普通高等教育"十二五"规划教材
卓越工程师教育培养计划——现代力学精品教材
海军院校重点教材

流体力学学习指导

LIUTI LIXUE XUEXI ZHIDAO

主　编　顾建农　张志宏
副主编　王　冲　刘巨斌

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
卓越工程师教育培养计划——现代力学精品教材
海军院校重点教材

流体力学学习指导

主　编　顾建农　张志宏
副主编　王　冲　刘巨斌

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《流体力学》(科学出版社出版)配套的辅助教材。全书共9章，分别是流体及其物理性质，流体静力学，流体运动的基本概念与基本方程，不可压缩黏性流体管内流动基础，不可压缩黏性流体外部流动基础，相似理论，低速机翼理论基础，不可压缩理想流体平面势流，波浪理论基础。各章分别含有本章的重点、难点、知识点以及典型例题、思考题和习题解答等内容。附录中给出了选择题和填空题以及考试样卷、答案及评分标准，旨在为教学双方提供更为丰富翔实的素材，以提高教师的教学效果和学生的学习效率。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学学习指导/顾建农，张志宏主编. —北京：科学出版社，2015.2
普通高等教育"十二五"规划教材
卓越工程师教育培养计划——现代力学精品教材
海军院校重点教材
ISBN 978-7-03-043228-5

Ⅰ.①流… Ⅱ.①顾… ②张… Ⅲ.①流体力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第022455号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉
责任印制：高 嵘/封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2015年2月第 一 版 印张：12 1/2
2015年2月第一次印刷 字数：310 400
定价：31.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是为科学出版社出版的《流体力学》进行配套的辅助教材，主要包括流体力学的重点、难点、知识点以及典型例题、思考题和习题解答等内容，旨在为教学双方提供更为丰富翔实的素材，以提高教师的教学效果和学生的学习效率。

本书是编者在长期教学实践经验积累的基础上编写而成的，所有编者均为海军工程大学理学院力学系的教学科研骨干。第1章、第9章的例题、思考题、习题由张志宏编写，第2章的例题、思考题、习题由卢再华编写，第3章的例题、思考题、习题由王冲编写，第4章的例题、思考题、习题由邓辉编写，第5章、第7章的例题、思考题、习题由顾建农编写，第6章的例题、思考题、习题由张旺州编写，第8章的例题、思考题、习题由刘巨斌编写。顾建农编写了各章的要求、重点、难点，第7章的知识点、重要公式，以及附录2；张志宏编写了其余各章的知识点、重要公式及附录1。全书由顾建农统稿。

本书可作为从事教学、科研及工程技术的人员参考。由于水平有限，书中难免存在疏漏和不足，恳请读者提出宝贵意见。

编　者

2014年10月

目　　录

第1章 流体及其物理性质

1.1 内容提要

1.1.1 要求及重、难点

要求 了解流体力学的任务、研究对象、发展概况与研究方法；理解流体质点、连续介质假定、流体密度、流体压缩性和膨胀性、流体黏性等概念；掌握牛顿内摩擦定律及其应用。

重点 流体质点；连续介质假定；黏性流体；动力黏度与运动黏度；不可压缩流体；理想流体；牛顿内摩擦定律。

难点 牛顿内摩擦定律及其应用。

1.1.2 知识点

流体力学：研究流体的平衡(静止或相对静止)和宏观运动规律以及流体与周围物体之间相互作用的科学。

流体：容易流动的物体，包括液体和气体。

流体质点：微观上无穷大、宏观上无穷小的流体微团。所谓微观上无穷大，指的是流体微团内包含有数目巨大的流体分子，这些分子物理参数的统计平均值可作为流体微团的宏观物理量；所谓宏观上无穷小，指的是流体微团的体积相对于工程问题的宏观特征尺寸来说非常小，小到可以被近似地看成只是一个“点”，所以流体微团也称为流体质点。

连续介质假定：流体是由流体质点组成的连续介质，流体质点之间没有间隙、在空间连续分布。

密度：单位体积流体所具有的质量，反映流体在空间某点的质量密集程度。

均质流体：空间各点密度相同的流体。

相对密度：流体的密度与标准大气压下 4 ℃纯水的密度之比。

压缩性：在一定温度下，流体的体积随压强升高而缩小的性质称为流体的压缩性。

膨胀性：在一定压强作用下，流体的体积随温度升高而增大的性质称为流体的膨胀性。

不可压缩流体：流体的膨胀系数和压缩系数均为零的流体称为不可压缩流体。不可压缩流体的密度保持为常数。

黏性：流体层间或流体与固体之间发生相对运动时，流体内部产生摩擦切应力的性质。

动力黏度：单位速度梯度下的切应力大小。

运动黏度:流体动力黏度与密度之比。

理想流体:黏度为零的流体称为理想流体。

1.1.3 重要公式

流体密度 $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V} = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$

均质流体密度 $\rho = \dfrac{m}{V}$

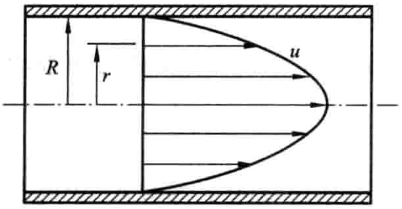
流体的体积压缩系数 $\beta_p = -\dfrac{1}{\mathrm{d}p}\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$

流体的温度膨胀系数 $\beta_T = \dfrac{1}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$

牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$

动力黏度与运动黏度的关系 $\mu = \rho\nu$

1.2 典型例题



例 1-1 图

例 1-1 设动力黏度为 μ 的流体,在半径为 R 的圆管内作定常流动,体积流量为 Q,圆管截面上轴向速度分布为 $u = \dfrac{2Q}{\pi R^4}(R^2 - r^2)$,如图所示。试求圆管截面上的摩擦剪应力分布 $\tau(r)$、壁面剪应力 τ_w 和管轴上的剪应力 τ_0。

解:根据牛顿内摩擦定律,有 $\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$. 代入速度分布,得

$$\tau = -\frac{4Q\mu}{\pi R^4} r$$

上式表明在圆管截面上,摩擦剪应力沿径向为线性分布。

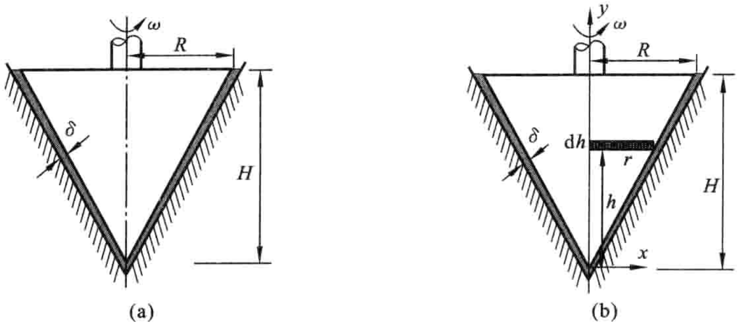
在圆管壁面上,$\tau_w = -\dfrac{4Q\mu}{\pi R^4} r \Big|_{r=R} = -\dfrac{4Q\mu}{\pi R^3}$,说明壁面上摩擦剪应力的绝对值最大。

在管轴上,$\tau_0 = -\dfrac{4Q\mu}{\pi R^4} r \Big|_{r=0} = 0$,摩擦剪应力的绝对值最小。

例 1-2 如例 1-2a 图所示。一圆锥体绕其中心轴以 $\omega = 16$ rad/s 的角速度旋转。已知锥体半径 $R = 0.3$ m,锥体高 $H = 0.5$ m,锥体与锥腔之间的间隙 $\delta = 1$ mm,间隙内润滑油的动力黏度 $\mu = 0.1$ Pa · s,试求使锥体旋转所需要的力矩 M 和功率 N。

解:建立以圆锥顶端为坐标原点的坐标系(例 1-2 图(b))。

设圆锥半角为 α,则 $\tan\alpha = R/H$,$\cos\alpha = H/\sqrt{H^2 + R^2}$。在高度 h 处,圆锥体半径为 $r = h\tan\alpha$。半径 r 处的线速度为 $\omega r = \omega h \tan\alpha$,速度梯度为 $\dfrac{\omega r}{\delta} = \dfrac{\omega h \tan\alpha}{\delta}$,摩擦剪应力



例 1-2 图

$$\tau=\frac{\mu\omega h\tan\alpha}{\delta}$$

对应微元高度 dh 处圆锥斜面的微元面积为 $dA=\dfrac{2\pi r\cdot dh}{\cos\alpha}=\dfrac{2\pi\cdot h\tan\alpha\cdot dh}{\cos\alpha}$。而

$$\tau\cdot dA=\frac{\mu\omega h\tan\alpha}{\delta}\frac{2\pi\cdot h\tan\alpha\cdot dh}{\cos\alpha}=\frac{2\pi\mu\omega\tan^2\alpha}{\delta\cos\alpha}h^2 dh$$

所以，微元转动力矩为 $dM=\tau\cdot dA\cdot r=\dfrac{2\pi\mu\omega\tan^3\alpha}{\delta\cos\alpha}h^3 dh$。

整个圆锥体的转动力矩为

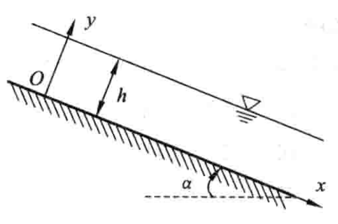
$$M=\int dM=\int_0^H\frac{2\pi\mu\omega\tan^3\alpha}{\delta\cos\alpha}h^3 dh=\frac{\pi\mu\omega H^4\tan^3\alpha}{2\delta\cos\alpha}$$

功率为 $N=M\omega=\dfrac{\pi\mu\omega^2H^4\tan^3\alpha}{2\delta\cos\alpha}$。代入相关数据，得

$$M=\frac{3.14\times0.1\times16^2\times0.5^4\times0.6^3}{2\times0.001\times0.857}=633.1\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$N=M\omega=633.13\times16=10.13\ \mathrm{kW}$$

例 1-3　黏性不可压缩薄层液体，在重力作用下沿一倾角为 α 的平面壁作定常层流流动，如图所示。已知液体厚度为 h，密度为 ρ，动力黏度为 μ，液层内的速度分布为 $u_x=\dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}(2hy-y^2)$。试求：



例 1-3 图

(1) 当 $\alpha=30°$ 时，斜壁上的切应力 τ_{w1}；

(2) 当 $\alpha=90°$ 时，斜壁上的切应力 τ_{w2}；

(3) 自由液面上的切应力 τ_0。

解：(1) 因为 $u_x=\dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}(2hy-y^2)$，所以壁面上的摩擦切应力为

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du_x}{dy}\right|_{y=0}=\frac{\rho g\sin\alpha}{2}(2h-2y)\big|_{y=0}=\rho gh\sin\alpha$$

当 $\alpha=30°$ 时，$\tau_{w1}=\rho gh\sin30°=\dfrac{1}{2}\rho gh$。

（2）当 $\alpha = 90°$ 时，$\tau_{w2} = \rho g h \sin 90° = \rho g h$。

（3）在自由液面上，有

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h} = \frac{\rho g \sin\alpha}{2}(2h - 2y)\big|_{y=h} = 0$$

1.3 思 考 题

思 1-1 流体力学研究的是流体的微观运动还是宏观运动？通常将流体视为连续介质为什么是合理的？“抽刀断水水更流”反映了流体的什么特性？

答：（1）流体力学研究流体的宏观运动。

流体是由分子组成的。从微观角度看，流体并不是一种连续分布的介质，因而流体中的物理参数也不是连续分布的。从微观角度研究流体力学问题时，需要运用分子动力学理论，由于分子很小，通常在很小的体积内存在大量分子，且分子运动具有随机性，所以在分子水平上研究流体的运动非常困难。在绝大多数实际流体力学问题中，人们感兴趣的并不是个别分子的微观运动特征而是流体的宏观运动参数，例如圆管中流体沿轴向或径向的速度分布、机翼表面的压强分布等。流体力学测量仪器能够反映出来的也正是这样一些宏观物理参数，而这些宏观物理参数表征的是许许多多个分子的相应物理参数的统计平均值。因而，通常流体力学研究的是流体的宏观运动。

（2）通常将流体视为连续介质是合理的。

将流体划分成许许多多足够小的流体微团，每一个很小的流体微团内仍然包含有数目巨大的流体分子，将流体微团内这些分子的物理参数的统计平均值视为流体微团的相应宏观物理参数。由于流体微团的体积相对于工程实际问题中的宏观特征尺寸来说非常小，可以小到被近似认为是一个没有大小和尺寸的“点”，所以流体微团也称为流体质点。如果将流场视为由这样的流体质点组成，则流体就可成为连续分布的没有间隙的介质，而流体宏观的物理量如速度、压强、密度等就成为流场中连续分布的变量。因而，将流体视为由流体质点组成的连续介质通常是合理的。

（3）反映了流体的易流动性以及宏观角度下流体的连续介质特性。

思 1-2 如何利用所学知识解释“风生水起”现象？

答：实际的空气和水均有黏性，属于黏性流体。当风吹过静止的水面时，接近水面附近的流动空气在铅垂方向将会存在速度梯度，根据牛顿内摩擦定律，空气内部将会产生摩擦剪应力，这个摩擦剪应力在汽水交界面上也将会连续地作用和传递。由于静止的流体不能承受切应力的作用，如果在水面上存在摩擦切应力，不管这种切应力是何等的微小，在水中也将一定会存在速度梯度，从而引起水的运动。因而根据实际流体具有黏性以及牛顿内摩擦定律可以解释“风生水起”现象。

思 1-3 温度为 20 ℃ 时，空气和水的运动黏度之比 $\nu_{空气}/\nu_{水} \approx 15$，是否可以认为空气的黏性比水的黏性大？为什么？

答：不能。根据牛顿平板实验可以知道，平板运动所受到的摩擦阻力与流体的动力黏

度 $\mu(\mu=\rho\nu)$ 成正比，因而动力黏度的大小可以直接反映流体黏性的大小。运动黏度定义为流体动力黏度与流体密度之比，因与密度有关，因而不能根据运动黏度的大小直接确定流体黏性的大小。

尽管 $\nu_{空气}/\nu_{水}\approx 15$，但由于 $\rho_{水}\approx 1000\ \text{kg/m}^3$，$\rho_{空气}\approx 1.2\ \text{kg/m}^3$，故

$$\mu_{空气}/\mu_{水}=\rho_{空气}\nu_{空气}/(\rho_{水}\ \nu_{水})\approx 1.2\times 15/1000\approx 1/55$$

所以水的动力黏度大于空气的动力黏度，水的黏性比空气大。

思 1-4 游泳比赛时，游泳选手为什么不愿选择靠近池壁的泳道？它对游泳成绩有不利影响吗？

答：两侧池壁上，流体速度恒为零。当游泳选手处于靠近池壁的泳道前进时，由于离池壁较近，相对于中间泳道的选手，靠近池壁的选手和池壁之间将会形成更大的速度梯度，选手身体上将会产生更大的摩擦剪应力，从而形成更大的游泳阻力。

靠近池壁泳道的选手，池壁对游泳成绩会产生不利影响。

1.4 习 题

习 1-1 两无限大平行平板，下板固定。上板以 $U=0.5\ \text{m/s}$ 的速度滑移，保持两板间距 $\delta=0.2\ \text{mm}$，板间充满润滑油，动力黏度为 $\mu=0.01\ \text{Pa}\cdot\text{s}$，密度为 $\rho=800\ \text{kg/m}^3$。试求：

(1) 润滑油的运动黏度 ν；

(2) 上、下板的摩擦切应力大小 τ_{w1}、τ_{w2}。

解：(1) $\nu=\mu/\rho=0.01/800\ \text{m}^2/\text{s}=1.25\times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$

(2) 两板间的速度梯度近似取平均值，沿平板法线方向速度梯度保持为常数，$\dfrac{du}{dy}=\dfrac{U}{\delta}$。根据牛顿内摩擦定律，上、下板的摩擦切应力为

$$\tau_{w1}=\tau_{w2}=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{U}{\delta}=0.01\times 0.5/(0.2\times 10^{-3})=25(\text{Pa})$$

习 1-2 有一底面积为 $A=40\ \text{cm}\times 60\ \text{cm}$ 的矩形木板，质量为 $m=5\ \text{kg}$，以 $U=0.9\ \text{m/s}$ 的速度沿着与水平面成 $\alpha=30^\circ$ 的斜面匀速下滑，木板与斜面之间的油层厚度为 $\delta=1\ \text{mm}$，求油的动力黏性系数 μ。

解：木板重量在斜面方向的分量与木板摩擦阻力平衡时，匀速下滑。

$$mg\sin\alpha=\mu A\frac{du}{dy},\quad \frac{du}{dy}=\frac{U}{\delta}$$

$$\mu=\frac{mg\sin\alpha}{A\dfrac{U}{\delta}}=\frac{5\times 9.81\times 0.5}{0.4\times 0.6\times\dfrac{0.9}{0.001}}=0.114(\text{Pa}\cdot\text{s})$$

习 1-3 旋转圆筒黏度计的内筒的直径 $d=30\ \text{cm}$，高 $h=30\text{cm}$。外筒与内筒的间隙 $\delta=0.2\ \text{cm}$，间隙中充满被测流体，外筒作匀速旋转，角速度 $\omega=15\ \text{rad/s}$，测出作用在静止内筒上的力矩为 $M=8.5\ \text{N}\cdot\text{m}$。忽略筒底部的阻力，求被测流体的动力黏度 μ。

解:外筒旋转的线速度为 $v=\omega(0.5d+\delta)$,内筒表面积 $A=\pi dh$,摩擦切应力

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{v}{\delta}$$

内筒所受力矩 $M=\tau A\frac{d}{2}=\mu\frac{v}{\delta}\pi dh\frac{d}{2}$。所以

$$\mu=\frac{2M\delta}{\omega(0.5d+\delta)\pi d^2h}=\frac{2\times 8.5\times 0.2\times 10^{-2}}{15\times(0.5\times 0.3+0.2\times 10^{-2})\times 3.14\times 0.3^2\times 0.3}$$
$$=0.176(\mathrm{Pa\cdot s})$$

习 1-4 上下平行的两个圆盘,直径均为 d,间隙厚度为 δ,间隙中充满动力黏度为 μ 的液体。若下盘固定,上盘围绕轴心以角速度 ω 旋转,求转动圆盘所需的力矩 M 和功率 N。

解:上圆盘不同半径处的线速度不一样,因而液体层法线方向的速度梯度不一样,导致上圆盘不同半径处的微元旋转力矩不同。整个上圆盘的转动力矩需要沿圆盘半径进行积分才能得到。

上圆盘半径 r 处的线速度为 ωr,速度梯度为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\omega r}{\delta}$,摩擦切应力为 $\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{\omega r}{\delta}$。上圆盘半径 r 至 $r+\mathrm{d}r$ 处的微元转动力矩为

$$\mathrm{d}M=\tau\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot r=\mu\frac{\omega}{\delta}2\pi r^3\mathrm{d}r$$

所以,转动整个圆盘所需的力矩为

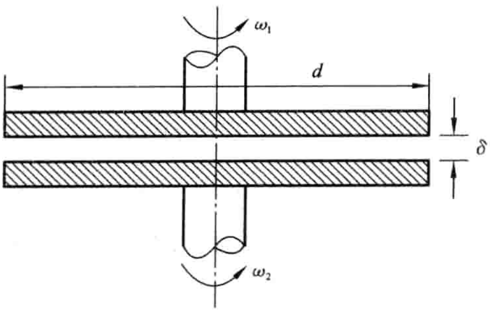
$$M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R\mu\frac{\omega}{\delta}2\pi r^3\mathrm{d}r=\mu\frac{\omega}{\delta}2\pi\frac{R^4}{4}=\mu\frac{\omega}{\delta}\pi\frac{R^4}{2}=\frac{\pi\mu\omega d^4}{32\delta}$$

功率为 $N=M\omega=\frac{\pi\mu\omega^2d^4}{32\delta}$。

习 1-5 如图所示,利用液体摩擦传递扭矩 M 的摩擦盘直径为 d、间隙为 δ,摩擦盘间液体的动力黏度为 μ,主动轴与从动轴的旋转角速度分别为 ω_1 和 ω_2。$\omega_1-\omega_2$ 称为摩擦盘的滑移角速度。

(1) 试求用 M,d,δ,μ 表示的滑移角速度公式

(2) 如果 $\omega_1-\omega_2=44\ \mathrm{rad/s}$,$d=200\ \mathrm{mm}$,$\delta=0.13\ \mathrm{mm}$,$\mu=0.14\ \mathrm{Pa\cdot s}$,试求传递扭矩 M 和功率 N 的大小。



习 1-5 图

解:(1) 求滑移角速度公式。

取半径 r 处宽度 $\mathrm{d}r$ 的微元环间液体进行分析。处在两个圆盘间的这个微元圆环形的液体都在绕轴线旋转,上盘表面处的切向圆周速度为 $\omega_1 r$,下盘面对应处的切向圆周速度为 $\omega_2 r$,两盘之间存在着的速度差为 $(\omega_1-\omega_2)r$,于是两盘之间微元圆环形液体层的速度梯度为 $(\omega_1-\omega_2)r/\delta$。

作用在圆盘上的摩擦切应力为 $\tau = \mu(\omega_1 - \omega_2)r/\delta$，微元面积为 $dA = 2\pi r dr$。

作用在圆盘上的微元摩擦力矩为 $dM = \tau dAr = 2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)r^3 dr/\delta$。

所以，作用在圆盘上总的摩擦力矩为

$$M = \int dM = \int_0^{d/2} \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)r^3}{\delta} dr = \frac{\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)d^4}{32\delta}$$

滑移角速度为 $\omega_1 - \omega_2 = \dfrac{32\delta M}{\pi\mu d^4}$。

(2) 求传递扭矩 M 和功率 N 的大小。

$$M = \frac{\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)d^4}{32\delta} = \frac{3.14 \times 0.14 \times 44 \times 0.2^4}{32 \times 0.13 \times 10^{-3}} = 7.44(\mathrm{N \cdot m})$$

$$N = M(\omega_1 - \omega_2) = 7.44 \times 44 = 327.4(\mathrm{W})$$

第 2 章　流体静力学

2.1　内 容 提 要

2.1.1　要求及重、难点

要求　了解流体微团受力的分类，测压计的种类，了解流体静压平衡微分方程的推导过程及其积分。理解流体静压的两个特性，绝对压强、相对压强的概念。掌握重力场中的流体静力学基本方程以及以该方程为测量原理的液柱式测压计的测压方法，能熟练利用静力学基本方程计算静止流体作用于平面及曲面上的总压力，熟练绘制出压力体。

重点　流体静压的两个特性，流体静力学基本方程，静压的测量方法，静止流体作用于平面及曲面上的总压力的计算。

难点　压力体的绘制。

2.1.2　知识点

表面力：作用在所研究的流体体积表面上的力，它是由与流体相接触的其他物体（流体或固体）的作用所产生的。

应力：作用在单位面积上的表面力称为应力。

质量力：作用在流体内部每一个质点上的力，它的大小与流体的质量成正比。

流体静压强：流体处于静止或相对静止的流体压强。

流体静压强的两个重要特性：

(1) 流体静压强的方向垂直作用面且沿作用面的内法线方向。

(2) 流体静压强的大小与作用面的方位无关。

绝对压强：以完全真空作为基准（或零点）计示的压强。

相对压强：以当地大气压作为基准（或零点）计示的压强。

表压强：当 $p \geqslant p_a$ 时，流体绝对压强 p 与当地大气压强 p_a 之差称为表压强。

真空度：当 $p \leqslant p_a$ 时，当地大气压强 p_a 与流体绝对压强 p 之差为真空度。

压力体：$V_p = \int_{A_z} h \, \mathrm{d}A_z$，代表的是受压柱面、受压柱面边缘向上作垂线形成的侧面、自由液面或其延长面一起所围成的体积。

潜体：一个任意形状的物体完全悬浮于液体中，则称此物体为潜体。

浮体：当物体部分悬浮于液体中，部分露出在自由液面之上时，则称其为浮体。

2.1.3　重要公式

流体平衡微分方程：$f - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$，它表示流体在质量力和表面力作用下处于平衡状态。

静力学基本方程：$p = p_0 + \rho g h$，自由表面的不可压缩重力流体中压强分布规律的数学表达式。

静止液体作用在平板上的总压力：$p = \rho g h_C A$，即在静止液体中，作用在任意方位、任意形状平面上的液体总压力等于受压平面形心点处的相对压强与受压平面面积的乘积。

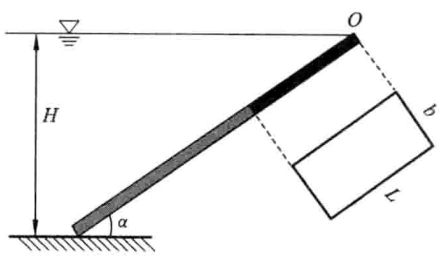
总压力作用点位置：$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C A}$。

静止液体作用在柱面上的总压力的水平分力：$P_x = \rho g h_C A_x$，即水平分力等于该柱面在垂直方向的投影面积上的总压力。

静止液体作用在柱面上的总压力的垂直分力：$P_z = \rho g V_p$，即垂直分力等于压力体中液体的重量。

2.2　典 型 例 题

例 2-1　如图所示一斜置的矩形闸门，已知闸门宽为 $b = 2$ m，长为 $L = 4$ m，水面距底部高 $H = 8$ m，板的倾斜角为 $\alpha = 30°$，求闸门受静水压力的合力大小，合力对点 O 的力矩。



例 2-1 图

解：受力的大小为

$$P = \rho g h_C A = \rho g \left(\frac{1}{2} L \sin\alpha\right) bL$$

$$= 9810 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2}\right) \times 2 \times 4 = 78.48(\text{kN})$$

合力作用点距 O 点距离为

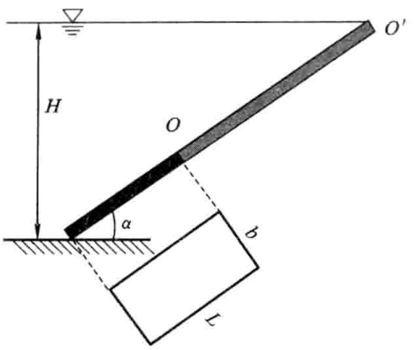
$$l = y_D = \left(y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C A}\right) = \frac{L}{2} + \frac{\frac{1}{12} \times b \times L^3}{\frac{L}{2} \times b \times L}$$

$$= \frac{2}{3} L = 8/3 = 2.667(\text{m})$$

合力对点 O 的力矩：$M_O = P \times l = 209.28\ \text{kN} \cdot \text{m}$。

例 2-2　如图所示一斜置的矩形闸门，已知闸门宽为 $b = 2$ m，长为 $L = 4$ m，$H = 8$ m，$\alpha = 30°$，求闸门受静水压力的合力大小，合力对点 O 的力矩。

解：受力的大小为：



例 2-2 图

$$P=\rho g h_C A=\rho g\left(H-\frac{1}{2}L\sin\alpha\right)bL$$
$$=9810\times\left(8-\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}\right)\times 2\times 4$$
$$=549.4(\mathrm{kN})$$

合力作用点距水面与板延长线交点 O' 距离为

$$y_D=\left(y_C+\frac{I_{Cx}}{y_C A}\right)=14+\frac{\frac{1}{12}\times 2\times 64}{14\times 8}=14.095(\mathrm{m})$$

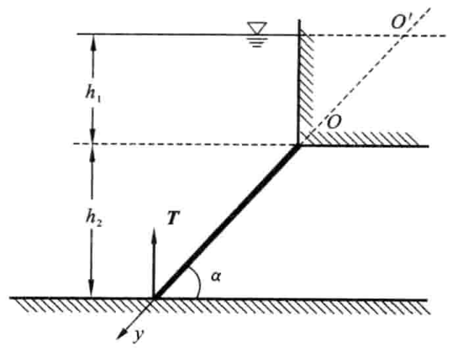
合力作用点距 O 点距离为

$$l=y_D-\left(\frac{H}{\sin\alpha}-L\right)=14.095-\left(\frac{8}{\sin 30^\circ}-4\right)$$
$$=y_D-12=2.095\ \mathrm{m}$$

合力对点 O 的力矩：$M_O=P\times l=1150.91(\mathrm{kN\cdot m})$。

例 2-3 如图所示，已知一质量分布均匀的矩形闸门倾斜放置，已知 $\alpha=45^\circ$，闸门宽 $b=2\ \mathrm{m}$，闸门重 $G=19.6\ \mathrm{kN}$，水深 $h_1=1\ \mathrm{m}$，$h_2=2\ \mathrm{m}$，闸门可以绕 O 点开启，求开启闸门时所需拉力 T。

解：将坐标原点设在板的延长线与水平面延长线的交点 O' 处，平板所在的直线为 y 轴，x 轴垂直于纸面，建立坐标系。



例 2-3 图

根据题意，闸板的长度为

$$l=\frac{h_2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}(\mathrm{m})$$

闸板的面积为

$$A=l\times b=2\sqrt{2}\times 2=4\sqrt{2}(\mathrm{m}^2)$$

因为整个系统均在大气压力的作用下，因此只考虑相对压力。作用在闸板上相对作用力合力

$$P=\rho g\,(h_1+h_C)A=9810\times\left(1+\frac{1}{2}\times 2\right)\times 4\sqrt{2}=110.99(\mathrm{kN})$$

该合力作用点位置为

$$y_D=y_C+\frac{I_{Cx}}{y_C A}$$

$$y_C=\frac{h_1}{\sin 45^\circ}+\frac{1}{2}\frac{h_2}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

$$I_{Cx}=\frac{bl^3}{12}=\frac{2\times(2\sqrt{2})^3}{12}=\frac{8}{3}\sqrt{2}(\mathrm{m}^4)$$

$$y_D=2\sqrt{2}+\frac{\frac{8}{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}=\frac{13}{6}\sqrt{2}(\mathrm{m})$$

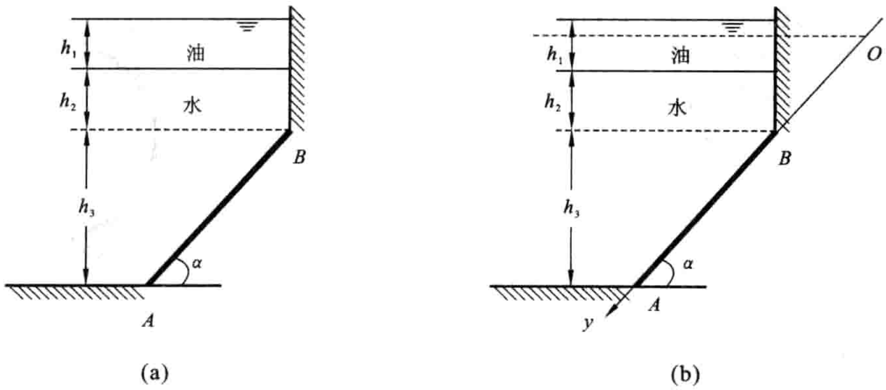
设开启闸门时所必需的向上的拉力为 T，则根据力矩平衡，有

$$T \cdot l \cdot \cos\alpha = G \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha + P\left(y_D - \frac{h_1}{\sin\alpha}\right)$$

则

$$T = \frac{G}{2} + \frac{P(y_D - \sqrt{2})}{l\cos 45^\circ} = \frac{19.6}{2} + \frac{110.99 \times \frac{7}{6}\sqrt{2}}{2} = 101.36(\text{kN})$$

例 2-4　如图所示一容器中装有油和水，油的厚度 $h_1 = 1$ m，水的深度 $h_2 = 2$ m，$h_3 = 3$ m，$\alpha = 45^\circ$，$\rho_{油} = 800\ \text{kg/m}^3$。求液体对单位宽度平板 AB 的作用力及其作用点距离 A 点的距离。



例 2-4 图

解：首先将油折算成水，则 1 m 的油相当于 0.8 m 的水。

如图(b) 以折算后的液面为参考面，以 O 为原点，平板所在的直线为 y 轴，x 轴垂直于纸面，建立坐标系。

根据题意，有闸板的面积为

$$S = h_3/\sin\alpha \times 1 = 3\sqrt{2}\ \text{m}^2$$

(1) 液体对单位宽度平板 AB 的总压力 P 为

$$P = p_C S = \left[\rho_{\text{oil}} g h_1 + \rho_{\text{water}} g \times \left(h_2 + \frac{h_3}{2}\right)\right] \times h_3/\sin 45^\circ$$

$$= [9.81 \times 800 \times 1 + 9810 \times (2 + 1.5)] \times 3\sqrt{2} = 1.79 \times 10^5\ \text{N}$$

(2) 作用点位置

$$y_C = (h'_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_3)/\sin\alpha = \left(0.8 + 2 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} = 6.08\ \text{m}$$

$$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C S} = 6.08 + \frac{\frac{(3\sqrt{2})^3}{12}}{6.08 \times 3\sqrt{2}} = 6.33\ \text{m}$$

距 A 点距离为：$(0.8 + 2 + 3) \times \sqrt{2} - 6.33 = 1.87$ m。

例 2-5　如图所示扇形闸门 AB，其半径 $R = 2$ m，宽 $b = 2$ m，$H = 1$ m，计算闸门所受的合力大小及方向。

解：(1) 水平受力