

金属塑性成形

CAE 应用

— DYNIFORM

龚红英 刘克素 董万鹏 等编著

金属塑性成形

CAE应用 — DYNIFORM

龚红英 刘克素 董万鹏 等编著



化学工业出版社

· 北京 ·

本书以基于板料成形有限元分析软件 DYNIFORM5.9 软件为平台，在详细介绍板料冲压成形 CAE 分析涉及的基础理论及 DYNIFORM5.9 软件的基本特点等内容基础上，结合作者多年从事相关领域的教研经验和丰富实践经验，选取 8 个典型板料冲压成形模拟实例及 4 个先进冲压成形模拟实例，对具体零件冲压成形 CAE 分析的具体操作步骤及工艺设置等进行了详细讲解，以引导读者掌握应用 DYNIFORM5.9 软件解决板料冲压成形工程实际问题的能力和技能。

本书可作为从事板料冲压成形方向 CAE 分析的工程技术人员学习和培训 DYNIFORM5.9 软件的初/中级应用教程，也可作为国内各大专院校的本、专科以及硕士研究生等材料加工工程专业的专业特色课程的主讲教材或参考教材。

图书在版编目（CIP）数据

金属塑性成形 CAE 应用——DYNIFORM / 龚红英，
刘克素，董万鹏等编著. —北京：化学工业出版社，
2014.11
ISBN 978-7-122-21701-1

I. ①金… II. ①龚…②刘…③董… III. ①金属
压力加工-塑性变形-有限元分析-应用软件 IV. ①
TG3-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 203064 号

责任编辑：刘丽宏	文字编辑：杨帆
责任校对：宋玮	装帧设计：刘丽华
出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）	
印装：化学工业出版社印刷厂	
787mm×1092mm 1/16 印张 14 3/4 字数 372 千字	2015 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网 址：<http://www.cip.com.cn>
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

FOREWORD

前言

随着我国汽车、航空、航天、模具、电子电器及日用五金等工业的迅速发展,制造企业和相关研究部门的技术人员对板料冲压成形工艺分析研究以及采用先进板料冲压成形 CAE 分析技术进行具体零件成形分析研究的需求与日俱增,本书正是为了满足本专业领域技术人员掌握板料冲压成形相关理论和将板料成形 CAE 分析技术,尤其是将先进的冲压专业分析软件-DYNAFORM5.9 软件应用到实际生产环节的一本合适的初、中级培训和教研的教程。

本书是一本理论与实际操作相结合的专业课程及技能培训教材,涉及的主要内容分为两大部分:(一)对板料冲压 CAE 分析基本理论和 DYNAFORM5.9 软件的基本特点等进行阐述,此部分内容涉及在进行板料成形 CAE 分析是需要掌握的必要的工艺及如何基于 DYNAFORM5.9 软件进行板料成形 CAE 分析模拟试验的关键技术等内容的详细阐述;(二)对板料冲压成形模拟实例进行阐述,此部分内容涉及采用 DYNAFORM5.9 软件进行典型冲压成形模拟以及进行先进冲压成形工艺模拟两部分,选取了 8 个典型冲压成形实例以及 4 个先进冲压成形实例,以 DYNAFORM5.9 软件为平台进行具体零件冲压成形 CAE 分析的具体操作步骤及工艺设置等详细讲解。

上海工程技术大学龚红英全面负责本书的撰写工作,并与上海工程技术大学董万鹏及教研团队一起合作完成了本书的第 1 章,第 3~4 章,第 6 章,第 11~12 章的主要内容撰写工作,ETA-CHINA 上海分公司技术培训部的刘克素、徐金波、王斌等工程师与上海工程技术大学材料工程学院塑性成形教研团队进行了通力合作,共同完成了本教材第 2 章,第 5 章,第 7~10 章,第 13~14 章的主要内容撰写工作,同时为本教程撰写提供了部分模拟实例素材和参考资料,凭借着从事 CAE 分析的丰富实践经历为本教材提出了很多宝贵的经验和修改建议。感谢 ETA-CHINA 上海分公司马亮促成了本教程撰写工作,并对本书撰写工作给予了大力支持。感谢上海工程技术大学李会肖、王斯凡、付云龙和苏晓斌四位硕士研究生的积极参与和协助著者完成了成形实例模拟的试验调试和参数修正工作,才使得编著者能顺利完成此教材的整个撰写工作,在此对所有为此教材撰写付出心血和汗水的所有参与人员表示衷心感谢!另外书后所列主要参考文献为本书撰写起了重要参考作用,在此谨向原著者表示感谢!

本书可作为国内各大专院校的本、专科以及硕士研究生等材料加工工程专业的专业特色课程的主讲教材或参考教材,也可作为从事板料冲压成形方向 CAE 分析的工程技术人员学习和培训 DYNAFORM5.9 软件的初/中级应用教程。

本书涉及的全部模拟分析实例模型及参考资料,读者可通过 ETA-CHINA 上海分公司网址:<http://www.eta.com.cn> 进行有关查询。

由于编著者水平有限,难免有不当之处,欢迎读者不吝赐教。

编著者

CONTENTS

目录

第1章 板料冲压成形 CAE 分析基本理论

1

1.1 板料冲压成形 CAE 分析概述	1
1.2 板料冲压成形 CAE 分析有限元理论	2
1.2.1 有限变形的应变张量	3
1.2.2 有限变形的应力张量	5
1.2.3 几何非线性有限元方程的建立	6
1.3 板料冲压成形 CAE 分析关键技术	9
1.3.1 有限元求解算法及常用板料冲压成形 CAE 分析软件	9
1.3.2 各向异性屈服准则的运用	10
1.3.3 单元类型及选择	11
1.3.4 有限元网格划分技术	15
1.3.5 边界条件的处理技术	18
1.3.6 时间步长的计算	19
1.3.7 速度选取原则	20
1.3.8 提高分析效率的方法	21
1.4 板料冲压成形缺陷分析	21
1.4.1 起皱	21
1.4.2 破裂	21
1.4.3 回弹	22

第2章 DYNAFORM5.9 软件特点及模块简介

23

2.1 DYNAFORM5.9 软件特点简介	23
2.2 DYNAFORM5.9 基本模块	25
2.2.1 坯料工程 (BSE) 模块	25
2.2.2 成形仿真 (FS) 模块	28
2.2.3 模面工程 (DFE) 模块	30
2.3 DYNAFORM5.9 软件新功能模块简介	33
2.3.1 成形优化模块	33
2.3.2 改进主要功能	34

2.3.3	BSE 模块中新实现的性能、特征和功能	34
2.3.4	DFE 模块中新实现的性能、特征和功能	34
2.3.5	自动设置 (AutoSetup) 的更新	35
2.3.6	坯料生成器 (Blank Generator) 的新特征	36
2.3.7	任务提交器 (Job Submitter) 的特征和功能	36
2.3.8	改进和增强的前处理性能	37
2.3.9	后处理 (ETA/Post) 中新实现的特征和功能	37
2.3.10	支持的求解器 (LS-DYNA) 版本	38
2.3.11	新实现的 PowerPoint 插件 E3DViewer	38

CAE 分析实例详解 (一) 典型板料冲压成形模拟

第 3 章 圆筒件拉深成形模拟

40

3.1	导入模型编辑零件名称	40
3.2	自动设置	41
3.2.1	初始设置	41
3.2.2	定义板料零件“BLANK”	42
3.2.3	定义凹模零件“DIE”	44
3.2.4	定义凸模零件“PUNCH”	46
3.2.5	定义压边圈零件“BINDER”	47
3.2.6	工模具初始定位设置	48
3.2.7	工模具拉深工艺参数设置	49
3.2.8	Control 菜单控制说明	50
3.2.9	工模具运动规律的动画模拟演示	51
3.2.10	提交 LS-DYNA 进行求解计算	52
3.3	利用 eta/post 进行后处理分析	53
3.3.1	观察成形零件的变形过程	53
3.3.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	54

第 4 章 汽车油箱底壳零件拉深成形模拟

56

4.1	导入模型编辑零件名称	56
4.2	估算原始坯料及创建凹模参考曲面	57
4.2.1	创建零件“MPART”单元模型 (提取中性层)	57
4.2.2	创建零件“MPART”及板料轮廓线	58
4.2.3	抽取零件的上下表面	62
4.2.4	创建零件“DIE”参考曲面	63
4.3	自动设置	65
4.3.1	初始设置	65
4.3.2	定义板料零件“BLANK”	65
4.3.3	定义凹模零件“DIE”	68

4.3.4	定义凸模零件“PUNCH”	70
4.3.5	定义压边圈零件“BINDER”	71
4.3.6	工模具初始定位设置	72
4.3.7	工模具拉深工艺参数设置	73
4.3.8	工模具运动规律的动画模拟演示	74
4.3.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	75
4.4	利用 eta/post 进行后处理分析	75
4.4.1	观察成形零件的变形过程	75
4.4.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	75

第5章 车门内板零件拼焊冲压成形模拟

77

5.1	模型准备	78
5.2	自动设置	80
5.2.1	初始设置	80
5.2.2	定义板料零件“BLANK”	81
5.2.3	定义凹模零件“DIE”	83
5.2.4	定义凸模零件“PUNCH”	86
5.2.5	定义压边圈零件“BINDER”	89
5.2.6	工模具初始定位设置	91
5.2.7	工模具拉深行程参数的设置	92
5.2.8	工模具运动规律的动画模拟演示	93
5.2.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	94
5.3	利用 eta/post 进行后处理分析	94
5.3.1	观察成形零件的变形过程	94
5.3.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	94

第6章 电器U形卡头零件弯曲成形及回弹模拟

96

6.1	回弹	96
6.2	导入模型编辑零件名称	97
6.3	自动设置	97
6.3.1	初始设置	97
6.3.2	定义板料零件“BLANK”	98
6.3.3	定义凹模零件“DIE”	101
6.3.4	定义凸模零件“PUNCH”	103
6.3.5	定义压边圈零件“BINDER”	106
6.3.6	工模具初始定位设置	106
6.3.7	工模具拉深工艺参数设置	107
6.3.8	工模具运动规律的动画模拟演示	108
6.3.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	109
6.4	回弹设置	109

6.5 利用 ETA/Post 进行后处理分析	111
6.5.1 在后置处理器中读取 d3plot 文件	111
6.5.2 回弹分析结果对比	112

第 7 章 多步数控弯管成形模拟

114

7.1 导入弯管数据并创建模型	114
7.2 自动设置	116
7.2.1 初始设置	116
7.2.2 定义管件“Tube”	116
7.2.3 定义管坯工具“Tools”	118
7.2.4 工模具弯曲工艺参数设置	118
7.2.5 控制参数设置	118
7.2.6 工模具运动规律的动画模拟演示	119
7.2.7 提交 LS-DYNA 进行求解计算	119
7.3 利用 eta/post 进行后处理分析	120
7.3.1 观察成形零件的变形过程	120
7.3.2 观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	122

第 8 章 电器连接件多道次成形模拟

123

8.1 导入模型	123
8.2 自动设置	123
8.2.1 初始设置	123
8.2.2 第一步“Forming”	125
8.2.3 第二步“Triming”	128
8.2.4 第三步“Forming”	130
8.2.5 工模具运动规律的动画模拟演示	133
8.2.6 提交 LS-DYNA 进行求解计算	133
8.3 利用 eta/post 进行后处理分析	134
8.3.1 观察成形零件的变形过程	134
8.3.2 观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	135

第 9 章 多工位级进模成形模拟

139

9.1 导入模型	139
9.2 自动设置	140
9.2.1 初始设置	140
9.2.2 第一步“Blanking”	140
9.2.3 第二步“Dummy1”	142
9.2.4 第三步“Trim1”	144
9.2.5 第四步“Dummy2”	145
9.2.6 第五步“Trim2”	147

9.2.7	第六步“Forming1”	147
9.2.8	第七步“Bending1”	148
9.2.9	第八步“Dummy3”	149
9.2.10	第九步“Trim3”	149
9.2.11	第十步“Bending2”	149
9.2.12	第十一步“Dummy4”	150
9.2.13	第十二步“Trim4”	151
9.2.14	第十三步“Dummy5”	151
9.2.15	第十四步“Trim5”	151
9.2.16	第十五步“Bending4”	152
9.2.17	第十六步“Dummy6”	152
9.2.18	第十七步“Trim6”	152
9.2.19	工模具运动规律的动画模拟演示	153
9.2.20	提交 LS-DYNA 进行求解计算	153
9.3	利用 eta/post 进行后处理分析	154
9.3.1	观察成形零件的变形过程	154
9.3.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	155

第 10 章 车用加强板热冲压成形模拟

157

10.1	导入模型并编辑零件名称	157
10.2	自动设置	158
10.2.1	初始设置	158
10.2.2	定义板料零件“BLANK”	159
10.2.3	定义凹模零件“DIE”	164
10.2.4	定义凸模零件“PUNCH”	164
10.2.5	定义压边圈零件“BINDER”	164
10.2.6	工模具初始定位设置	164
10.2.7	定义热分析选项参数	164
10.2.8	工模具拉深行程参数设置	167
10.2.9	添加冷却工步	167
10.2.10	工模具运动规律的动画模拟演示	169
10.2.11	提交 LS-DYNA 进行求解计算	169
10.3	利用 eta/post 进行后处理分析	170
10.3.1	观察成形零件的变形过程	170
10.3.2	观察成形零件温度等值云图	171

CAE 分析实例详解（二）先进成形工艺模拟

第 11 章 半球形零件液压成形模拟

174

11.1	板料液压胀形	174
------	--------	-----

11.2 导入模型编辑零件名称	175
11.3 自动设置	176
11.3.1 初始设置	176
11.3.2 定义板料零件“BLANK”	176
11.3.3 定义凹模零件“DIE”	177
11.3.4 定义凸模零件“PUNCH”	181
11.3.5 定义压边圈零件“BINDER”	181
11.3.6 定义压延筋零件“DRAWBEAD”	182
11.3.7 工模具初始定位设置	184
11.3.8 工模具拉深工艺参数设置	185
11.3.9 工模具运动规律的动画模拟演示	186
11.3.10 提交 LS-DYNA 进行求解计算	187
11.4 利用 eta/post 进行后处理分析	187
11.4.1 观察成形零件的变形过程	187
11.4.2 观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	188

第 12 章 T 形管件液压胀形模拟

190

12.1 管件液压胀形	190
12.2 导入模型编辑零件名称	191
12.3 自动设置	192
12.3.1 初始设置	192
12.3.2 定义零件“Tube”	192
12.3.3 定义工模具零件	195
12.3.4 工模具初始定位设置	199
12.3.5 工模具拉深工艺参数设置	199
12.3.6 工模具运动规律的动画模拟演示	201
12.3.7 提交 LS-DYNA 进行求解计算	202
12.4 利用 eta/post 进行后处理分析	202
12.4.1 观察成形零件的变形过程	202
12.4.2 观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	203

第 13 章 飞机蒙皮拉伸成形模拟

205

13.1 飞机蒙皮零件拉伸成形工艺	205
13.1.1 零件生产工艺简介	205
13.1.2 选材要求	205
13.2 导入模型	206
13.3 自动设置	206
13.3.1 初始设置	206
13.3.2 定义板料零件“BLANK”	207
13.3.3 定义工具“Tools”	207

13.3.4	工模具拉伸成形参数设置	207
13.3.5	工模具运动规律的动画模拟演示	209
13.3.6	提交 LS-DYNA 进行求解计算	210
13.4	利用 eta/post 进行后处理分析	211
13.4.1	观察成形零件的变形过程	211
13.4.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	211

第 14 章 超塑性零件成形模拟

213

14.1	导入模型	213
14.2	自动设置	214
14.2.1	初始设置	214
14.2.2	定义板料零件“BLANK”	215
14.2.3	定义凹模零件“DIE”	216
14.2.4	工模具拉深行程参数设置	217
14.2.5	约束设置	219
14.2.6	提交 LS-DYNA 进行求解计算	219
14.3	利用 eta/post 进行后处理分析	220
14.3.1	观察成形零件的变形过程	220
14.3.2	观察成形零件的成形极限图及厚度分布云图	220

参考文献

222

板料冲压成形 CAE 分析基本理论

1.1 板料冲压成形 CAE 分析概述



冲压是利用安装在压力机上的冲模对材料施加压力，使其产生分离或塑性变形，从而获得所需零件（俗称冲压件或冲件）的一种压力加工方法。因为它主要是用板料加工成零件，所以又称为板料冲压成形。采用板料冲压成形不但可以加工金属材料，还可以加工非金属材料。与切削加工等方法相比，板料冲压成形不仅具有更高的生产效率，而且可以获得更高的材料利用率，已经广泛应用于汽车、航空航天、造船、电子电器、国防、日用五金等工业领域，尤其是在汽车工业领域中，由于汽车车身零部件的精度要求高、生产批量大，目前绝大部分车身零部件均采用金属板料冲压成形技术进行实际生产。

板料冲压成形过程是一个大挠度、大变形的塑性变形过程，涉及板料在不同塑性成形工序中复杂的应力应变状态下产生塑性流动和塑性变形，而易引起破裂、起皱及回弹等成形缺陷问题。与此同时，由于板料冲压成形过程还是一个非常复杂的多体接触的动态力学问题。因此在实际板料冲压成形过程中，单凭经验往往很难对板料冲压成形性做出合理预测，进而加大了冲模制造、调模及试模的难度和成本，如果出现工艺判断错误，还可能导致模具报废。为了准确把握板料冲压成形性能，对实际冲压零件的成形过程有充分的认识，在当前板料冲压成形生产中利用先进的计算机辅助工程（Computer Aided Engineering，简称 CAE）分析技术进行具体冲压零件的成形过程数值模拟，可以及早发现问题，改进模具设计，从而大大缩短调模试模周期，降低制模成本等。正因为如此，板料冲压成形 CAE 分析技术在近几十年中一直是板料成形领域的研究热点之一。

板料冲压成形 CAE 分析技术现已进入实际应用阶段，许多较为成熟的商业化软件已经得到了广泛的应用，如：AUTOFORM、LS-DYNA3D、FORMSYS、PAM-STAMP、ROBUST 以及 DYNAFORM 等。典型的板料冲压成形 CAE 分析系统如图 1-1 所示，例如目前在汽车工业领域，许多国内外大型汽车制造企业从汽车冲压零件的结构设计、冲模设计、调试直至投产的整个过程中贯穿了 CAE 分析技术，极大地缩短了冲压零部件的开发周期，产生了巨

大的经济效益。采用 CAE 分析技术已成为当前进行板料冲压成形应用研究最有效方法之一。

1.2 | 板料冲压成形 CAE 分析有限元理论

板料冲压成形研究中所运用的 CAE 分析技术，其核心是应用数值分析方法研究板料塑性成形理论问题，板料冲压成形 CAE 分析系统及涉及的主要问题，可参考图 1-1 所示。

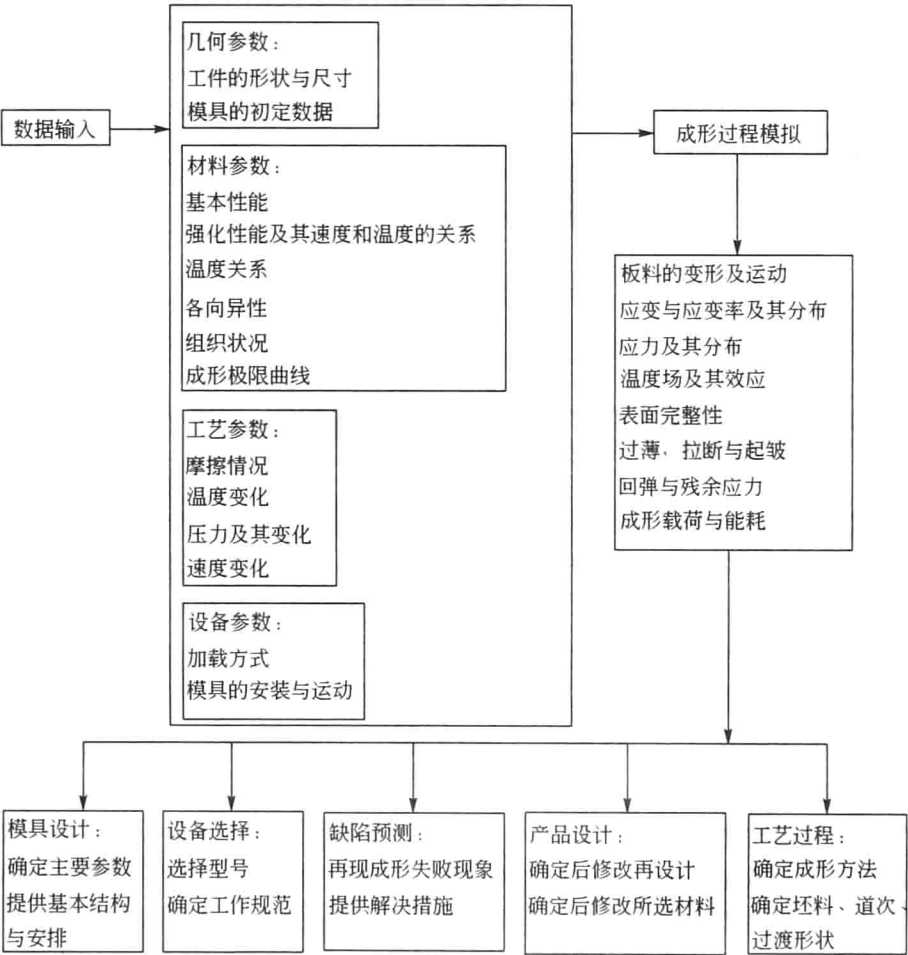


图 1-1 板料冲压成形 CAE 分析系统

基于有限元理论进行的板料冲压成形 CAE 分析过程是一个材料条件、几何条件和边界条件三重非线性相互耦合的复杂成形过程，它与材料体积成形 CAE 分析过程相比较，具有以下特点：

- （1）板料冲压成形是一个大挠度、大变形的问題，必须要采用有限变形理论才能正确地描述其变形特点。
- （2）弹性变形和回弹不容忽略，必须加以考虑，一般不采用刚塑性材料模型，而采用弹塑性材料模型。
- （3）由于材料本构关系和屈服条件具有相关性，必须选择能够描述板料各向异性特点的屈服准则。

(4) 当板料冲压成形的挠度达到板厚的量级时, 还必须要考虑到弯曲效应, 选取合适的单元类型。

在板料冲压成形 CAE 分析过程中涉及的核心内容及其所采用的一些关键技术见表 1-1。

表 1-1 板料冲压成形数值模拟核心内容和关键技术

核 心 内 容	关 键 技 术
模具和工件的几何建模	点阵法、解析法、有限元网格法、参数法
有限元力学模型的建立	有限变形理论、应力状态、应变状态
有限元分析模型的建立	有限单元类型选择、有限元网格划分
板壳理论	板壳理论基本假设、各种板壳单元计算效率和计算精度
弹性本构关系	屈服准则的建立、流动准则的建立
模具和工件间接触界面处理	接触点处理、接触力计算、接触应力的计算
模具和工件间摩擦力的计算	摩擦机理、摩擦定律、摩擦力计算
有限元方程的求解方法	隐式法、显式法、隐式显式综合法

板料塑性成形有限元理论分为固体塑性有限元法（包括小变形和大变形弹塑性有限元法）和流体塑性有限元法（包括刚塑性有限元法和刚粘塑性有限元法）。研究板料冲压成形主要采用固体塑性有限元法中的大变形弹塑性有限元法。大变形弹塑性有限元法同时考虑了材料的弹性和塑性变形状态，弹性区采用 Hook 定律，塑性区采用 Prandtl-Reuss 方程和 Mises 屈服准则。大变形弹塑性有限元法以有限变形理论为基础，考虑到了大变形过程中的大位移和大转动对单元形状和有限元计算的影响。采用弹塑性有限元法分析板料冲压变形过程，不仅能够按照变形路径得到塑性区的变化，变形体的应力、应变分布规律和大小以及几何形状的变化，而且还能有效处理卸载问题，计算残余应力和残余应变，从而可以进行成形缺陷的分析预测。

1.2.1 有限变形的应变张量

考虑一个在固定笛卡儿坐标系内的物体，在某种外力的作用下连续地改变其位形。如图 1-2 所示。用 ${}^0x_i (i=1,2,3)$ 表示物体处于 0 时刻位形内任一点 P 的坐标，用 ${}^0x_i + d^0x_i$ 表示和 P 点相邻的 Q 点在 0 时刻位形内的坐标。由于外力作用，在以后的某个时刻 t 物体运动并变形到新的位形，用 tx_i 和 ${}^tx_i + d^tx_i$ 分别表示 P 点和 Q 点在 t 时刻位形内的坐标，可以将物体位形变化看作是从 0x_i 到 tx_i 时的一种数学上的变换。对于某一固定的时刻 t ，这种变换可以表示为：

$${}^tx_i = {}^tx_i({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \tag{1-1}$$

根据变形的连续性要求，这种变换必须是一一对应的，也即变换应是单值连续的，因此，上述变换应有唯一的逆变换，即存在下列单值连续的逆变换：

$${}^0x_i = {}^0x_i({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3) \tag{1-2}$$

利用上述变换，可以将 d^0x_i 和 d^tx_i 表示成：

$$d^0x_i = \left(\frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^tx_j} \right) d^tx_j, \quad d^tx_i = \left(\frac{\partial {}^tx_i}{\partial {}^0x_j} \right) d^0x_j \tag{1-3}$$

将 P 、 Q 两点之间在时刻 0 和时刻 t 的距离 d^0s 和 d^ts 表示为：

$$(d^0 s)^2 = d^0 x_i d^0 x_i = \left(\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_m} \right) \cdot \left(\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_n} \right) d^t x_m d^t x_n \quad (1-4)$$

$$(d^t s)^2 = d^t x_i d^t x_i = \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_m} \right) \cdot \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_n} \right) d^0 x_m d^0 x_n \quad (1-5)$$

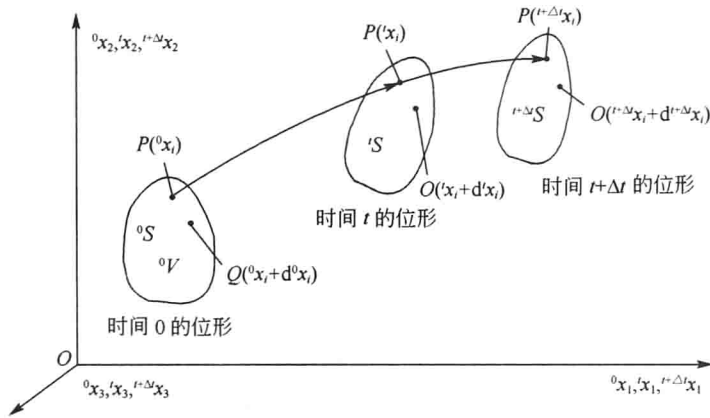


图 1-2 笛卡儿坐标系内物体的运动和变形

变形前后该线段长度的变化，即为变形的度量，可有两种表示，即：

$$(d^t s)^2 - (d^0 s)^2 = \left(\frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_i} \cdot \frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) d^0 x_i d^0 x_j = 2^t E_{ij} d^0 x_i d^0 x_j \quad (1-6)$$

$$(d^t s)^2 - (d^0 s)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_i} \cdot \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_j} \right) d^t x_i d^t x_j = 2^t e_{ij} d^t x_i d^t x_j \quad (1-7)$$

这样就定义了两种应变张量，即：

$$^t E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_i} \cdot \frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (1-8)$$

$$^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_i} \cdot \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_j} \right) \quad (1-9)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$^t E_{ij}$ 是 Lagrange 体系的 Green 应变张量，它是用变形前坐标表示的，是 Lagrange 坐标的函数。 $^t e_{ij}$ 是 Euler 体系的 Almansi 应变张量，是用变形后坐标表示的，它是 Euler 坐标的函数。

为了得到应变和位移的关系方程，引入位移场：

$$^t u_i = ^t x_i - ^0 x_i \quad (1-10)$$

$^t u_i$ 表示物体中一点从变形前（时刻 0）位形到变形后（时刻 t ）位形的位移，它可以表示为 Lagrange 坐标的函数，也可表示为 Euler 坐标的函数，从式（1-10）可得：

$$\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^t u_i}{\partial^t x_j} \quad (1-12)$$

将它们分别代入式 (1-8) 和式 (1-9), 可得:

$${}^t E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^t u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (1-13)$$

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_i}{\partial^t x_j} + \frac{\partial^t u_j}{\partial^t x_i} - \frac{\partial^t u_k}{\partial^t x_j} \frac{\partial^t u_k}{\partial^t x_i} \right) \quad (1-14)$$

当位移很小时, 式 (1-13)、式 (1-14) 中位移导数的二次项相对于它的一次项可以忽略, 这时 Green 应变张量 E_{ij} 和 Almansi 应变张量 e_{ij} 都简化为无限小应变张量 ε_{ij} , 它们之间的差别消失, 即:

$$E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (1-15)$$

由于 Green 应变张量是参考于时间 0 的位形, 而此位形的坐标 ${}^0 x_i (i=1,2,3)$ 是固结于材料的坐标, 当物体发生刚体转动时, 微线段的长度 ds 不变, 同时 $d^0 x_i$ 也不变, 因此联系 ds 变化和 $d^0 x_i$ 的 Green 应变张量的各个分量也不变。在连续介质力学中称这种不随刚体转动的对称张量为客观张量。

1.2.2 有限变形的应力张量

为了能对大变形进行分析, 就必须要将应力和应变联系, 当定义和有限应变相对应的应力时, 也必须参照相同的坐标。

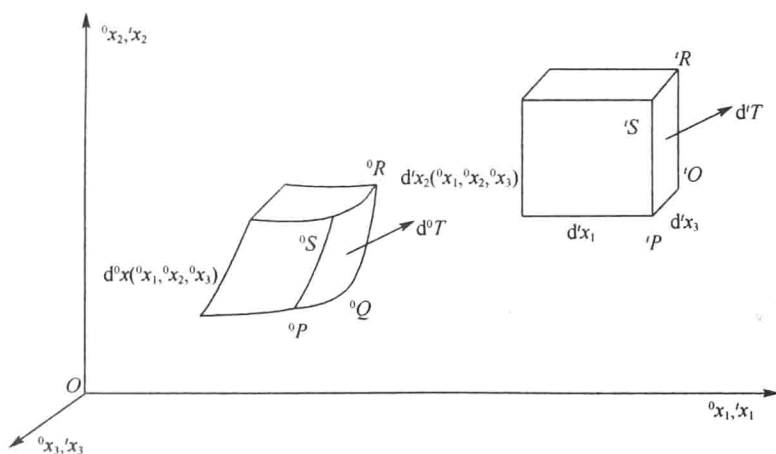


图 1-3 微元体变形前后的作用力

图 1-3 表示一个微元体变形前后作用在一个侧面上力的情况, 左边微元体为变形前的状态, 考察其一个侧面 ${}^0P{}^0Q{}^0R{}^0T$, 该面法向的方向余弦为 ${}^0\nu_i$, 其面积为 d^0s , 右边为变形后微元体, 侧面 ${}^0P{}^0Q{}^0R{}^0T$ 变为 ${}^1P{}^1Q{}^1R{}^1T$, 其单位方面矢量为 ${}^1\nu_i$, 其面积为 d^1s 。如果研究应力时参照变形后的当前坐标系, 则作用在 ${}^1P{}^1Q{}^1R{}^1T$ 面上的力 d^1T_i (其分量是 d^1T_i):

$$d^1T_i = {}^1\sigma_{ij} {}^1\nu_j d^1s \quad (1-16)$$

这种用 Euler 体系定义的应力称为 Cauchy 应力 (${}^1\sigma_{ij}$), 此应力张量有明确的物理意义,

代表真实的应力。同样对 dT_i 也即变形后 $'P'Q'R'T$ 面上的力系采用 Lagrange 体系, 用变形前坐标定义应力, 有:

$$d'T_i = 'T_{ij}^0 \nu_j^0 ds \quad (1-17)$$

这样定义的应力称为 Lagrange 应力, 也称为第一皮阿拉-克希霍夫应力 (First Piola-Kirchhoff stress)。Lagrange 应力不是对称的, 不便于数学计算, 因此将 Lagrange 应力前乘以变形梯度 $\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_k}$ 得:

$$\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_k} d'T_k = 'S_{ij}^0 \nu_j^0 ds = \frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_k} 'T_{jk}^0 \nu_j^0 ds \quad (1-18)$$

这样定义的应力称为 Kirchhoff 应力, 或称为第二皮阿拉-克希霍夫应力 (Second Piola-Kirchhoff stress)。

Kirchhoff 应力无实际物理意义, 但是它与 Green 应变相乘构成真实的变形能。Cauchy 应力是真实的精确应力, 因为它考虑了物体的变形, 也即 dT 的真实作用面积, 显然比起工程应力 (未考虑物体变形) 要准确。同样 Cauchy 应力与 Almansi 应变相乘构成真实应变能, 这种关系称为共轭关系。

根据 $\nu_j d's$ 和 $^0\nu_j d^0s$ 之间的关系, 可以导出 $'\sigma_{ij}$ 、 $'T_{ij}$ 和 $'S_{ij}$ 之间的关系如下:

$$'T_{ij} = \frac{^0\rho}{^t\rho} \frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_m} ' \sigma_{mj} \quad (1-19)$$

$$'S_{ij} = \frac{^0\rho}{^t\rho} \frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_l} \frac{\partial^0 x_j}{\partial^t x_m} ' \sigma_{lm} \quad (1-20)$$

其中 $^0\rho$ 和 $^t\rho$ 分别是变形前后微体的材料密度。

由于 Cauchy 应力张量 $'\sigma_{ij}$ 是对称的, 由式 (1-19) 可知, Lagrange 应力张量 $'T_{ij}$ 是非对称的。而 Kirchhoff 应力张量 $'S_{ij}$ 是对称的。故在定义应力应变关系时通常不采用 Lagrange 应力, 而采用对称的 Kirchhoff 应力和 Cauchy 应力, 因为应变张量总是对称的。另外, Kirchhoff 应力张量 $'S_{ij}$ 具有和 Green 应变张量类似的性质, 物体发生刚体转动时各个分量保持不变。

1.2.3 几何非线性有限元方程的建立

(1) 根据静力分析方法建立几何非线性有限元方程

在涉及几何非线性问题的有限元法中, 通常都采用增量分析方法, 考虑一个在笛卡儿坐标系内运动的物体, 如图 1-3 所示。增量分析的目的是确定此物体在一系列离散的时间点 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 处于平衡状态的位移、速度、应变、应力等运动学和静力学参量。假定问题在时间 0 到 t 的所有时间点的解答已经求得, 下一步需要求解时间为 $t+\Delta t$ 时刻的各个未知量。

在 $t+\Delta t$ 时刻的虚功原理可以用 Cauchy 应力和 Almansi 应变表示:

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} dv = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} F_k \delta u_k dv + \int_{t+\Delta t S_T} {}^{t+\Delta t} T_k \delta u_k ds \quad (1-21)$$

式 (1-21) 是参照 $t+\Delta t$ 时刻位形建立的, 由于 $t+\Delta t$ 时刻位形是未知的, 如果直接求解, 在向平衡位形逼近的每一步迭代中, 都要更新参照体系, 导致了计算量的增加。方便起见, 所有变量应参考一个已经求得的平衡构形。理论上, 时间 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ 等任一时刻已