§ 1 含参变量的定积分	162
§ 2 极限函数的性质	167
§ 3 含参变量的反常积分	172
§ 4 计算含参变量积分的几个例子	180
§ 5 欧拉积分——B 函数与 Γ 函数	185

第二十章 重积分

§ 1 引言	195
§ 2 $\mathbf{R}^m$ 空间图形的若尔当测度	198
§ 3 在 $\mathbf{R}^m$ 上的黎曼积分	204
§ 4 化重积分为累次积分	215
§ 5 重积分的变量替换	232
§ 6 重积分的变量替换(续)	253
§ 7 重积分在力学上的应用	266

第二十一章 曲线积分

§ 1 与曲线有关的一些概念	274
§ 2 第一型曲线积分	278
§ 3 第二型曲线积分	284
§ 4 平面上的第二型曲线积分与格林公式	296

第二十二章 曲面积分

§ 1 曲面概念	313
§ 2 曲面的面积	315

§ 3 第一型曲面积分	323
§ 4 曲面的侧	329
§ 5 第二型曲面积分	334
第二十三章 场论	343
§ 1 场的表示法	343
§ 2 向量场的通量、散度和高斯公式	346
§ 3 向量场的环量和旋度	361
§ 4 保守场与势函数	375
附录 微分形式与斯托克斯公式	393
§ 1 反对称的 k 重线性函数	393
§ 2 k 次微分形式、外微分	398
§ 3 微分形式的变量替换	405
§ 4 流形与流形上的积分	409
§ 5 高斯定理	415
§ 6 斯托克斯公式	421

第十五章

欧氏空间与多元函数

至今我们只讨论过一元函数 $y=f(x)$, 就是说函数关系中只包含一个自变量和一个因变量. 在客观世界中, 事物的变化是复杂的, 是由各方面的因素决定的, 只是在某些特定情况下不需要考虑多种事物和多种因素的联系, 而只注意一个事物和某一因素的联系. 这时, 事物的运动和变化规律才可表示成一元函数. 但在实际中, 我们经常要考虑多种事物与多种因素的联系, 因此有必要把函数概念从一个自变量与一个因变量的情形推广到多个自变量与多个因变量的情形, 这就是多元函数.

从这章起我们开始讨论多元函数. 多元函数的定义域与值域是欧氏空间中的点集, 为了讨论多元函数, 我们必须先了解欧氏空间的基本概念与性质.

§ 1 m 维欧氏空间

1.1 m 维向量空间

m 个有顺序的实数组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 称为一个 m 维点, 记作

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \text{ 或 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

m 维点的全体构成的集合称为 m 维点空间, 简称为 m 维空间.

m 维空间中的一个点又可称为一个 m 维向量, $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 称为向量 $\mathbf{x}$ 的分量. 对 m 维向量的全体组成的集合可以引进加法和数量乘法而成为 m 维线性空间, 称为 m 维向量空间, 记作 $\mathbf{R}^m$.

为了矩阵运算方便, 我们用一列 m 行矩阵表示 m 维向量, 即

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

例如, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times m$ 矩阵, 则

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

以后我们常常用一个字母表示 m 维向量, 而相应的带下标的字母表示它的分量. 如

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

有时我们也用带一个下标的字母表示 m 维向量, 那么相应的带两个下标的字母就表示它的分量. 如

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,m} \end{pmatrix}.$$

也可以用不同的字母表示向量的分量. 如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

如果我们只是称呼一个向量而又必须指明它的分量时,常常将它横写为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m),$$

这样在书写上就省了很多篇幅.

元素 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, 一方面 $\mathbf{x}$ 可以看作是以 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为分量的向量, 另一方面 $\mathbf{x}$ 又可以看作是以 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为坐标的点.

$\mathbf{R}^m$ 空间中常用的一组基是

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \\ \mathbf{e}_m &= (0, \cdots, 0, 1). \end{aligned}$$

即 $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^m$, 它仅第 i 个分量为 1, 其余分量均为零. 任意 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ 可表示为 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{e}_i$.

我们用 $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 中的零向量.

1.2 m 维欧氏空间

在 $\mathbf{R}^m$ 中可以引进向量的内积.

定义 1 对于 $\mathbf{R}^m$ 中的任意两个向量

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m),$$

我们称 $\sum_{i=1}^m x_i y_i$ 为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积, 记为 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 或 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

由定义知, 上述定义的内积有以下基本性质:

$$1^\circ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x});$$

$$2^\circ (\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y});$$

$$3^\circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z});$$

$$4^\circ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \text{ 的充要条件是 } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

内积的其他性质可由它们推出.

由内积的定义,可得重要不等式(柯西不等式)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \quad (1)$$

事实上,因

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0,$$

其判别式非正:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0.$$

若在 m 维向量空间中又定义了内积,则称这空间为 m 维欧氏空间,仍记为 $\mathbf{R}^m$.

有了内积还可引进向量的长度与角度.

定义 2 对于任意 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, 称

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 $\mathbf{x}$ 的范数(长度).

易知,上述范数满足:

- 1° $|\mathbf{x}| \geq 0$, $|\mathbf{x}| = 0$ 的充要条件是 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- 2° $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| |\mathbf{x}|$, α 为任意实数;
- 3° 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

证明 3°. 由范数的定义及柯西不等式得

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \end{aligned}$$

于是 $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

引进范数后柯西不等式(1)可表示为

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|,$$

于是 $\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \leq 1$. 我们定义