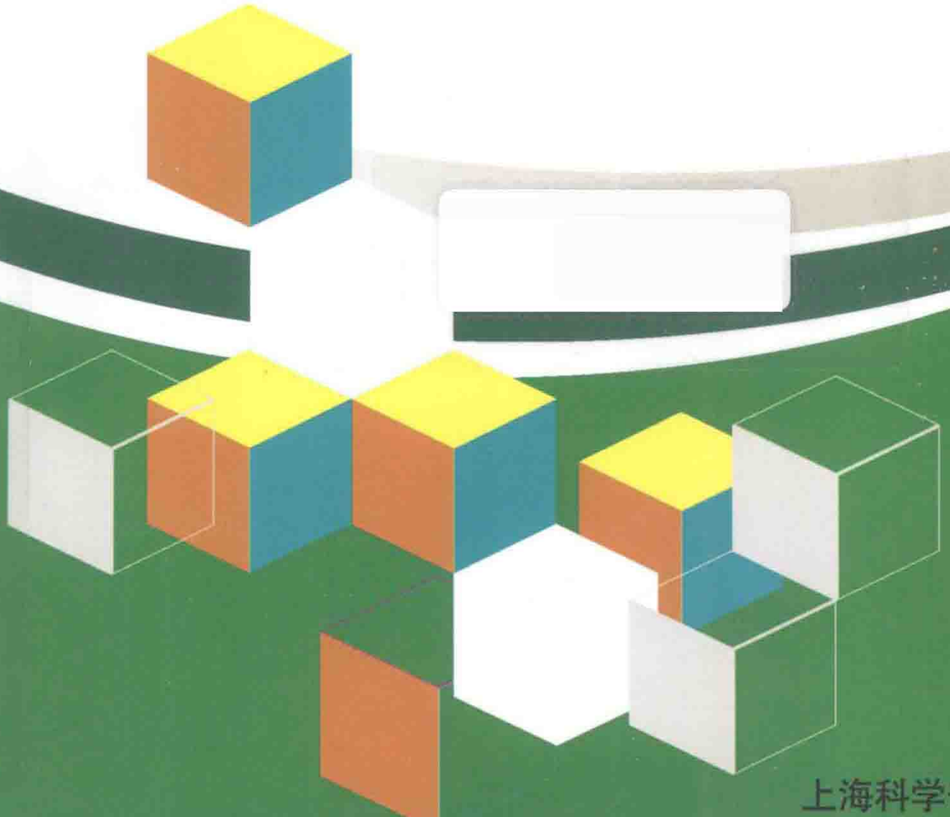
智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

三角函数



上海科学普及出版社

智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

三角函数

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题精编. 三角函数/李正兴著. —上海：
上海科学普及出版社，2014.8

ISBN 978-7-5427-6168-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教
学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 147132 号

责任编辑 张建青

高中数学专题精编
三角函数
李正兴 著
上海科学普及出版社出版发行
（上海中山北路 832 号 邮政编码 200070）
http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 上海叶大印务发展有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 18 字数 438 000
2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-6168-2 定价：33.00 元

序

300余万字的《高中数学专题精编》丛书，由昂立智立方中学生教育研究院院长卢影精心策划，经历了我整整两年的笔耕，终于如愿完成并付梓在即. 这是我退休之后完成的第六套数学教育专著，也是我15年来出版的所有数学教育专著中篇幅最长、花费工夫最大、写作时间最长的一套.

《高中数学专题精编》分为8册，根据课程标准以及近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲、注重思维、立足各版教材，目标是在专题上有所突破，在夯实基础的同时，全面提升学生的能力和素质. 它涵盖了高中数学的所有知识板块，并以知识板块为分册依据，每个分册针对一至两个板块，满足学生在这些知识点上的学习需求. 而在谋篇布局上，既考虑了高一、高二学生新授知识的需要，又考虑到高三学生迎考冲刺的需求，每个分册都由基础篇和拓展提高篇组成，力求层次清楚、坡度平稳，基础一般的学生和优秀学生都能使用.

一、基础篇中章与章之间、讲与讲之间环环相扣. 每讲从“知识储备”、“双基回眸”、“例题精讲”、“易错警示”、“链接高考”、“专项训练”等六个方面实施“推进式”辅导，每章最后给出若干份阶段检测卷来对整章知识进行全面考核.

1. “知识储备”：重要知识点一览无余，从而达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标. 你想要完整地夯实数学基础，你想在数学高考中获得高分，对知识点的整理归纳是必不可少的重要步骤.

2. “双基回眸”：复习过程中的“热身”，通过3～5题紧扣本讲知识的基础小题，巩固“通识”，掌握“通法”，带给高中学生攻克数学堡垒的灵感.

3. “例题精讲”：针对每讲应掌握的知识点，给出若干紧扣考纲、能呈现基础知识和解题通法的典型例题，并给出“策略点击”与详细的解法步骤. 例题的涉及面广，题型多样，通过一题多解的方式，倡导多角度、多维度地分析问题、突破难点，引导学生拓展思维、循序渐进、由此及彼、逐步深入，进而能举一反三，掌握若干解题方法.

4. “易错警示”：帮助学生寻找易错点，进行查漏补缺. 对大多数学生而言，在数学学习过程中常有一个瓶颈存在，就是在每次测试中低级错误不断，问题出在对知识点以及解题通法不能做到“了然于胸”. 解决这一问题，是短时间内提高成绩的有效途径.

5. “链接高考”：高中阶段的数学学习完成后，大多数学生总是要参加数学高考的，所以在高一、高二阶段的数学学习过程中，渗透高考的要求是必需的. 这里所选的例题通常是经历时间洗礼或近年来在高考(或自主招生考试)中出现的具有创新精神的精彩好题，这些例题典型性强，能启迪思维，揭示规律性. 同时，对近年来高考命题的走向进行科学分析，展示解题过程中的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.

6. “专项训练”：每讲至少给出一份专项训练卷(重点专项给出A、B两份甚至A、B、C三份专项训练卷)，题型新而全，基础题、中档题、难题合理布局，并大多给出详解. 通过专项

训练可以激发学生的潜能,进一步深入理解和掌握相关知识点,提高解题的能力和技巧.

二、拓展提高篇所讲的是体现能力要求的重点专题,充满了知识的交汇、方法与技巧的展示、数学思想的顿悟,是高考中常出压轴题之所在,也是名牌大学自主招生的"主打板块".所选例题大多是近年来出现的一些极其典型的试题,浓缩了一种纯粹的高考精华,体现了一种全新的备考理念,既是基本方法的科学总结,又是决战千里的锦囊妙计.剑指难点,迎战不慌!

本人从事高中数学教育工作30余年,退休至今一直沉潜在这一领域也已有7年,我认为一名优秀的高中数学教师对教学过程应当有通盘考虑,对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控.如对每一节课如何引入和展开,知识层面上如何发散,如何抓住学生的注意力,如何激发学生的兴趣,课后如何精选习题和巩固练习,如何进行检测反馈,都要作出独具匠心的安排.我崇尚戏剧式的数学教学,追求完美的有节奏感的深入推进,上每堂专题课都如同导演一场舞台剧,序幕、情节展开、高潮、升华、思考,一环紧扣一环,引领学生走向成功.

胡适有言:"成功不必在我,功力必不唐捐".在丛书完稿之时,填词一首,是生命的感受,不吐不快.

金　缕　曲

数苑四十载,在教坛,华发染鬓,才情尽送.
叹高次方程无解,世事原来不公.
难将息,灵泉源涌,五色尚存生花笔,向人间,纸墨相吟弄.
夜深沉,海上风.
青春岁月消踪,想当年,意气勃发,今已成空.
一曲清歌浦江畔,汗牛也要充栋.
君不见,江湖澒洞.
得失无关文章事,勤耕耘.
莘莘学子有用,脚乃健,心犹雄.

每当我想起钱锺书先生的诗句:"睡乡分境隔山川,枕坼槐安各一天,那得五丁开路手,为余凿梦两通连",更激励我无怨无悔地做学生们的"开路手",为具有梦想的学生们写作,他们的受益是我的快乐.我不会在喧闹的人世间迷失方向,我找到了最适合我的天性的生活,对我而言是理想的生活.感谢我的妻子杨惠芬,没有她的支持,我的2 000余万字、35部专著是不可能写出来的,亲情使我获得生命的享受,我坚信,大自然提供的只是素材,唯有亲情才能把素材创造成完美的作品,我获得的任何细小的成功都有她的陪伴,这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福.我还要感谢昂立智立方中学生教育研究院高中数学教研组长李璐璐老师帮我校对了一部分书稿,责任编辑张建青先生8年来为出版我的书所付出的辛勤劳动.

限于本人水平,书中难免存在的疏漏之处,欢迎读者批评指正.

李正兴

2014年夏于海上述而斋

目　　录

基　础　篇

（每讲配有专项训练）

拓 展 提 高 篇

基 础 篇

JICHUPIAN

第一章　三　角　比

第一讲　任意角及其度量

一、知识储备

1. 角的概念：角可以看作是一条射线绕其端点在平面内旋转而成的. 射线的端点叫做角的顶点，旋转的初始位置称为角的始边，终止位置称为角的终边.

2. 角的分类

(1) 正角：接逆时针方向旋转的角称为正角.

(2) 负角：按顺时针方向旋转的角称为负角.

(3) 零角：当射线没有作任何旋转时，形成的角称为零角.

(4) 终边相同的角：与角 α 终边相同角 β 可表示为 $\beta = 2k\pi + \alpha\ (k \in \mathbf{Z})$ 或 $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha\ (k \in \mathbf{Z})$.

(5) 轴线角、象限角

终边在 x 轴上的角的集合：$\{\alpha \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$；

终边在 y 轴上的角的集合：$\left\{\alpha \middle| \alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$；

终边在第一象限的角的集合：$\left\{\alpha \middle| 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$，其余类推；

终边在第二、四象限的角的集合：$\left\{\alpha \middle| k\pi + \dfrac{\pi}{2} < \alpha < k\pi + \pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$，其余类推；

终边在直线 $y = x$ 上的角的集合：$\left\{\alpha \middle| \alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(6) 终边对称的角

β 的终边与 α 的终边关于 x 轴对称$\Leftrightarrow \beta = -\alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$；

β 的终边与 α 的终边关于 y 轴对称$\Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$；

β 的终边与 α 的终边关于原点对称$\Leftrightarrow \beta = \pi + \alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$；

β 的终边与 α 的终边关于角 θ 的终边对称$\Leftrightarrow \beta = 2\theta - \alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

3. 角的度量

(1) 角度制：周角的 $\dfrac{1}{360}$ 叫做 1 度的角，记作 1°，用“度”作为单位来度量角的制度称为角度制. 角度制是 60 进位制，$1^\circ = 60'$，$1' = 60''$.

(2) 弧度制：等于半径的弧长所对的圆心角的大小称为 1 弧度的角，用“弧度”来度量角的制度称为弧度制，弧度数公式：$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$.

(3) 角度与弧度互化：$180^\circ=\pi$ 弧度；1 弧度 $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.3^\circ$，$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度.

(4) 弧长公式：$l=|\alpha|r=\dfrac{n\pi r}{180}$，扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2=\dfrac{n\pi r^2}{360}$.

二、双基回眸

1. 若角 α 与角 $x+45^\circ$ 具有同一条终边，角 β 与角 $x-45^\circ$ 具有同一条终边，则 α 与 β 之间的关系为________.

2. 若角 α 和 β 有关系 $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot 180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$，则角 α 和 β 的终边关于(　　).

   A. x 轴对称　　　B. y 轴对称

   C. 直线 $y=x$ 对称　　　D. 直线 $y=-x$ 对称

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中在 $-360^\circ\sim720^\circ$ 间的角写出来：

   (1) 60°；(2) -21°；(3) $363^\circ14'$.

4. 下列结论是否正确？

   (1) 第二象限的角大于第一象限的角；

   (2) 第一象限的角都是正角；

   (3) 锐角都是第一象限的角；

   (4) 相等的角终边相同，终边相同的角不一定相等.

5. 已知角 x 是第二象限的角，试确定 $2x$，$\dfrac{x}{2}$ 的终边所在的位置.

解法导析：1. α 的集合为 $\{\alpha\mid\alpha=m\cdot360^\circ+x+45^\circ,\ m\in\mathbf{Z}\}$，

β 的集合为 $\{\beta\mid\beta=n\cdot360^\circ+x-45^\circ,\ n\in\mathbf{Z}\}$，

$\alpha-\beta=(m-n)\cdot360^\circ+90^\circ$，由于 $m-n\in\mathbf{Z}$，可设 $m-n=k$，则 $\alpha-\beta=k\cdot360^\circ+90^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$.

2. $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ+180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$，$\alpha$ 和 β 的终边关于 y 轴对称，故选 B.

3. (1) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+60^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中在 $-360^\circ\sim720^\circ$ 间的角是：

$$-1\times360^\circ+60^\circ=-300^\circ,\ 0\times360^\circ+60^\circ=60^\circ,\ 1\times360^\circ+60^\circ=420^\circ.$$

(2) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ-21^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中在 $-360^\circ\sim720^\circ$ 间的角是：

$$0\times360^\circ-21^\circ=-21^\circ,\ 1\times360^\circ-21^\circ=339^\circ,\ 2\times360^\circ-21^\circ=699^\circ.$$

(3) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+363^\circ14',\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中在 $-360^\circ\sim720^\circ$ 间的角是：

$$-2\times360^\circ+363^\circ14'=-356^\circ46',\ -1\times360^\circ+363^\circ14'=3^\circ14',$$
$$0\times360^\circ+363^\circ14'=363^\circ14'.$$

4. 判断命题真假. 若命题为假，要举出反例；若命题为真，要予以合理的说明.

(1) 错. 反例：95°的角是第二象限的角，365°的角是第一象限的角，$95^\circ < 365^\circ$.

(2) 错. 反例：-275° 的角是第一象限的角，它不是正角.

(3) 正确. 锐角 α 的范围是$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，它的终边都在第一象限.

(4) 正确. 例如，$\alpha=\beta$，角 α，β 的终边相同；5°，365° 的角，它们的终边相同，但 $5^\circ \neq 365^\circ$.

5. 写出满足条件的 x 完整的不等式形式，解出关于 $2x$，$\dfrac{x}{2}$的不等式，根据所得的不等式从代数和几何意义两个角度去理解终边所在的位置.

$\because$ x 是第二象限的角，$\therefore$ $k\cdot 360^\circ+90^\circ<x<k\cdot 360^\circ+180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.　①

$\therefore$ $2k\cdot 360^\circ+180^\circ<2x<2k\cdot 360^\circ+360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ $2x$ 的终边在第三、四象限或在 y 轴的非正半轴上.

由 ① 得　　　$k\cdot 180^\circ+45^\circ<\dfrac{x}{2}<k\cdot 180^\circ+90^\circ$，　②

$\therefore$ 当 k 为偶数时，令 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$，式 ② 可写成

$$n\cdot 360^\circ+45^\circ<\frac{x}{2}<n\cdot 360^\circ+90^\circ,\ n\in\mathbf{Z},\text{即}\frac{x}{2}\text{是第一象限的角；}$$

当 k 为奇数时，令 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$，式 ② 可写成

$$n\cdot 360^\circ+225^\circ<\frac{x}{2}<n\cdot 360^\circ+270^\circ,\ n\in\mathbf{Z},\text{即}\frac{x}{2}\text{是第三象限的角.}$$

$\therefore$ $\dfrac{x}{2}$ 的终边在第一、三象限.

三、例题精讲

例 1　如图所示，分别写出顶点在原点，始边重合于 x 轴的正半轴，终边落在阴影内（包括边界）的角 α 的集合.

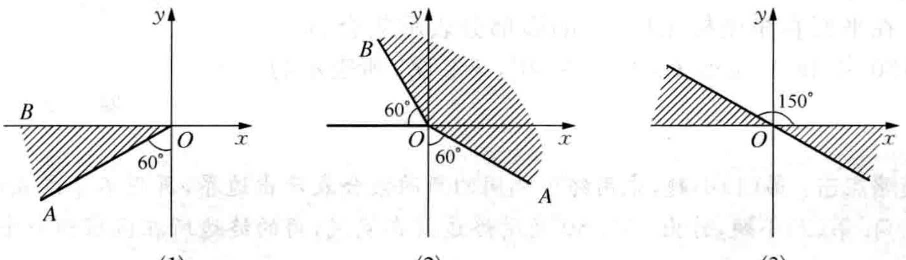


图 1－1

策略点击：“扇形”区域的周期为 360°，即每旋转一周恰好一次覆盖该区域；而“对角形”区域的周期为 180°，即每旋转一周恰好两次覆盖该区域.

解：(1) 图中以 OB 为终边的角可表示为$k\cdot 360^\circ+180^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，因为让 OB 经过阴影

区域并按逆时针方向旋转 30° 后便与 OA 重合，所以，以 OA 为终边的角为 $k\cdot360^\circ+210^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，故终边落在阴影区域内的角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ+180^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+210^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 图中以 OA 为终边的角可表示为 $k\cdot360^\circ-30^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，因为让 OB 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 150° 得 OB，所以以 OB 为终边的角为 $k\cdot360^\circ+120^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，故终边落在阴影区域内的角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ-30^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+120^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 180° 而得到的，故终边落在阴影区域内的角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot180^\circ+150^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot180^\circ+180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

例 2 (1) 已知 α 是小于 180° 的正角，如果角 7α 的终边与角 α 的终边重合，试求 α 的值；

(2) 写出 $y=\pm x\ (x\geqslant0)$ 所夹区域内的角的集合.

策略点击：所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内可构成一个集合 $\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\}$. 即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成 α 和整个周角的和.

解：(1) $\because$ 角 7α 的终边与角 α 的终边重合，$\therefore 7\alpha=k\cdot360^\circ+\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$，
即 $\alpha=k\cdot60^\circ$，又 $\because 0<\alpha<180^\circ$，$\therefore 0<k<3$，而 $k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \alpha=60^\circ$ 或 120°.
(2) 当角 α 终边落在 $y=x\ (x\geqslant0)$ 上时，角的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360^\circ+45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\};$$

当角 α 终边落在 $y=-x\ (x\geqslant0)$ 上时，角的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360^\circ-45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

$\therefore$ 按逆时针方向转有集合：

$$\{\alpha\mid k\cdot360^\circ-45^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

例 3 (1) 如图 1－2 所示，写出终边落在阴影部分的角的集合，并指出 $-950^\circ12'$ 是否是该集合中的角；

(2) 在平面直角坐标系中，用阴影部分表示集合 $A=\{\alpha\mid k\cdot180^\circ+45^\circ<\alpha\leqslant k\cdot180^\circ+60^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 所表示的区域.

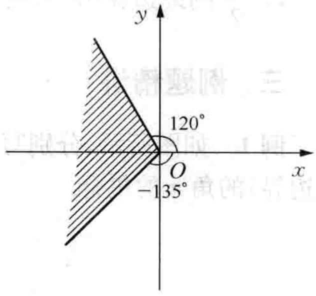


图 1－2

策略点击：第(1)小题，先用终边相同的角的集合表示出边界，再用不等式表示出所求区域角. 第(2)小题，作出 45°，60° 角的终边所在直线，角的终边所在区域为一个“对顶角形”.

解：(1) 225° 角的终边与 -135° 角的终边相同，
$\therefore$ 阴影部分角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ+120^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+225^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
$\because -950^\circ12'=-3\times360^\circ+129^\circ48'$，$120^\circ<129^\circ48'<225^\circ$，
$\therefore -950^\circ12'$ 是该集合中的角.

（2）作出 45° 角的终边所在直线（画虚线），作出 60° 角的终边所在直线（画实线），则集合 A 的表示区域为如图 1－3 所示的阴影部分.

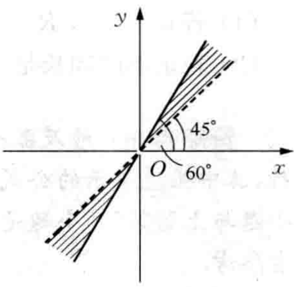


图 1－3

例 4　（1）已知圆上的一段弧的弧长等于该圆内接正三角形的边长，求这段弧所对圆周角的弧度数；

（2）已知扇形的周长为 6 cm，面积为 2 cm^2，求扇形中心角的弧度数；

（3）已知扇形的周长为 16 cm，试求其面积的最大值.

策略点击： 第(1)小题，先求圆的半径为 R，它在求解中起一个桥梁的作用，这是“设而不求”策略的一种体现，事实上，本题中的圆半径 R 可以是任意的，也是无法求出具体数值的.

第(2)小题，中心角的弧度数由弧长和半径确定，设出弧长 l 和半径 R，根据周长和面积公式列出方程，运用方程的思想确定 l、R 是求解本题的关键.

第(3)小题，要求扇形面积的最大值，先建立面积的目标函数，然后研究该函数的最值，这种方法体现了函数思想，它也是研究最值问题的基本方法，在本题中，应注意自变量的合理选择，若以扇形的半径 R 为自变量，则面积 S 是 R 的二次函数，易于求解. 若以扇形的中心角 α 为自变量，则面积 S 是 α 的分式函数，较难求解.

解：（1）设圆的半径为 R，其内接正三角形的边长为 a，则 $a=\sqrt{3}R$，

所以，这段弧所对的圆心角为 $\theta=\dfrac{a}{R}=\sqrt{3}$.

从而该弧所对圆周角的弧度数为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）设扇形所在的圆弧的长为 l，所在圆的半径为 R.

由题意得 $\begin{cases} l+2R=6, \\ \dfrac{1}{2}lR=2, \end{cases}$ 消去 l 得 $R^2-3R+2=0$，解得 $R=1$ 或 $R=2$.

当 $R=1$ 时，$l=4$，圆心角 $\alpha=\dfrac{l}{R}=4$（弧度）；

当 $R=2$ 时，$l=2$，圆心角 $\alpha=\dfrac{l}{R}=1$（弧度）.

故扇形的圆心角为 1 弧度或 4 弧度.

（3）设扇形的圆心角为 α，半径为 R，面积为 S，弧长为 l，

因 $l=\alpha\cdot R$，故由周长为 16，知 $2R+\alpha R=16$，即 $\alpha R=16-2R$，

由 $S=\dfrac{1}{2}R\cdot R\alpha=\dfrac{1}{2}R(16-2R)=-R^2+8R=-(R-4)^2+16$，

知 $R=4$，即 $\alpha=2$ 时，面积取最大值为 16 cm^2.

例 5　已知一扇形的圆心角是 α，所在圆的半径是 R.

(1) 若 $\alpha=60^\circ$，$R=10\text{ cm}$，求扇形的弧长及该弧所在弓形的面积；

(2) 若扇形的周长是一定值 $c\ (c>0)$，当 α 为多少弧度时，该扇形有最大面积？

策略点击：涉及弧长和扇形面积的计算时，可用的公式有角度表示和弧度表示两种，其中弧度表示的公式结构简单、易记，在使用前，应将圆心角用弧度表示，本题第(2)小题与上题第(3)小题是同一类型的问题，扇形的周长用字母 c 表示，介绍多种解法供读者参考.

解：(1) 设弧长为 l，弓形面积为 $S_{弓}$，

$\because\ \alpha=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$，$R=10\text{ cm}$，$\therefore\ l=\dfrac{10\pi}{3}\text{cm}$.

$\therefore\ S_{弓}=S_{扇}-S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10\pi}{3}\times 10-\dfrac{1}{2}\times 10^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=50\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(\text{cm}^2)$.

(2) 设扇形弧长为 l，半径为 x，扇形面积为 S，圆心角为 α.

则$\begin{cases}l+2x=c,\\ S=\dfrac{1}{2}lx.\end{cases}$

解法一：将 $l=c-2x$ 代入 $S=\dfrac{1}{2}lx$，

得 $S=\dfrac{1}{2}(c-2x)x=-x^2+\dfrac{1}{2}cx=-\left(x-\dfrac{c}{4}\right)^2+\dfrac{c^2}{16}$.

$\because\ 0<x<\dfrac{c}{2}$，$\therefore$ 当 $x=\dfrac{c}{4}$ 时，面积 S 最大值为$\dfrac{c^2}{16}$.

此时 $l=c-2x=c-2\times\dfrac{c}{4}=\dfrac{c}{2}$，$\therefore\ \alpha=\dfrac{l}{x}=2$ 弧度.

即当扇形圆心角为 2 弧度时，扇形面积有最大值$\dfrac{c^2}{16}$.

解法二：$S=\dfrac{1}{2}l\cdot x=\dfrac{1}{4}l\cdot 2x\leqslant\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{l+2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{c}{2}\right)^2=\dfrac{c^2}{16}$.

当且仅当 $l=2x=\dfrac{c}{2}$ 时“=”成立.

$\therefore\ \alpha=\dfrac{l}{x}=2$ 弧度时，S 有最大值$\dfrac{c^2}{16}$.

解法三：$\because\ c=2x+x\alpha$，$\therefore\ x=\dfrac{c}{2+\alpha}$. $\therefore\ S=\dfrac{1}{2}x^2\alpha=\dfrac{c^2}{2\alpha^2+8\alpha+8}$.

$\therefore\ S=\dfrac{c^2}{2\alpha+\dfrac{8}{\alpha}+8}\leqslant\dfrac{c^2}{2\sqrt{2\alpha\cdot\dfrac{8}{\alpha}}+8}=\dfrac{c^2}{16}$. 即 $\alpha=2$ 弧度时，S 有最大值$\dfrac{c^2}{16}$.

解法四：由 $S=\dfrac{c^2\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8}$ 得 $2S\alpha^2+(8S-c^2)\alpha+8S=0$，$\alpha$ 为实数.

$\therefore \Delta=(8S-c^2)-4\cdot 2S\cdot 8\geqslant 0$,即 $S\leqslant\frac{c^2}{16}$,令 $S=\frac{c^2}{16}$,代入方程得 $\alpha^2-4\alpha+4=0$.

$\therefore \alpha=2$,当扇形圆心角为 2 弧度时,S 有最大值$\frac{c^2}{16}$.

四、易错警示

例　已知 $A=\left\{\alpha\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$,

$B=\left\{\beta\middle|2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\beta<2k\pi+\frac{11\pi}{12},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$,

求 $\complement_R A\cap\complement_R B$.

错解一: $\complement_{RA}\cap\complement_R B=\left\{\gamma\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}<\gamma<2k\pi+\frac{11\pi}{12},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

错解二: $\complement_{RA}\cap\complement_R B=\left\{\gamma\middle|2k\pi-\frac{\pi}{12}<\gamma<2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

评析及正解: 错解一中的答案实际上是 $A\cup B$,而 $\complement_R A\cap\complement_R B=\complement_R(A\cup B)$.

错解二中没有注意到与 $-\frac{\pi}{12}$ 和$\frac{\pi}{4}$ 终边相同的角.

正确的答案应是 $\complement_R A\cap\complement_R B=\left\{\gamma\middle|2k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant\gamma\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

五、链接高考

例 1　设 $p\in\{x\mid 2<x<4,且\ x\in\mathbf{Z}\}$,且角 α 的终边与$\frac{\pi}{p}$ 角的终边相同,在$[0,2\pi)$内,哪些角的终边与$\frac{\alpha}{p}$ 角的终边相同?用集合写出这些角.

方法探究: 本题先求出 p 的值,再进一步探究 α 与$\frac{\alpha}{p}$,α 角的一般形式为 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$,$\frac{\alpha}{3}$ 角的一般形式为$\frac{\alpha}{3}=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$.

讨论 k 的取值,令 $0\leqslant\frac{\alpha}{3}<2\pi$ 即可解得.

解: $p\in\{x\mid 2<x<4,且\ x\in\mathbf{Z}\}$, $\therefore p=3$.

$\because$ 角 α 的终边与$\frac{\pi}{3}$ 角的终边相同,$\therefore \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore \frac{\alpha}{3}=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又 $0 \leqslant \dfrac{\alpha}{3} < 2\pi$，$\therefore 0 \leqslant \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{9} < 2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k = 0, 1, 2$ 时，$\dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{13\pi}{9}$，它们均在 $[0, 2\pi]$ 内，

$\therefore$ 所求的角的集合为 $\left\{\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{13\pi}{9}\right\}$.

例 2 如图 1-4 所示，点 A 在半径为 1 且圆心在原点的圆上，且 $\angle AOx = 45°$. 点 P 从点 A 出发，依逆时针方向等速地沿单位圆周旋转. 已知点 P 在 1 秒钟内转过的角度为 θ $(0° < \theta < 180°)$，经过 2 秒钟到达第三象限，经过 14 秒钟后又回到出发点 A，求 θ.

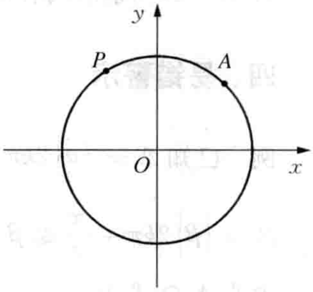


图 1-4

方法探究： 解答此类问题的关键是抓住终边相同的角的一般表示. 即与角 α 终边相同的角的一般形式为 $\beta = k \cdot 360° + \alpha \ (k \in \mathbf{Z})$. 另外还要注意正角、负角的概念是以射线绕端点的旋转方向定义的，零角是射线没有做任何旋转；其顶点都在原点，始边为 x 轴的正半轴，所不同的是终边的旋转方向不同. 本题是应用性问题，应先把实际语言转化为数学语言，即 14 秒钟后点 P 在角 $14\theta + 45°$ 的终边上，由此可得到等量关系，再注意到角 θ 的范围便可确定 θ 的值.

解： 由题意有 $14\theta + 45° = k \cdot 360° + 45° \ (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore \theta = \dfrac{k \cdot 180°}{7} \ (k \in \mathbf{Z})$. 又 $180° < 2\theta + 45° < 270°$，即 $67.5° < \theta < 112.5°$.

$\therefore 67.5° < \dfrac{k \cdot 180°}{7} < 112.5°$，且 $k \in \mathbf{Z}$，$\therefore k = 3$ 或 $k = 4$，

故所求的 θ 值为 $\theta = \dfrac{540°}{7}$ 或 $\theta = \dfrac{720°}{7}$.

例 3 (1) 已知 2 弧度的圆心角所对的弦长为 2，则这个圆心角所对的弧长是(　　).

A. 2　　B. $\sin 2$　　C. $\dfrac{2}{\sin 1}$　　D. $2\sin 1$

(2) 若两个角的差为 1 弧度，它们的和为 $1°$，求这两个角的大小分别为________.

(3) 已知一个四分之一圆的扇形的弧长等于 50 cm，则这个扇形的内切圆的面积为________.

方法探究： 本题三小题均为弧度制以及弧长、扇形面积公式的应用，通常运用弧度制下的扇形弧长与面积公式. 比角度制下的扇形的弧长与面积公式要简洁得多，用起来也方便得多.

解： (1) 由题意作如图 1-5 所示，易知 $R = \dfrac{1}{\sin 1}$，

$\therefore l=\alpha \cdot R=\dfrac{2}{\sin 1}$,故选 C.

(2) $\because 1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度,设这两个角为 α, β.

则$\begin{cases}\alpha-\beta=1, \\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{180},\end{cases}$ 解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{360}+\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{360}-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 应填$\dfrac{\pi}{360}+\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{360}-\dfrac{1}{2}$.

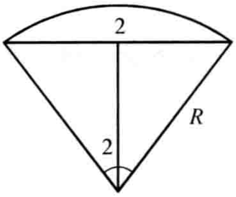


图 1－5

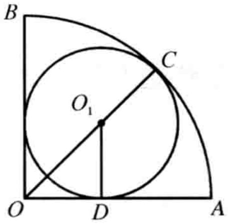


图 1－6

(3) 如图 1－6 所示,设扇形半径为 R,内切圆半径为 r, C 为 $\odot O_1$ 与$\overset{\frown}{AB}$ 的切点, D 为 $\odot O_1$ 与 OA 的切点,则 $O_1D=r$,

$\because \angle O_1OD=\dfrac{\pi}{4}$, $\therefore OO_1=\sqrt{2}O_1D=\sqrt{2}r$,

$OC=OO_1+O_1C=\sqrt{2}r+r=(\sqrt{2}+1)r=R$,且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$,

又$\dfrac{50}{R}=\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore R=\dfrac{100}{\pi}$,即$(\sqrt{2}+1)r=\dfrac{100}{\pi}$,

$\therefore r=\dfrac{100}{(\sqrt{2}+1)\pi}=\dfrac{100(\sqrt{2}-1)}{\pi}$,

故内切圆的面积 $S=\pi r^{2}=\dfrac{10\,000(3-2\sqrt{2})}{\pi}\ \mathrm{cm}^{2}$.

$\therefore$ 应填$\dfrac{10\,000(3-2\sqrt{2})}{\pi}\ \mathrm{cm}^{2}$.

专项训练一:任意角及其度量

一、填空题

1. 时钟的分针经过 2 小时 40 分钟所转过的角是________度,这个角是第________象限的角.
2. 与 950°的角终边相同的角的集合为________,它是第________象限的角,其中最小的正角是________,最大的负角是________.