任务型语码转换式双语教学系列教材

总主编 刘玉彬 副总主编 杜元虎 总主审 段晓东

数学与统计学

MATHEMATICS AND STATISTICS

主 编 王立冬 周文书

大连理工大学出版社

任务型语码转换式双语教学系列教材

总主编 刘玉彬 副总主编 杜元虎 总主审 段晓东

数学与统计学

MATHEMATICS AND STATISTICS

主　编 王立冬 周文书

副主编 刘　满 张　友

主　审 袁学刚 卢　静

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学与统计学 / 王立冬，周文书主编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2014.8

任务型语码转换式双语教学系列教材

ISBN 978-7-5611-9442-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①王… ②周… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材②统计学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13 ②C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 180251 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023

发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连业发印刷有限公司印制　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：183mm×233mm　印张：22.75　字数：740 千字

2014 年 8 月第 1 版　　2014 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：邵　婉　　责任校对：齐　悦

封面设计：波　朗

ISBN 978-7-5611-9442-3　　定　价：40.00 元

总序 PREFACE

2014年的初夏，我们为广大师生奉上这套“任务型语码转换式双语教学系列教材”。

“任务型语码转换式双语教学”是双语教学内涵建设的成果，主要由两大模块构成：课上，以不影响学科授课进度为前提，根据学生实际、专业特点、学年变化及社会需求等，适时适量地渗透英语专业语汇、语句、语段或语篇，“润物细无声”般地扩大学生专业语汇量，提高学生专业英语能力；课外，可向学生提供多种选择的“用中学”平台，如英语科技文献翻译、英语实验报告、英语学术论文、英语小论文、英语课程设计报告、模拟国际研讨会、英语辩论、工作室英语讨论会等，使学生的专业英语实践及应用达到一定频度和数量，激活英语与学科知识的相互渗透，培养学生用英语学习、科研、工作的能力及适应教育国际化和经济一体化的能力。

为保证“任务型语码转换式双语教学”有计划、系统、高效、科学地持续运行，减少教学的随意性和盲目性，方便师生的教与学，我们编写了这套“任务型语码转换式双语教学系列教材”。

本套教材的全部内容均采用汉英双语编写。

教材按专业组册，涵盖所有主干专业课和专业基础课，力求较为全面地反映各学科领域的知识体系。

分册教材编写以中文版课程教材为单位，即一门课为分册教材的一章，每章内容以中文版教材章节为序，每门课以一本中文教材为蓝本，兼顾其他同类教材内容，蓝本教材绝大部分是面向21世纪的国家规划教材。

教材的词汇短语部分，注意体现学科发展的新词、新语，同时考虑课程需求及专业特点，在不同程度灵活渗透了各章节的重要概念、定义，概述了体现章节内容主旨的语句及语段。分册教材还编写了体现各自专业特点的渗透内容，如例题及解题方法，课程的发生、发展及前沿简介，图示，实验原理，合同文本，案例分析，法条，计算机操作错误提示等。

部分教材补充了中文教材未能体现的先进理论、先进工艺、先进材料或先进方法的核心内容，弥补了某些中文教材内容相对滞后的不足；部分教材概述了各自专业常用研究方法、最新研究成果及学术发展的趋势动态；部分

教材还选择性地把编者的部分科研成果转化为教材内容，以期启发学生的创新思维，开阔学生的视野，丰富学生的知识结构，从教材角度支持学生参与科研活动。

本套教材大多数分册都编写了对“用中学”任务实施具有指导性的内容，应用性内容的设计及编写比例因专业而异。与专业紧密结合的应用性内容包括英语写作介绍，如英语实验报告写作，英语论文写作，英语论文摘要写作，英语产品、作品或项目的概要介绍写作等。应用性内容的编写旨在降低学生参与各种实践应用活动的难度，提高学生参与“用中学”活动的可实现性，帮助学生提高完成“用中学”任务的质量水平。

考虑学生英语写作和汉译英的方便，多数分册教材都编写了词汇与短语索引。

“任务型语码转换式双语教学系列教材”尚属尝试性首创，是多人辛勤耐心劳作的结果。尽管在编写过程中，我们一边使用一边修改，力求教材的实用性、知识性、先进性融为一体，希望教材能对学生专业语汇积累及专业资料阅读、英语写作、英汉互译能力的提高发挥作用；尽管编者在教材编写的同时也都在实践“任务型语码转换式双语教学”，但由于我们缺乏经验，学识水平和占有资料有限，加上为使学生尽早使用教材，编写时间仓促，在教材内容编写、译文处理、分类体系等方面存在缺点、疏忽和失误，恳请各方专家和广大师生对本套教材提出批评和建议，以期再版时更加完善。

在教材的编写过程中，大量中外出版物中的内容给了我们重要启示和权威性的参考帮助，在此，我们谨向有关资料的编著者致以诚挚的谢意！

编　者
2014 年 5 月

前言
FOREWORD

随着科学技术的飞速发展，数学不仅被广泛深入地应用于自然科学、信息技术和工程技术，而且已渗透到诸如生命科学、社会科学、环境科学、军事科学、经济科学等领域，它已成为表达严格科学思想的媒介，人们越来越深刻地认识到，没有数学就难以取得当代的科学成就。正是由于自然科学各学科数学化的趋势以及社会科学各部门定量化的要求，许多学科都或直接或间接、或先或后地经历着数学化的进程。现在已经没有哪一领域能够抵御得住数学的渗透，这正诠释了马克思所说“一门科学只有当它达到能够成功地运用数学时，才算真正发展了”的精辟论述。所以在科学王国中，数学占有极为特殊的地位，并作为一门独立科学存在于世。它既是一门专业领域，又是基础(思维)工具；既是语言，又是文化；既能与经管科学交叉，又能与理工结合，且能向文科渗透。

数学的这种特殊位置和应用的广泛性，加之英语作为信息交流的一种重要工具，确定了数学的语言英文表达有着极为重要的意义，它已成为科学技术交流和传播的重要基础工具之一。数学教学与外语的有机结合，有利于学生综合素质的全面提高，顺应时代发展方向。

因此，编写适合双语教学的，同时又与国内数学课程内容相适应的教材已势在必行。

目前，双语教学的教学模式基本有两方面的选择。关于教材，或直接采用原版教材，或采用中文版教材，加外语补充材料。关于授课，则采用全外语授课，或部分外语授课，或在使用原版教材的基础上采用全中文授课。各高校大多根据学生的外语水平及教师的外语特长在上述几种情况中选择。近年来，学生的外语水平有了明显的提高，师资的外语及专业能力也有了本质上的变化。因此，双语教学的模式也面临真正意义上的提升。

数学课程实施双语教学的目的在于提高数学教育教学质量。通过双语教学，学生可以学习国外先进的学科体系、教学理念和丰富的数学逻辑内涵以及数学在其他学科领域中的基本应用。本教材引文内容以高等学校数学课程教学大纲为依据，参考多种国外原版教材，以使语言表述准确、地道；书中内容涵盖了数学课程中的主要数学概念、常见的专业词汇等，前面加★的词汇表示重点词汇，必须掌握。

编写本书的直接目的是为讲授数学课程的广大教师和学习数学课程的学生提供掌

握相关内容的英文描述服务，进而使得学生学过本课程后，能够独立阅读相关的英文教材和文献，进而提升英语科技文献翻译以及使用英语撰写英语实验报告、英语课程设计报告以及英语学术论文的实际能力。它既可作为学生学习数学课程的配套教材和扩大知识领域的参考书，也可作为数学专业英语词汇查找的工具书。

参与本书编写的人员有(按姓氏拼音为序)：楚振艳、丁淑妍、董莹、葛仁东、焦佳、李阳、刘恒、刘力军、刘满、李秀文、卢静、吕娜、马玉梅、牛大田、齐淑华、曲程远、孙雪莲、藤颖俏、王金芝、王书臣、徐毅、佘军、张友、张誉铎。

大连民族学院开展“任务型语码转换式双语教学”已有多年，特别是结合本校师资及学生特点施行的“渗透式双语教学”工作已获得国家级教学成果二等奖。这种双语教学模式的特点是：根据不影响学生课程授课进度为前提，结合学生实际、专业特点、学年变化及社会需求等，适时适量地渗透英语专业词汇、语句、语段或语篇，“润物细无声”般地扩大学生专业词汇量，提高学生专业英语能力。本书是我们进行双语教学的又一次有益尝试，也是一个新的阶段总结，恳请各位专家、同行以及广大读者提出宝贵的建议和意见，我们会一直努力！

编 者

2014 年 7 月

目录 CONTENTS

目录 CONTENTS

数学基础课程

第一部分　数学分析

Part 1　Mathematical Analysis

引言

数学分析的萌芽、发生与发展，经历了一个漫长的时期．萌芽时期是从古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus，约公元前 408～355)提出穷竭法和阿基米德(Archimedes，公元前 287～212)用穷竭法求出抛物线弓形的面积开始．公元 263 年，刘徽为《九章算术》作注时提出"割圆术"，以及 1328 年英国大主教布雷德沃丁(Bradwardine，1290～1349)在牛津发表著作中给出类似于均匀变化率和非均匀变化率的概念，这些都是极限思想的成功运用．到 16 世纪中叶，数学分析正式进入了酝酿阶段，其中有两部著作在当时有很大的影响：一是德国数学家开普勒(Kepler，1571～1630)的《新空间几何》；另一部是意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri，1598～1647)的《不可分量几何》．

17 世纪上半叶开始到中叶是数学分析的奠基性工作阶段．主要先驱有法国的帕斯卡(Pascal，1623～1662)和费马(Fermat，1601～1665)，英国的沃利斯(Wallis，1616～1703)和巴罗(Barrow，1630～1677)．

17 世纪下半叶，牛顿(Newton，1642～1727)和莱布尼茨(Leibniz，1646～1716)在总结前人工作的基础上分别独立地给出了微积分的概念．微积分诞生以后，曾就它是否严密及基础是否稳固爆发过一场大的争论，为此有许多数学家企图弥补出现的不严密性，如英国数学家麦克劳林(Maclaurin，1698～1746)、泰勒(Taylor，1685～1731)，法国数学家达朗贝尔(D'Alembert，1717～1783)等，其中，达朗贝尔曾试图将微积分的基础归结为极限，但遗憾的是，他并未沿着这条路走到底．

与此同时，许多数学家在不严密的基础上对微积分创立了许多辉煌的成就：如瑞士数学家欧拉(Euler，1707～1783)以微积分为工具解决了大量的天文、物理、力学等问题，开创了微分方程、无穷级数、变分学等诸多新学科．1748 年他出版了《无穷小分析引论》——世界上第一本完整的有系统的分析学用书．还有法国数学家拉格朗日(Lagrange，1736～1813)、拉普拉斯(Laplace，1749～1827)、勒让德(Legendre，1752～1833)、傅里叶(Fourier，1768～1830)等在分析学方面都作了重大的贡献，但在微积分基础上仍没有找到解决的办法．

进入 19 世纪以后，分析学的不严密性到了非解决不可的地步！但那时还没有变量和极限的严格定义，不知道什么是连续，不知道什么是级数的收敛性．定积分的存在性都是含糊不清的，这可从挪威数学家阿贝尔(Abel，1802～1829)在 1826 年所说的"在高等分析中仅有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的形式证明，人们到处发现从特殊跳到一般的不可靠的推论方法"这句话中看出．为了解决分析的严密性问题，捷克数学家波尔查诺(Bolzano，1781～1848)，挪威的阿贝尔和法国的柯西(Cauchy，1789～1857)作了大量的工作．1821 年，法国理工大学教授柯西写了《分析教程》一书，将分析学奠定在极限的概念之上，把纷乱的概念理出了一个头绪．但是他的叙述仍然使用"无限趋近"之类的语言，仍不是严格的．因此遭到了一些数学家的反对，德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815～1897)就是其中之一，他认为变量无非是一个字母，用来表示区间的数．这一想法导致了变量 x 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 取值时，$f(x)$ 在 $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ 取值的新方法．由此得到了如今广泛使用的"ε-δ"语言．

因为分析学使用的工具是极限，而极限又要用到实数．因此，分析学的严密性是建立在实数理论基础上的．而在这方面，法国数学家柯西、梅雷(Méray，1835～1911)以及德国数学家海涅(Heine，1821～1881)、康托(Cantor，1845～1918)、戴德金(Dedekind，1831～1916)等都为建立实数理论作出了贡献．

19 世纪后半叶，数学分析在理论上有了很大进展，1870 年海涅提出了一致连续的概念；1895 年法国数学家波莱尔(Borel，1871～1956)给出了有限覆盖定理；1872 年魏尔斯特拉斯给出了处处连续而不

可微的例子;德国数学家黎曼(Riemann, 1826～1866)和法国数学家达布(Darboux, 1842～1917)分别于1854年和1885年给出了有界函数可积性的定义和充要条件. 这些概念和例子构成了现今数学分析教科书的主要内容. 现在,数学分析已根植于自然科学和社会科学的各学科分支之中. 微积分作为数学分析的基础,不仅要为全部数学方法和算法工具提供方法论,同时还要为人们灌输逻辑思维方法. 目前数学分析的主要内容已是高校数学专业必修课和理工管等学科的重要基础课之一.

数学分析已形成四大块结构:分析引论、微分学、积分学、无穷级数与广义积分. 数学分析的立论数域是实数连续统,研究的主要对象是函数,研究问题使用的主要工具是极限.

Introduction

The germination, appearance and development of Mathematical Analysis went through a long period. The germination period started from the method of exhaustion put forward by the ancient Greek mathematician Eudoxus (about 408～355 BC) and Archimedes (about 287～212 BC) who worked out the area of parabolic arch. The idea of limits is well put into practice, such as, in 263 BC, Liu Hui raised "Cyclotomic Method" as he glossed for a book named *Nine Chapters of Arithmetic*; In 1328, the British archbishop Bradwardine (1290～1349) gave the definition for homogeneous rate of change and non-homogeneous of change in his book published in Oxford. By the middle of the 16th century, the preparing period of Mathematical Analysis really started. Two famous works made great influence at that time. One was *New Space Geometry* by the German mathematician Kepler (1571～1630), another was *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* by the Italian mathematician Cavalieri (1598～1647).

Great foundation of Mathematical Analysis had been laid from the early 17th century to the middle of 17th century. Among the pioneers were Pascal (1623～1662) and Fermat (1601～1665) from France, Wallis (1616～1703) and Barrow (1630～1677) from UK.

In the late 17th century, Newton (1642～1727) and Leibniz (1646～1716) founded Calculus based on the works of early mathematicians. Right after its birth, there was a heated debate over whether it was logically strict and fundamentally stable. Consequently, many mathematicians tried to remedy its loose foundation, among whom were Maclaurin (1698～1746) and Taylor (1685～1731) from UK, D'Alembert (1717～1783) from France. In particular, D'Alembert once tried to define the base of calculus to limit, but to our regret, abandoned the idea halfway.

Meanwhile, many mathematicians had made great achievement on the loose Calculus. For example, the Switzerland mathematician Euler (1707～1783), by using Calculus as a tool, solved many problems in the fields of astronomy, physics and mechanics, and also founded many new subjects such as differential equations, infinite series and calculus of variations. And the first systematically integrated book on analysis, *Introductio in Analysin Infinitorum*, was published in 1748. Moreover, Lagrange (1736～1813), Laplace (1749～1827), Legendre (1752～1833), Fourier (1768～1830) also contributed a lot to Mathematical Analysis. But no efficient solution to the loose base of Mathematical Analysis had been found.

Stepping into the 19th century, the loose foundation of Mathematical Analysis came up to the degree that had to be solved. But there were no strict definition for variable and limits. Terms such as continuity and the convergence of series were unknown. The existence of definite integral was still ambiguous, which could be seen from the statement of the Norwegian mathematician Abel (1802～1829) in 1826, "Only few proofs of the theorems in advanced analysis can logically hold water. Unreliable reasoning methods drawing conclusions of general cases from special ones can be found everywhere". In order to solve the loose foundation of Mathematical Analysis, the Czechic mathematician Bolzano (1781～1848), the Norway mathematician Abel and the French mathematician Cauchy(1789～1857) did great amount of work. In 1821, Prof. Cauchy, the Science and Engineering university of France, wrote the book *Analysis Course*, in which Mathematical Analysis was defined on the concept of limit, and thus got a major line out of the disorderly numerous concepts. But the language was still not strict enough to avoid the expressions such as "approach infinitely", thus met the opposition of some mathematicians, among whom was the German mathematician Weierstrass (1815～1897) who believed that the variable was not more than a letter, which is used to represent the number in an interval. This idea resulted in the new method that if x belongs to the interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, then $f(x)$ must be a number of the interval $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$. Hence today's widely used "ε-δ" language came into being.

Since the tool of Mathematical Analysis is limit, which is related to real numbers, the strictness of Mathematical Analysis is based on the real number theory. In this aspect, the French mathematician Cauchy, Méray (1835～1911), the German mathematician Heine (1821～1881), Cantor (1845～1918) and Dedekind (1831～1916) all made great contribution to the foundation of real number theory.

In the late 19^{th} century, the theoretical developments of Mathematical Analysis are very rapid: In 1870, Heine put up the concept of uniform continuity. In 1895, Borel (1871～1956) gave the theorem of finite covering. In 1872, Weierstrass gave a function which is continuous at every point but not differentiable. In 1854 and 1885, the German mathematician Riemann (1826～1866) and the French mathematician Darboux (1842～1917) respectively gave the definition of bounded function, integrability and its necessary and sufficient conditions. All of these made up the major contents of Mathematical Analysis nowadays. At present, Mathematical Analysis is rooted in different subjects of natural science and social science. Calculus, as the base of Mathematical Analysis, not only supplies all mathematical methods and algorithms with methodology, but also cultivates people's thinking mode. Presently, the major contents of Mathematical Analysis have already become the compulsory course for math majors, and the selective course for science, engineering and management majors.

Mathematical Analysis has formed a structure composed of four major parts: analysis theory, differentials, integrals, infinite series and generalized integrals. Mathematical Analysis is founded on the continuum of real numbers, and the subject for study in Mathematical Analysis is functions. The major research tool in Mathematical Analysis is limits.

第一章　实数集与函数

Chapter 1　Set of Real Numbers and Functions

初等数学中研究的主要对象基本上是常量，而在数学分析中我们研究的是变量．变量的变化范围是实数集．变量之间的对应关系是函数．本章的内容主要包括实数、函数、复合函数、初等函数的基本概念及它们的一些性质．

The main object investigated in Elementary Mathematics is constant quantities, while it is variables that we investigate in Mathematical Analysis. The changeable domain of a variable is a set of real numbers and the correspondent relation between variables is called a function. The contents of this chapter mainly include some fundamental concepts such as real numbers, functions, composite functions, elementary functions and their properties.

单词和短语 Words and expressions

实数及其性质　real number and its properties
有理数　rational number
无理数　irrational number
定义　definition　[defi'niʃən]
命题　proposition　[prɔpə'ziʃən]
加　plus
减　minus
乘　multiplied by / times
除　over / is to / divided by
绝对值与不等式　absolute value and inequality
三角不等式　triangle inequality
反三角不等式　inverse triangle inequality
伯努利不等式　Bernoulli inequality
确界原理　principles of supremum and infimum
开区间　open interval
闭区间　closed interval
半开区间　semi-open interval
半闭区间　semi-closed interval
有限区间　finite interval
无限区间　infinite interval

邻域 neighborhood
去心邻域 deleted neighborhood
和 sum
差 difference
积 product ['prɔdəkt]
商 quotient ['kwəuʃənt]
数轴 number axis / number line
封闭性 closeness
阿基米德性质 Archimedean property
稠密性 density
上界与下界 upper and lower bounds
有界集 bounded set
无界集 unbounded set
存在域 existence domain
上确界 supremum
下确界 infimum
有序完备集 order-complete set
实数的完备性 completeness of real numbers
全序域 complete ordered field
完备性公理 axiom of completeness
戴德金分割 Dedekind cut
戴德金性质 Dedekind property
常量与变量 constant and variable quantities
函数的定义 definition of function
定义域 domain
值域 range
自变量 independent variable
因变量 dependent variable
中间变量 intermediate variable
单调性 monotonicity
初等函数 elementary function
常量函数 constant function
幂函数 power function
指数函数 exponential function
对数函数 logarithmic function
三角函数 trigonometric function
反三角函数 inverse trigonometric function
反函数 inverse function
复合函数 compound function
映射 mapping
逆映射 inverse mapping
像 image
原像 primary image
分段函数 piecewise function
符号函数 sign function
狄利克雷函数 Dirichlet function
黎曼函数 Riemann function
有界函数 bounded function
单调函数 monotone function
单调增函数 monotone increasing function
严格单调函数 strictly monotone function
奇(偶)函数 odd (even) function
周期函数 periodic function
最小正周期 minimal positive period
绝对值函数 absolute value function
恒等函数 identity function
多项式函数 polynomial function
线性函数 linear function
二次函数 quadratic function
有理函数 rational function
双曲正弦 hyperbolic sine
双曲余弦 hyperbolic cosine
三角恒等式 trigonometric identity
奇偶恒等式 odd-even identity
余函数恒等式 cofunction identity
毕达哥拉斯恒等式 Pythagorean identity
半角恒等式 half-angle identity
积恒等式 product identity
和恒等式 sum identity
加法恒等式 addition identity
倍角恒等式 double-angle identity

基本概念和性质 Basic concepts and properties

1 非空实数集 S 称为有上界(下界),如果存在数 $M(L)$,使得对一切 $x \in S$,都有 $x \leqslant M$ ($x \geqslant L$). 数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界).

A nonempty set S of real numbers is said to have upper (lower) bound provided that there is a number $M(L)$ having the property that $x \leqslant M(x \geqslant L)$ for all x in S. Such number $M(L)$ is called an upper bound (a lower bound) for S.

2 集称为有界的,如果集既有上界又有下界.

A set is said to be bounded if it has not only upper bound but also lower bound.

3 如果集 S 的所有上界集合有最小元 M, 则 M 称为集 S 的上确界(或最小上界).

If the set of all upper bounds of a set S has the smallest number M, then M is called the supremum (or the least upper bound) of S.

4 集 S 的上确界 M 有下列两个性质：(i) M 是集 S 的上界，即对任意 $x \in S$，有 $x \leqslant M$；(ii)没有比 M 小的数是 S 的上界，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in S$，使得 $y > M - \varepsilon$.

The supremum M of a set S has the following two properties: (i) M is an upper bound of S, i. e. , for any $x \in S$, we have $x \leqslant M$; (ii) No numbers less than M can be an upper bound, i. e. , for any positive number ε, there exists a number $y \in S$, such that $y > M - \varepsilon$.

本章重点

因为在数学分析中一元函数微积分讨论问题的范围是实数. 而函数是数学分析研究的主要对象. 所以对于实数与函数必须掌握如下几点：

1 为什么要学习实数?
2 为什么要引入确界的概念?
3 为什么要学习绝对值不等式?
4 何谓函数? 怎样确定函数的定义域? 何谓函数的值域?
5 映射与函数的区别是什么?
6 何谓初等函数?
7 掌握复合函数概念，会将复合函数“分解”为基本的初等函数.

Key points of this chapter

Because the scope for problems discussed in unary calculus is real numbers, but functions are the main object in Mathematical Analysis, and thus the following points must be mastered for real numbers and functions.

1 Why are real numbers studied?
2 Why are the notions of supremum and infimum introduced?
3 Why is the absolute value inequality studied?
4 What is a function? How to determine the domain of a function? What is the region of a function?
5 What is the difference between mapping and function?
6 What is an elementary function?
7 Master the notion of composite functions and the method to “decompose” composite functions into basic elementary functions.

第二章 数列极限

Chapter 2 Limits of Sequences

数学分析中研究问题的主要工具是极限，而实数列是最简单也是最重要的函数之一. 事实上，一般函数的许多性质都能由所了解的数列得到. 所以本章的内容包括实数列的极限、收敛数列的性质、收敛数列的运算法则、数列极限存在的判别准则等.

The major research tool in Mathematical Analysis is limit, while sequences of real numbers are the most simple, but one of the most important functions. In fact, many properties of general functions can be deduced from the understanding of sequences. Accordingly, the contents of this chapter include limits of sequences of real numbers, properties of convergent sequences, operational rules of convergent sequences, existence criteria of limits of sequences, and so on.

单词和短语 Words and expressions

★ 数列极限　limit of sequence
发散数列　divergent sequence
无穷小数列　infinitesimal sequence
收敛数列　convergent sequence
★ 唯一性定理　uniqueness theorem
★ 有界性定理　boundedness theorem
保序性　inheriting order properties
保不等式性　inheriting inequality

子列 subsequence
严格递增 strictly increasing
单调递增数列 monotone increasing sequence
单调递减数列 monotone decreasing sequence
严格递减 strictly decreasing
必要条件 necessary condition
充分条件 sufficient condition
★ 夹逼定理 squeeze principle
★ 柯西收敛准则 Cauchy convergence criterion

基本概念和性质 Basic concepts and properties

1 收敛数列的和的极限等于极限的和.
The limit of the sum of convergent sequences is equal to the sum of the limits.

2 收敛数列的积的极限等于极限的积.
The limit of the product of convergent sequences is equal to the product of the limits.

3 收敛数列的商的极限等于极限的商.
The limit of the quotient of convergent sequences is equal to the quotient of the limits.

4 定义域为全体自然数集,值域为实数集的函数称为实数列,记为

$$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R} \quad 或 \quad f(n),n\in\mathbf{N}.$$

A function whose domain is the set of natural numbers and range is a set of real numbers is called a real sequence. Thus a real sequence is denoted symbolically by

$$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R} \quad \text{or} \quad f(n),\ n\in\mathbf{N}.$$

5 设 $\{a_n\}$ 为数列,a 为常数. 若对任给的正数 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-a|<\varepsilon$,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a,常数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限,并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a(n\to\infty).$$

Let $\{a_n\}$ be a sequence and a be a constant, $\{a_n\}$ is said to be convergent to a and a is called the limit of $\{a_n\}$ if for any $\varepsilon>0$, there exists a positive integer N, such that $|a_n-a|<\varepsilon$ for all $n>N$, and the limit is denoted by

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \text{ or } a_n\to a(n\to\infty).$$

6 单调数列收敛当且仅当数列有界.
A monotone sequence is convergent if and only if it is bounded.

例题 Examples

例 1 用数列收敛的定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\ |q|<1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$.

证明 (1) 若 $q=0$,则结果是显然的. 令 $\varepsilon>0$,我们要寻找一个自然数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

现设 $0<|q|<1$. 记 $h=1/|q|-1$,则有 $|q|=1/(1+h)$ 和 $h>0$. 因此,对每个自然数 n,由 $(1+h)^n\geqslant 1+nh$ 得到,$|q^n|\leqslant\dfrac{1}{1+nh}<\dfrac{1}{nh}$.

选取自然数 N 使得 $N=1/\varepsilon h$. 因而对所有的 $n>N$,有

$$|q^n-0|=|q^n|<\frac{1}{nh}<\frac{1}{Nh}<\varepsilon.$$

(2) 易证 $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=\dfrac{n(n+1)}{2n^3}=\dfrac{n+1}{2n^2}<\dfrac{n+n}{2n^2}=\dfrac{1}{n}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$,$\forall n>N$,必有 $\left|\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0.$$