高等院校规划教材

数学建模

主编 王 涛 刘瑞芹

煤炭工业出版社

高等院校规划教材

数 学 建 模

主　编　王　涛　刘瑞芹
副主编　王文祥　王　清　陈　藏

煤炭工业出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/王涛，刘瑞芹主编．--北京：煤炭工业出版社，2015

高等院校规划教材

ISBN 978-7-5020-4828-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… ②刘… Ⅲ.①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 059085 号

数学建模（高等院校规划教材）

主　　编　王　涛　刘瑞芹
责任编辑　李振祥
编　　辑　刘　鹏
责任校对　姜惠萍
封面设计　于春颖

出版发行　煤炭工业出版社（北京市朝阳区芍药居 35 号　100029）
电　　话　010-84657898（总编室）
　　　　　　010-64018321（发行部）　010-84657880（读者服务部）
电子信箱　cciph612@126.com
网　　址　www.cciph.com.cn
印　　刷　煤炭工业出版社印刷厂
经　　销　全国新华书店

开　　本　787mm×1092mm $^{1}/_{16}$　**印张**　10　**字数**　233 千字
版　　次　2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
社内编号　7683　**定价**　21.00 元

前　言

数学建模是一门新兴学科，发展迅速且应用广泛。数学建模来源于实践、应用于实践。1992年，全国大学生数学建模竞赛一出现就受到教育界的重视和广大师生的欢迎。20多年来，数学建模竞赛活动和数学建模授课相互促进，共同发展。国内许多高等院校都把数学建模列为数学、计算机、电子、管理等专业的选修课程。

进入21世纪，国内越来越多的高校为与国际接轨，拓展学生的知识面，增强学生的竞争能力，增设了许多新的课程，同时又大大压缩了各门课程的教学学时，因此，在较少的学时内，如何加强学生的实际应用能力是我们高校教师面临的一个新课题。正是针对这种实际情况，我们参考国内许多优秀数学建模著作，结合作者的教学经验，对多年讲授的《数学建模》讲稿进行修改后形成了本书。在选材与内容编排等方面，不仅凝聚了作者多年的教学经验和教学体会，而且体现了教师教学的基本思想。

本书比较全面、简练地介绍了数学建模常用的方法，每种方法都给出了相应的实例。在内容安排上，各章之间既相互联系，又具备各自的系统性和科学性，这给读者的学习提供了极大方便。我们提倡学生先通过数学建模课程的学习，再参加建模竞赛的创新活动。通过学习和实践更多地掌握数学建模知识和数学工具，进一步增强学生的创造力，从而达到培养学生分析问题、解决问题的能力。

本书由王涛、刘瑞芹主编。书中第一章由刘瑞芹编写，第二章、第五章由王涛编写，第三章由王文祥编写，第四章由陈藏编写，第六章由王清编写。本书由魏丽侠教授主审。

限于编者水平有限及编写时间仓促，书中难免有错误和疏漏之处，衷心希望同行专家和读者批评指正。

编　者

2015年4月

内 容 提 要

本书共分 6 章，内容包括数学建模概论、微分方程与差分方程建模、数学规划方法建模、概率统计方法建模、图论方法建模和 Matlab 在数学建模中的应用。

本书可以作为高等院校数学建模、数学文化类课程教材，也可以作为在校大学生课外读物和数学建模竞赛活动的参考书。

目　　次

第一章 数学建模概论

近年来，数学模型和数学建模两个术语使用的频率越来越高，为解决实际问题，利用数学模型是一个非常重要的方法，如何建立恰当的数学模型是关键步骤之一。由于数学建模的过程体现了应用数学知识解决实际问题的全过程，因此，数学建模的训练是提高大学生数学素质的有效途径。

本章介绍数学建模的基本概念、步骤和方法，通过几个典型的建模实例展示其概貌，并介绍初等数学建模的常用方法。

第一节 数学模型与数学建模

一、数学模型

1. 数学模型的概念

模型是客观事物有关属性的模拟，一般分为具体模型和抽象模型两大类。具体模型有直观模型、物理模型等，抽象模型有思维模型、符号模型、数学模型等。例如，飞机模型、展览会里的电站模型、火箭模型等为具体模型，地图、旅游图、电路图、分子结构图、方程等为抽象模型。

数学模型，简单地说，就是对实际问题的一种数学表述。具体地说，是关于部分现实世界的一个抽象的简化的数学结构。更确切地说，数学模型就是对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据对象特有的内在规律，在做出问题分析和一些必要、合理的简化假设后，运用适当数学工具得到的一个数学结构。数学结构可以是数学表达式、算法、程序、表格、图形等。

数学模型是连接数学与实际问题的桥梁，是各种应用问题严密化、精确化、科学化的途径，是发现问题、解决问题的工具。在数学发展的进程中无时无刻不留下数学模型的印记。20 世纪数学模型有了很大的发展，原因在于：一是数学理论的系统化；二是计算机的诞生；三是应用数学的大发展。随着社会的发展，生物、医学、社会、经济等各学科、各行业都涌现出大量的实际问题，这就要求人们运用数学知识及数学的思维方法去研究、去解决。在这个过程中，不是为了应用数学去寻找实际问题，而是为了解决实际问题需要应用数学。我们要对复杂的实际问题进行分析，发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律，把这个实际问题转化成一个数学问题，这就是数学模型。

2. 数学模型的特征

（1）实践性。有实际背景，有针对性，能接受实践的检验。

（2）抽象性。数学模型是对客观事物有关属性进行抽象的模拟，是用数学符号、数学公式、程序、图、表等刻画客观事物的本质属性与内在联系，是现实世界的简化而本质的描述。

（3）经济性。用数学模型研究不需要过多的专用设备和工具，可以节省大量的设备运行和维护费用，也可以缩短研究周期，特别是在电子计算机得到广泛应用的今天，这个优越性就更为突出。

（4）应用性。注意实际问题的要求，强调模型的实用价值。

（5）综合性。数学与其他学科知识的综合。

（6）局限性。在简化和抽象过程中必然造成某些失真，它是为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而成的原型替代物，可以看成原型某一方面的理想化。

3. 数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简，化难为易，便于人们采用定量的方法去分析和解决实际问题。因此，数学模型在科学发展、科学预测、科学管理、科学决策、人口控制、驾控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用。

马克思指出：“一种科学只有成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步”。数学模型给科学研究的对象以定量描述，从而把科学推向更高的层次。回顾科学发展史，数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示及科学体系的形成都起到了不可缺少的作用。例如，物理学中的瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等概念很难用语言说清楚，而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义。

当代计算机科学的发展和广泛应用，使得数学模型的方法如虎添翼，加速了数学向各个学科的渗透，产生了众多的边缘学科。如生物数学是在生物科学研究中由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等交叉内容构成。

数学模型还物化于各种高新科技之中，从家用电器到天气预报，从通信到广播电视，从核电站到卫星，从新材料到生物工程，以及高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等无一不是通过数学模型和数学方法并借助计算机的计算、控制来实现的。计算机本身的产生和进步也是依赖于数学科学的进展，而计算机软件技术说到底也是数学技术。

另外，利用数学模型还可以对事物的发展进行预测。分析事物的发展趋势可以帮助我们对未来做出一些有益的猜想，甚至使我们对未来有所控制。数学就是重要工具之一，它常常能以足够的精确度对未来做出预见，告诉我们未来的发展趋势。

总之，数学模型具有解释、判断、预测等重要功能，在各个领域的应用会越来越广泛。

4. 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类，下面介绍常用的几种。

（1）按照模型的应用领域（或所属学科）分。如人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等。

（2）按照建立模型的数学方法（或所属数学分支）分。如初等数学模型、微积分模型、线性代数模型、微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型、图论模型等。

（3）按照模型的表现特性分。确定性模型和随机性模型、静态模型和动态模型、线性模型和非线性模型、离散模型和连续模型等。

（4）按照对模型结构的了解程度分。白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。

二、数学建模

数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践，即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学语言、数学方式来表达，建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解。简而言之，建立数学模型的过程就称为数学建模。

数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法，而且还是一种从无到有的创新活动过程。应用数学知识去研究和解决实际问题，遇到的第一项工作就是建立恰当的数学模型。从这一意义上讲，可以说数学建模是一切科学研究的基础。没有一个较好的数学模型就不可能得到较好的研究结果，所以建立一个较好的数学模型是解决实际问题的关键所在。数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题能力的必备手段之一。

数学模型模仿了一个现实系统，但建立数学模型并非以模仿为目标，而是为了解决实际问题。数学模型是对现实对象的信息加以分析、提炼、归纳、翻译的结果，它用精确的语言表达了对象的内在特性，是利用函数、方程等数学概念创立的模型。当建立一个数学模型时，要从现实世界进入充满数学概念的抽象世界。在数学世界内，用数学方法对数学模型进行推理演绎、求解，并借助于计算机处理这个模型，得到数学上的解答。最后再回到现实世界，将模型的数学解“翻译”成现实问题的实际“解答”，如给出现实对象的分析、预报、决策、控制的结果。这些结果还必须经实际的检验，即用现实对象的信息检验得到的解答，确认结果的正确性。这个过程始于现实世界而终结于现实世界，数学模型是一道理想的桥梁。

需要说明的是，建立一个数学模型与求解一道数学应用题有极大的差别。其原因是：应用题通常有不多不少恰到好处的条件和数据，方法也基本限制在某章或某门课程，往往有唯一正确的答案。数学建模问题经常是由各领域的工作者提出，因而既不可能明确提出该用什么方法，也不会给出恰到好处的条件（可能有多余的条件，也可能缺少必要的条件和数据），更经常出现的情形是问题本身就含糊不清，没有唯一正确的答案。数学建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段，对同一个实际问题可能建立起若干个不同的模型，模型无所谓“对”与“错”，评价模型优劣的唯一标准是实践检验。一个理想的数学模型必须是既能反映系统的全部重要特性，同时在数学上又易于处理，即它满足：

（1）模型的合理性。在允许的误差范围内，它能反映出该系统的有关特性的内在联系。

（2）模型的易求解性。它易于数学处理和计算。

三、数学建模的应用

目前，数学的应用已经渗透到了各个领域，或者说各行各业日益依赖于数学，可以说，数学模型无处不在。如在以下诸多方面，数学建模都有着非常具体的应用。

（1）分析与设计。例如，描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效；建立跨音速空气流和激波的数学模型，用数值模拟设计新的飞机翼型。

（2）预报与决策。生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增

长预报等都要有预报模型。使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案是决策模型的例子。

(3) 控制与优化。电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化要以数学模型为前提，因此建立大系统控制与优化的数学模型是迫切需要和十分棘手的课题。

(4) 规划与管理。生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度，以及排队策略、物资管理等，都可以用运筹学模型解决。

四、数学建模能力培养的意义

一个人的建模能力包括以下几个方面：

(1) 理解实际问题的能力，包括有广博的知识面，搜集信息、资料和数据能力等。

(2) 抽象分析问题的能力，包括抓住主要矛盾、选择变量，进行归纳、联想、类比等创造能力。

(3) 运用工具知识的能力，包括自然科学、工程技术、计算机尤其是数学知识等能力。

(4) 试验调试能力，包括物理的、化学的、工程的、计算机的等，还包括反复修改等动手能力。

应当特别指出的是，尤其应当注重培养自己的观察力和想象力。著名的科学家爱因斯坦曾说过："想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识的源泉"。

由此可见，为了培养建模能力，首先要广泛地学习自然科学、工程技术和社会科学等有关分支的知识，掌握这些领域的定律、法则、规律和公式，这样才能有助于提高建模的实际工作能力；其次在学习各门课程时应多做应用题，这对于提高分析问题的能力和运用各种知识能力是不可缺少的基本训练；另外，还要多接触实际问题，有时还要深入工厂、企业等实际部门培养调查和提出问题的能力。由于现代科技的分工越来越细，各门学科互相渗透，而数学模型的内容又极为广泛，因此解决实际问题往往不是一个人、一个部门所能承担和完成的，于是跨行业专家间的协作和联合攻关是十分必要的。很多伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师，他们将各个不同的科学领域同数学有机地结合起来，在不同的学科中取得了巨大的成就。如力学中的牛顿定律、电磁学中的麦克斯韦方程组、化学中的门捷列夫周期表、生物学中的孟德尔遗传定律等都是经典学科中应用数学模型的光辉范例。目前在计算机的帮助下，数学模型在生态、地质、航空等方面有了更加广泛和深入的应用。因此，数学建模是培养学生创新意识与创新能力、应用意识与应用能力的重要途径。

数学建模课程可以培养和提高同学们下列能力：

(1) 洞察能力。许多提出的问题往往不是数学化的，这就需要建模工作者善于从实际工作提供的原形中抓住其数学本质。

(2) 数学语言翻译能力，即把经过一定抽象和简化的实际问题用数学语言表达出来，形成数学模型，并对由数学的方法和理论推导或计算得到的结果用大众化的语言表达出来，在此基础上提出解决某一问题的方案或建议。

(3) 综合应用分析能力。用已学到的数学思想和方法进行综合应用分析，并能学习

一些新的知识。

（4）联想能力。对于不少的实际问题看起来完全不同，但在一定的简化层次下，它们的数学模型是相同的或相似的。这正是数学应用广泛性的体现，这就是培养学生有广泛的兴趣，多思考，勤奋踏实地工作，通过熟能生巧达到触类旁通的境界。

（5）各种当代科技最新成果的使用能力。目前主要是计算机和相应的各种软件包，这不仅能够节省时间，得到直观形象的结果，有利于与用户深入讨论，而且能够养成自觉应用最新科技成果的良好习惯。

第二节　数学建模的步骤和方法

一、数学建模的步骤

数学建模的过程并非高深莫测，事实上在初等数学中就有所接触。例如，数学课程中在解应用题时列出的数学式子就是简单的数学模型，而列数学式子的过程就是在进行简单的数学建模。下面用一道应用题求解过程来说明数学建模的步骤。

【例 1】可口可乐、雪碧、健力宝等销量极大的饮料罐（易拉罐）顶盖的直径和从顶盖到底部的高之比为多少？它们的形状为什么是这样的？

首先，把饮料罐假设为正圆柱体。在这种简化下，就可以来明确变量和参数了，例如可以引入变量：

V——罐装饮料的体积；

r——底面半径；

h——圆柱高；

b——制罐材料的厚度；

k——制造中工艺上必须要求的折边长度。

上面的诸多因素中，我们先不考虑 k 这个因素，于是有 $V=\pi r^2 h$。

由于易拉罐上底的强度必须要大一点，因而在制造上其厚度为罐其他部分厚度的 3 倍，因而制罐用材的总面积为

$$A=3\pi r^2 b+\pi r^2 b+2\pi rhb=(4\pi r^2+2\pi rh)b$$

每罐饮料的体积是一样的，因而 V 可以看成是一个常数（参数），则

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

代入 A 得

$$A=A(r)=2\pi b\left(2r^2+\frac{V}{\pi r}\right)$$

从而知道，用材最省的问题是求半径 r 使 $A(r)$ 达到最小，因此 $A(r)$ 的表达式就是一个数学模型。可以用多种精确或近似方法求 $A(r)$ 的极小值及相应的 r，如用微积分的办法易得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=2\pi b\left(4r-\frac{V}{\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=0 \quad 得 \quad r=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

从而求得

$$h=\frac{V^3}{\pi}\sqrt{\left(\frac{4\pi}{V}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{(4\pi)^2V^3}{\pi^3V^2}}=4\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}=4r$$

即罐高 h 应为半径 r 的 4 倍。当你拿起可口可乐、百事可乐、健力宝等饮料罐头测量时，高 h 和半径 r 的比几乎与上述计算完全一致。其实这一点也不奇怪，这些大饮料公司年生产的罐装饮料都高达几百万罐，甚至更多，因而从降低成本和获取利润的角度，这些大公司的设计部门一定会考虑在同样工艺条件、保证质量前提下用材最省的问题。大家还可以把折边 k 这一因素考虑进去，然后得到相应的数学模型，并求解之，最后看看与实际符合的程度如何。

这个问题的解答可以得到很多启发，我们会发现现实生活中有许多的类似问题。例如，当你到民航售票处去买国际机票时，在机票上会看到像“免费交运的行李为两件，每件最大体积（三边之和）不得超过 62 英寸（158 cm），但两件之和不得超过 107 英寸（273 cm），每件重量不得超过 32 千克”的说明。试计算一下三边之和为 158 cm 的长方体（我们通常用的箱子、装货的纸箱都是这种形状的）要使之体积最大的长、宽、高应是多少？再到市场上去调查一下有多少箱子是这样的，为什么？在马路上见到的油罐车上的油罐为什么不是正圆柱形而是椭圆圆柱形？体积一定、用材最少的油罐的尺寸应是什么？这些问题都会激起我们的思考和应用数学的兴趣。

根据本例可以得出简单的数学建模步骤：

（1）根据问题的背景和建模的目的做出假设。

（2）用字母表示要求的未知量和已知量。

（3）根据已知的常识列出数学式子或图形。

（4）求出数学式子的解答。

（5）验证所得结果的正确性。

一个实际问题往往是很复杂的，而影响它的因素也很多。如果想把它的全部影响因素（或特性）都反映到模型中来，这样的模型很难甚至无法建立，即使能建立也很难进行数学处理和计算。但仅考虑易于数学处理，当然模型越简单越好，不过这样做又难于反映系统的有关主要特性。通常所建立的模型往往是这两种互相矛盾要求的折中处理。建模是一种十分复杂的创造性劳动，现实世界中的事物形形色色，五花八门，不可能用一些条条框框规定出各种模型如何建立，所以数学建模没有固定的模式。按照建模过程，一般采用以下基本步骤：

问题分析

由于数学模型是建立数学与实际现象之间的桥梁，因此首要的工作是要设法用数学的语言表述实际现象。所谓问题重述，是指把实际现象尽量地使用贴近数学的语言进行重新描述，因此要充分了解问题的实际背景，明确建模的目的，尽可能弄清对象的特征，并为此搜集必需的各种信息或数据。要善于捕捉对象特征中隐含的数学因素，并将其一一列出，至此我们便有了一个很好的开端。而有了这个良好的开端，不仅可以决定建模方向，初步确定用哪一类模型，而且对下面的各个步骤都将产生影响。

模型假设

根据问题的要求和建模目的做出合理的简化假设。模型假设是根据对象的特征和建模

目的，在问题分析基础上对问题进行必要的、合理的取舍简化，并使用精确的语言做出假设，这是建模至关重要的一步。进行假设的目的在于从第一步列出的各种因素中选出主要因素，忽略非本质因素，抓住问题的本质使问题简化以便进行数学处理。这是因为一个实际问题往往是复杂多变的，如不经过合理的简化假设，将很难转化成数学模型，即便转化成功，也可能是一个复杂的难于求解的模型，从而使建模归于失败。另外，为建模需要，在选定的因素里也常常要进行必要的、合理的简化，诸如线性化、均匀化、理想化等近似化处理。当然，假设做得不合理或过分简单也同样会因为与实际相去甚远而使建模归于失败。

总之，一个高超的建模者能充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别主次，合理进行简化。经验在这里也常起重要作用，有些假设在建模过程中才会发现，因此在建模时要注意调整假设。

模型建立

根据问题分析与假设，利用适当的数学工具及相应的物理或其他有关学科规律建立各个量之间的数量关系，列出表格，画出图形或确定其他数学结构。这里除需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较广阔的应用数学方面的知识。建模时还应遵循的一个原则是尽量采用简单的数学工具，以便让更多的人明了并能加以应用。

模型求解

对以上建立的数学模型进行数学上的求解，包括解方程、画图形、证明定理及逻辑运算等，会用到传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术。

模型分析（包括检验、修改、应用和评价等）

首先对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制，对于各种情况还常常进行误差分析，数据稳定性分析。

而后将模型的解给予检验和实际解释，即把模型的求解结果“翻译”到实际对象中，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性。如果检验结果与实际情况相符，则可进行最后的模型应用。

注意：一是若所得的解不符合实际，则所建数学模型有错误，应推倒重建或修改，这是数学建模完全可能出现的情况，其产生原因往往是问题分析错误或假设不合理所致。二是这 5 步构成了数学建模的一个流程，即模型准备⇒模型假设⇒模型建立⇒模型求解⇒对模型解的分析、检验、修改与推广，用框图描述如图 1－1 所示。对于一个建模问题，这个流程极具指导意义。应当注意的是，在实际建模过程中，其应用是可以有弹性的，不是每个建模问题都要经过这 5 个步骤，其顺序也不是一成不变的，而且有时各个过程之间没有明显的界线，因此建模中不必在形式上按部就班，只要反映出建模的特点即可。一个具体建模问题要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与实际问题

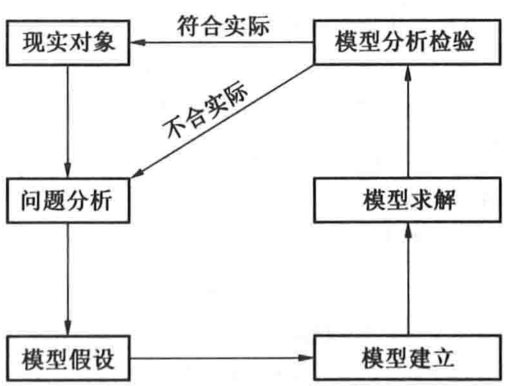

图 1－1　数学建模的流程框图

的性质、建模目的等有关。后面我们将结合实例对流程的各个步骤详加说明。

数学建模过程中最重要的3个要素，也是3个最大的难点是：

（1）怎样从实际情况出发做出合理的假设，从而得到可以执行的合理的数学模型。

（2）怎样求解模型中出现的数学问题，它可能是非常困难的问题。

（3）怎样验证模型的结论是合理、正确、可行的。

所以，当你看到一个数学模型时，就一定要问问或者想一想它的假设是什么，是否合理？模型中的数学问题是否很难，数学上是否已经解决？怎样验证该模型的正确与可行性？当你在学习有关后续课程或参加具体的数学建模活动时牢记这3条，一定会受益匪浅。

另外，在建模过程中还有一条不成文的原则，就是从简单到精细，也就是说，首先建立一个比较简单但尽可能合理的模型，对该模型中的数学问题有可能解决很彻底，从而能够做到仅仅通过实验观察不可能做到的事情，甚至发现重要的现象。如果求解该模型得到的结果不合理，甚至完全错误，那么它也有可能告诉我们改进的方向。

要想比较成功地运用数学建模去解决真正的实际问题，还要学习“双向翻译”的能力，即能够把实际问题用数学的语言表述出来，而且能够把数学建模得到的（往往是用数学形式表述的）结果用普通人（或者说要应用这些结果的非数学专业的人士）能够懂的普通语言表述出来。

在学习后续的建模实例中再次强调两点：

（1）数学建模不一定有唯一正确的答案。数学建模的结果无所谓“对”与“错”，只有优与劣的区别，评价一个模型优劣的唯一标准是实践检验。

（2）数学建模没有统一的方法。对同一个问题，各人因其特长和偏好等方面的差别，所采取的方法可以不同。使用近代数学方法建立的模型不一定就比采用初等数学方法建立的模型好，因为我们建模的目的是为了解决实际问题。

二、数学建模的一般方法

1. 机理分析法

机理分析法是立足于事物内在规律的一种常见建模方法，主要是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等，分析研究对象中各变量（因素）之间的因果关系，找出反映其内部机理规律而建立其模型的一种方法。建立的模型常有明确的物理或现实意义。使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理应有一定的了解，模型也要求具有反映内在特征的物理意义。

2. 测试分析法

测试分析法是一种统计分析法。当我们对研究对象视为一个“黑箱”系统，对系统的输入、输出数据进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析，按照一定准则找出与数据拟合最好的模型。当我们对对象的内部规律基本不清楚，模型也不需要反映内部特征时，就可以用测试分析建立数学模型。测试分析有一套完整的数学方法。

3. 数学分析法

用现成的数学方法建立模型，如图论、微分方程、数学规划、概率统计方法等。

4. 综合分析法

对于某些实际问题，人们常将上述建模方法结合起来使用，例如用机理分析法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数。

三、数学建模举例

下面给出几个数学建模的例子，重点说明如何做出合理的、简化的假设；如何选择参数、变量，用数学语言确切的表述实际问题；如何分析模型的结果，解决或解释实际问题，或根据实际情况改进模型。

【例 2】(椅子问题) 把椅子置于地面上时，常常是只有三只脚着地而放不稳，通常需要调整几次方可将椅子放稳，试用数学语言对此问题给以表述，并用数学工具给予说明：椅子能否在地面上放稳？若能，请给予证明并给出做法，否则说明理由。

问题分析

所谓椅子能否在地面放稳是指椅子的四个脚能否同时着地，而四个脚是否同时着地是指四个脚与地面的距离是否同时为零。于是我们可以转而研究四个脚与地面的距离（函数）是否同时等于零。这个距离是变化的，于是可视为函数，那么作为函数，它随哪个量的改变而改变？构造这个距离函数成为主要建模目的。

为了构造函数和设定相关参数，让我们实际操作一下，从中搜集信息，弄清其特征。要想四个脚同时着地，通常有两种方法：一个是将椅子搬离原地，换个位置试验，另一个做法是原地旋转试验。由于前一种方法需要研究的范围可能要很大，这里采取第二种做法。通过实地操作，易得出结论：只要地面相对平坦，没有地面大起大落情况，那么随着旋转角度的不同，三只脚同时落地后，第四只脚与地面距离也不同（不仅如此，旋转中总有两个脚同时着地，另两个脚不稳定）。也就是说，这个距离函数与旋转角度有关，是旋转角度的函数。于是一个确定的函数关系找到了，不仅如此，我们的问题也顺其自然地转化为：是否存在一角度，使得四个距离函数同时为零？

综上分析，问题可以归结为证明函数的零点的存在性，遂决定试用函数模型予以处理。

合理的简化假设

依前面的问题分析，我们可作如下假设：

（1）椅子的四条腿同长（这个假设显然合理，而且避免了问题与椅子腿长度有关使问题变复杂）。

（2）将椅子的脚与地面接触处看成是一个几何点，四脚连线为正方形（这是因为问题本身考虑的是能否四脚着地而与椅子样式、腿粗细等无关）。

（3）地面相对平坦，即在旋转所在地面范围内，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地（自然这是符合实际的合理假设）。

（4）地面高度连续变化，可视地面为数学上的连续曲面。

建立模型

依假设条件，四个脚连线呈正方形，因而以其中心为对称点，令正方形绕中心旋转便可表示了椅子位置改变，于是可以用旋转角度的变化表达椅子的不同位置。为此，我们以这个正方形中心为原点建立平面直角坐标系，并假设旋转开始时（角度 $\theta=0$），四个椅脚点 A、B、C、D 中 A、C 位于 x 轴上，则 B、D 位于 y 轴上。旋转角度 θ 后，点 A、B、C、

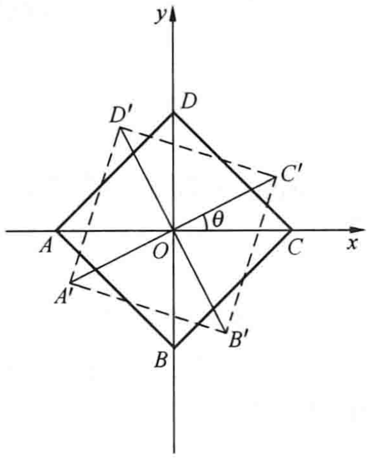

图 1-2　椅脚旋转变换图

D 变到点 A'、B'、C'、D' 如图 1-2 所示，显然，随着 θ 的改变，椅子的位置也跟着改变，从而椅脚与地面距离也随之改变。注意到试验结果，尽管椅子有四只脚，因而有四个距离，但对于每个角度，总有点 A、C 同时着地，而 B、D 点不同时着地；或 B、D 点同时着地而 A、C 点不同时着地，故只要设两个距离函数即可。设 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，且作为距离函数的 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 均为非负函数。

由假设（4），$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 均为连续函数，而由假设（3），对任一角度 θ，恒有 $f(\theta)=0$，而 $g(\theta)\geqslant 0$ 或 $g(\theta)=0$ 可得 $f(\theta)\geqslant 0 \Rightarrow f(\theta)g(\theta)=0$ 对任意 θ 成立。

又为证明存在角度 θ_0 使 $f(\theta_0)=0$、$g(\theta_0)=0$ 同时成立，还需要条件支持。注意到在初始位置（$\theta=0$），或 $f(0)=0$、$g(0)>0$，或 $f(0)>0$、$g(0)=0$，而旋转 90°后两组条件恰好交换。如此，椅子通过旋转改变位置能放稳的证明，便归结为证明如下的数学命题，即

已知 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)g(\theta)=0$ 且 $f(0)=0$ 时 $g(0)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ 时 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。

求证：存在 $\theta_0\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

这就是椅子问题的数学模型。易见只需引进一个变量 θ 及其一元函数 $f(\theta)$、$g(\theta)$，便把模型条件和结论用简单又精确的数学语言表述出来，从而形成所需要的数学模型。

求解数学模型

容易看出本模型属于一元连续函数的零点存在性问题，使用介值定理便可轻松证明它。

证明　将椅子旋转 90°，对角线 AC 和 BD 互换。

由 $g(0)=0$，$f(0)>0$，知 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$。令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$ 则 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$。

由于 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，则 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$ 为连续函数，据连续函数的介值定理，必存在 $\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$。

因为 $f(\theta)g(\theta)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

模型分析、检验、修改与推广

模型解的意义在于满足三点假设的前提下，我们证明了通过转动椅子，必定可把它放稳，而且转动的角度不需超过 90°（顺时针或逆时针）。同时，请你思考：

（1）若把假设中的四只脚的连线呈正方形改为四只脚的连线呈长方形，你认为结论成立吗？

（2）若把假设中的四只脚的连线呈正方形改为四只脚共圆，则结果又如何？