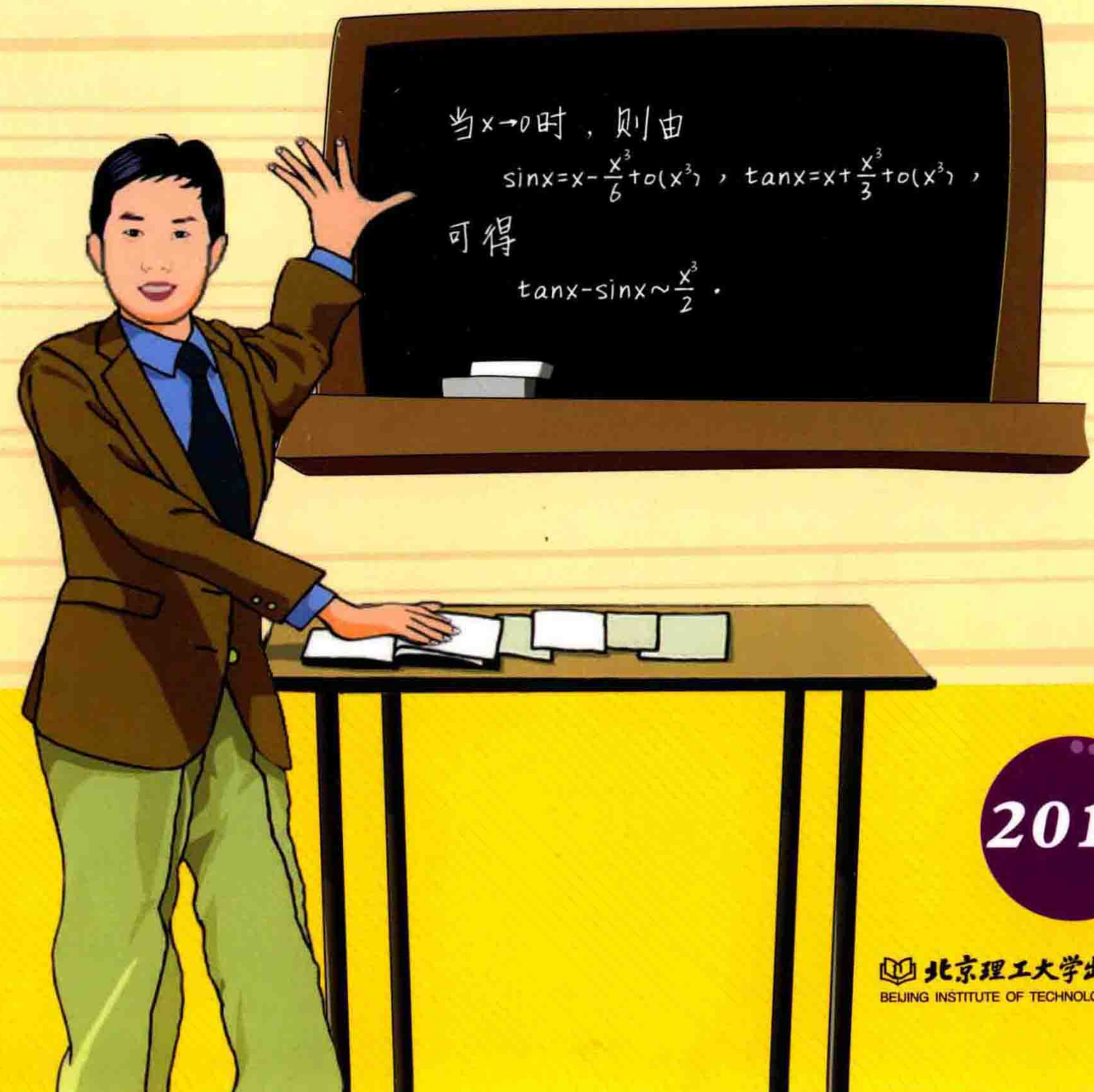
图书书系
张宇考研数学系列丛书
全国著名考研辅导机构推荐用书
理工社®

考研数学
10年真题分析与演练

■ 主 编 张 宇 姜晓千 刘晓艳
■ 副主编 刘国辉 张 新 杨 超 方 浩 吴 睿



2014

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书书系
2014 考研数学 10年真题分析与演练
主编 张宇 姜晓千 刘晓艳
北京理工大学出版社

生活不是等待风暴过去
而是要学会在雨中翩翩起舞

——张宇

责任编辑 张慧峰
上架建议 考试·考研数学
ISBN 978-7-5640-7821-8
定价：46.80元

张宇考研数学系列丛书
全国著名考研辅导机构推荐用书

理工社®

考研数学
10年真题分析与演练

■ 主　编　张　宇　姜晓千　刘晓艳
■ 副主编　刘国辉　张　新　杨　超　方　浩　吴　睿

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学10年真题分析与演练 / 张宇，姜晓千，刘晓艳主编. —北京：北京理工大学出版社，2013.6
ISBN 978-7-5640-7821-8

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①张… ②姜… ③刘… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第129743号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京绿谷春印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 28.5
字　　数 / 600千字
版　　次 / 2013年6月第1版　2013年6月第1次印刷
定　　价 / 46.80元

责任编辑 / 张慧峰
文案编辑 / 张慧峰
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

真题考点分析

1. 函数是微积分的研究对象

(1) 从考试大纲的要求看，本章函数部分主要是从构建函数关系，确定函数表达式以及理解函数的基本性质等方面进行考查. 重点内容是：

① 复合函数的运算(特别是分段函数的复合运算)；

② 对函数基本性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性) 的理解.

(2) 从考试真题的构成看，近十年来，数学一和数学二还未对有关函数这一考点进行过单独的考查，只有数学三在 2004 年考过一道 4 分的填空题. 因而是一般性的考点.

2. 极限是微积分的理论基础，又是研究微积分的基本工具

(1) 从考试大纲的要求看，本章极限部分不仅需要准确理解函数(或数列) 的极限，还要会根据题目所给的极限得到相应的结论. 重点内容是：

① 求极限的重要方法(本章仅涉及极限的四则运算法则，等价无穷小替换，两个重要极限等)；② 无穷小的性质及其比较.

(2) 从考试真题的构成看，极限部分数学一共考查过 8 次，共 40 分，且主要是对极限的定义及其性质，无穷小量的性质及其比较，两个重要极限这 3 个考点考查；数学二共考查过 14 次，共 82 分，主要是对极限的定义与性质，无穷小的性质及其比较(高频考点)，两个重要极限这这 3 个考点考查；数学三共考查过 12 次，共 52 分，主要是对无穷小量及其比较，两个重要极限这 2 个考点考查. 因而对数学一、二、三而言，极限是一个重要考点.

3. 函数的连续性是函数可导与可积的必要条件

(1) 从考试大纲的要求看，本部分是要熟练掌握判断函数的连续性以及间断点类型的方法，特别是分段函数在分段点处的连续性. 此外，还要了解连续函数的相关性质(有界性、最值定理、零点定理、介值定理). 重点内容是：① 函数连续性的判断；② 函数间断点类型的判定.

(2) 从考试真题的构成看，函数的连续性数学一仅考查过一次，而且是对闭区间上连续函数的性质的考查，共 11 分；数学二共考查过 9 次，共 38 分，且重点是考查对函数间断点类型的考查；数学三共考查过 6 次，共 27 分，重点是考查函数连续的概念与函数间断点的类型. 因而函数的连续性对数学一是一般性的考点，对数学二、三是重要考点.

真题精讲

题型一　对函数基本性质的理解

解题思路与方法

函数的几何特性往往会结合其他知识点成为解题的必要条件，且主要以选择题与填空题的形式出现. 现在将函数几何性质的判定方法总结如下：

1. 函数有界性的判定方法

(1) 利用函数有界性的定义；

(2) 闭区间上的连续函数是有界函数；

(3) 如果 $f(x)$ 为(a,b) 内的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 为(a,b) 内的有界函数.

(4) 函数极限的局部有界性：当 $x\to x_0$ 时，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内必有界.

2. 函数奇偶性的判定方法

(1) 利用奇偶函数的定义. 特别地，函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域不关于原点对称，则显然该函数是非奇非偶函数.

(2) 利用奇函数与偶函数的运算性质：

① 奇函数的代数和是奇函数；

② 偶函数的代数和是偶函数；

③ 偶函数之积是偶函数；

④ 偶数个奇函数之积是偶函数；

⑤ 奇数个奇函数之积是奇函数；

⑥ 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

3. 函数单调性的判别方法

(1) 利用单调性的定义.

(2) 利用一阶导数符号与单调性的关系：设 $x\in I$，若 $f'(x)\geqslant 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 内单调增加；若 $f'(x)\leqslant 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 内单调减少.

4. 函数周期性的判定方法

(1) 利用函数周期性的定义；

(2) 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则函数 $f(ax+b)(a\neq 0)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$；

(3) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T 为周期的函数；

(4) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2

的最小公倍数为周期的函数.

真题再现

1. [2004,三(7)/四(7),4分] 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

题型二　数列的极限

解题思路与方法

数列极限主要考查两方面的内容，一是数列极限的概念与性质，通常是在选择题或填空题中运用相关的定义与性质，是数学一与数学二的常考知识点. 二是数列极限的计算，求数列极限的问题主要以下列三种形式出现：

1. 关于抽象数列的极限问题

由于抽象数列的形式是未知的，所以这类问题有一定的难度，通常情况下在选择题中以判定数列收敛性的形式出现，因此可以通过举反例的方法进行排除. 此外，这类问题也可以按照定义、基本性质及运算法则等直接验证.

2. 具体数列 $\{a_n\}$ 的极限的计算

(1) 利用单调有界必收敛准则求数列极限.

首先，用数学归纳法或不等式的放缩法判断数列的单调性和有界性，确定数列极限的存在性；其次，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，通过对等式两边取极限，建立关于 l 的方程并求得 l 的值，从而得到数列 $\{a_n\}$ 的极限值.

(2) 利用函数极限求数列极限.

数列极限不能直接用洛必达法则求解. 如果这个数列极限看成某函数极限的特例，即形如 $a_n=f(n)$，根据函数极限和数列极限的关系，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，此时可以用洛必达法则求解.

3. 求 n 项和或 n 项积数列的极限

(1) 利用特殊级数求和法.

如果所求的 n 项和数列极限可以通过错位相消或转化为极限已知的 n 项和数列极限，那么通过整理直接可以得到极限结果.

(2) 利用幂级数求和法.

若可以找到这个 n 项和所对应的幂级数，则可以利用幂级数求和函数的方法把它所对应的和函数求出，再根据这个极限的形式将相应的量代入到和函数中，求出相应的极限值.

(3) 利用定积分求极限.

若 n 项和式子中每一项均可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$，剩余的可用一个通项求和的形式表示，则可以考虑用定积分定义求解.

(4) 利用夹逼定理求极限.

若数列的各项均可提出一个因子，而剩余的项不能用一个通项表示，但其各项是按递增或递减排列的，则可以考虑用夹逼定理求 n 项和数列的极限.

(5) 求 n 项积数列的极限，一般先取对数化为 n 项和的形式，然后再利用求解 n 项和数列极限的方法进行计算. 另外还可以考虑以下的方法求解：① 分子分母同乘一个因子，使分子、分母可进行化简；② 拆通项或因式分解，使之成为两因式的乘积形式，在整个相乘过程中消去中间项，从而化繁为简求极限.

真题再现

2. [2013,一(9),4分] 设函数 $f(x)$ 是由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$ ______ .

3. [2013,二(2),4分] 设函数 $f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right)=$（　　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2

4. [2013,三(9),4分] 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$ ______ .

5. [2013,二(20),11分] 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

6. [2012,二(10),4分] $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{2^2}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^2+n^2}\right)=$ ______ .

7. [2010,三(4),4分] 设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时，有（　　）

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

8. [2008,一(4)/二(5),4分] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

9. [2003,一(8)/二(7),4分] 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

题型三 无穷小量的概念与性质

解题思路与方法

对无穷小量的概念与性质的考查主要是在选择题和填空题中出现，考查的重点是对无穷小量的概念与性质的应用. 因此，熟练掌握这些概念与性质，对解题而言至关重要，现将其总结如下：(以 $x \to x_0$ 为例)

(1) 当 $x \to x_0$ 时，有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

注意，当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 为无穷小，$\beta(x)$ 为有界函数，仅仅是它们的乘积 $\alpha(x)\beta(x)$ 为无穷小的充分条件而非必要条件.

(2) 当 $x \to x_0$ 时，有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(3) 当 $x \to x_0$ 时，$|\alpha(x)|$ 为无穷小的充要条件是 $\alpha(x)$ 为无穷小.

即 $\lim\limits_{x \to x_0} |\alpha(x)| = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

真题再现

10. [2007，三(11)/ 四(11)，4 分] $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3}(\sin x + \cos x) =$ ______.

题型四 等价无穷小替换在求函数极限中的应用

解题思路与方法

对等价无穷小替换的考查不仅仅在客观题中出现，而且也会在解答题中出现. 一般不会单独考查，大多是与洛必达法则或泰勒公式结合求函数的极限. 特别地，只要极限式中可以使用等价无穷小替换，就立即替换之，如此可极大简化极限的运算. 现将常用的等价无穷小总结如下：

1. 当 $x \to 0$ 时

$\sin x \sim x$　　$e^x - 1 \sim x$　　$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$\tan x \sim x$　　$a^x - 1 \sim x\ln a$

$\arcsin x \sim x$　　$\ln(1+x) \sim x$

$\arctan x \sim x$　　$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

(2) 关于泰勒公式

基于以下展开式(当 $x \to 0$ 时)

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$　　$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$　　$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$　　$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$

可得到

$\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$　　$x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$

$\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$　　$\arcsin x - x \sim \dfrac{x^3}{6}$

$x - \arctan x \sim \dfrac{x^3}{3}$　　$x - \ln(1+x) \sim \dfrac{x^2}{2}$

要特别注意的是，只有被替换项为整个表达式的乘积因子时，才能进行等价无穷小替换.

真题再现

11. [2013，一(1)，4 分] 已知极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^k} = c$，其中 k, c 为常数，且 $c \neq 0$，则 (　　)

(A) $k=2, c=-\dfrac{1}{2}$　　(B) $k=2, c=\dfrac{1}{2}$　　(C) $k=3, c=-\dfrac{1}{3}$　　(D) $k=3, c=\dfrac{1}{3}$

12. [2013，二(9)，4 分] $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ______.

13. [2011，三(15)，10 分] 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\sin x} - x - 1}{x\ln(1+x)}$.

14. [2009，三(9)，4 分] $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} =$ ______.

15. [2008，三(15)/ 四(15)，9 分] 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln \dfrac{\sin x}{x}$.

16. [2004，二(15)，10 分] 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2 + \cos x}{3}\right)^x - 1\right]$.

题型五 无穷小的比较

解题思路与方法

对无穷小比较的考查主要集中在选择题与填空题中. 无穷小的比较是把各种类型的函数都统一到幂函数类的同一种结构内进行比较，来考查对高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小的概念.

现在将无穷小比较的判定方法总结如下：

(1) 比较两个无穷小量的阶，即判断一个无穷小量是另一个无穷小量的高阶、低阶、同阶或等价无穷小量，其实质就是求“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限，因而有关求解“$\dfrac{0}{0}$”型未定式极限的方法都可以使用.

(2) 比较 3 个或 3 个以上的无穷小量 $f_m(x)(m=1,2,\cdots)$，可考虑分别先与一个参照量如 $(x-x_0)^n$ 进行比较，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_m(x)}{(x-x_0)^n}$ 存在且不等于零，确定出常数 $n_m>0$，确定 $f_m(x)$ 是 $x-x_0$ 时的 n_m 阶无穷小量后，再比较 $n_m(m=1,2,\cdots)$ 的大小.

(3) 由无穷小量的关系，确定未知参数. 此类问题的实质是由无穷小量的关系，转化为已知极限求未知参数的问题. 此时，可以用洛必达法则、等价无穷小量替换等方法解决.

特别地，需要注意以下两个重要结论：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a,a\neq\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. 它表明：当 $x\to x_0$ 时，若分式 $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 的极限存在，且其分母 $\alpha(x)$ 是无穷小，则它的分子 $\beta(x)$ 必定也是无穷小.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a,a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. 它表明：当 $x\to x_0$ 时，若分式 $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 的极限存在，且其分子 $\beta(x)$ 是无穷小，则它的分母 $\alpha(x)$ 必定也是无穷小.

真题再现

17. [2013，二(1)，4 分] 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，$|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 (　　)

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小

18. [2013，二(15)/三(15)，10 分] 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

19. [2013，三(1)，4 分] 当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 (　　)

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

20. [2011，二(1)/三(1)，4 分] 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 (　　)

(A) $k=1,c=4$　　(B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$　　(D) $k=3,c=-4$

21. [2009，一(1)/二(2)/三(2)，4 分] 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 (　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

22. [2007，一(1)/二(1)/三(1)，4 分] 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 (　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

题型六　两个重要极限在求函数极限中的应用

解题思路与方法

一般地，将所求极限转化成两个重要极限的形式，进而得出结论. 通常该考点以选择题或填空题的形式出现. 现将两个重要极限及其变形总结如下：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

真题再现

23. [2012，三(9)，4 分] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ______.

24. [2011，三(9)，4 分] 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ______.

25. [2010，一(1)，4 分] 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ (　　)

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

26. [2006，三(1)/四(1)，4 分] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ______.

27. [2005，三(1)/四(1)，4 分] 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______.

题型七　函数的连续性

解题思路与方法

对函数连续性的考查主要集中在函数在某点处的连续性，以及函数在某区间的连续性. 本考点既出现在客观题中，又出现在解答题中，现在将函数连续性的一般判定方法总结如下：

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的；

(2) 初等函数在定义区间内是连续的；

(3) 根据连续函数的四则运算法则、复合运算法则判断函数的连续性；

(4) 分段函数在分段点处的连续性的判别法：若函数在分段点的左、右两侧表达式不同，此

时应先判定函数在该点是否左连续、右连续，然后根据函数在一点处连续的充要条件来判定函数在该点是否连续；若函数在分段点左、右两侧表达式相同，则不需要考查该点处的左、右连续，仅需判定是否满足充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 即可.

(5) 已知函数在某点连续，要确定函数表达式中（或定义域内）的待定常数，这种问题称为连续的逆问题，解题的思路是根据函数在一点处连续的充要条件来完成.

真题再现

28. [2008，三(9)/四(9)，4 分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ________.

29. [2003，三(13)，8 分] 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

题型八 判断函数间断点的类型

解题思路与方法

对函数间断点考查其定义的应用，而本质上还是求极限. 该知识点一般出现在选择题中. 现在将其判定方法总结如下：

1. 判断函数连续性的方法

(1) 找出函数的定义域，若函数在某点无意义，则该点为间断点；若函数在该点有定义，再检验下一步.

(2) 检查该点是否为初等函数定义区间内的点，若是，则该点为函数的连续点；否则看函数在这一点的极限是否存在，若极限不存在，则该点为函数的间断点，若极限存在，再检查下一步.

(3) 若函数在该点的极限值等于函数值，则为连续点；若不相等，则为间断点. 最后根据定义，判断该点是哪种类型的间断点.

2. 判断函数间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

其中，① 若 $f(x_0^+)=f(x_0^-)\neq f(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点.

② 若 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 至少一个不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

真题再现

30. [2013，三(2)，4 分] 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

31. [2009，二(1)/三(1)，4 分] 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 无穷多个

32. [2008，二(4)，4 分] 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 ( )

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　(B) 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点　(D) 2 个无穷间断点

33. [2003，三(7)，3 分] 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ( )

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　(D) 有可去间断点 $x=0$

真题精练

1. [2012，二(3)，4 分] 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ( )

(A) 充分必要条件　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

2. [2012，二(15)，10 分] 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值.

3. [2012，二(21)，10 分]

(Ⅰ) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

(Ⅱ) 记(Ⅰ)中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

4. [2011，一(18)/二(19)，10 分]

(Ⅰ) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立；

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

5.[2011,二(9),4 分] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

6.[2010,三(1),4 分] 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 a 等于 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7.[2008,二(9),4 分] 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ________.

8.[2007,一(5)/二(6),4 分] 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是 ( )

(A) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

9.[2006,一(1),4 分] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

10.[2006,一(16)/二(18),9 分] 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

11.[2006,二(8),4 分] 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是 ( )

(A) 连续的奇函数. (B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数. (D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

12.[2006,二(15),10 分] 试确定 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中,$o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

13.[2005,二(5),4 分] 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量,则 $k=$ ________.

14.[2005,二(12),4 分] 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则 ( )

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

15.[2004,一(1),4 分] 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________.

16.[2004,一(9),4 分] $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ( )

(A) $\int_1^2\ln^2 x\,dx$. (B) $2\int_1^2\ln x\,dx$.

(C) $2\int_1^2\ln(1+x)dx$. (D) $\int_1^2\ln^2(1+x)dx$.

17.[2004,三(1)/四(1),4 分] 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ ________,$b=$ ________.

18.[2004,三(8),4 分] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$ 则 ( )

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

19.[2003,一(1),4 分] $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

20.[2003,二(1),4 分] 若 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$ ________.

21.[2003,二(13),10 分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arctan x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续,a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

第二章 一元函数微分学

真题考点分析

本章按内容分,可以分为两部分:

1. 导数与微分

(1) 从考试大纲的要求看,主要涉及微分学的基本概念、可导性与可微性的讨论以及导数和微分的计算. 重点内容是:

① 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义.

② 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.

(2) 从考试真题的构成看,近十年,数学一、二、三对导数与微分的概念几乎每年都要考核,

同时，数三对导数的经济意义考查得较多.

2. 微分中值定理及导数的应用

(1) 从考试大纲要求看，主要是利用导数研究函数的性态以及利用中值定理证明或解决一些问题. 重点内容是：

① 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理.

② 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

③ 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值与最小值的求法及其应用.

(2) 从考试真题的构成看，近十年，对微分中值定理的命题，数学一、二、三都着重进行了考查，尤其是罗尔定理和拉格朗日定理的应用，而且几乎全部是大的证明题，务必认真对待.

同时，函数的极值这一块知识点，在数学一、二、三中大都以客观题的形式存在，而且往往应用极值的两个判定条件解题.

最后，对函数图形的凹凸性、拐点及渐近线而言，数学一、二、三都着重进行了考查，尤其是数学二、三，几乎每年一道题，是本章的常考知识点.

真题精讲

题型一 与导数、微分、连续概念有关的命题

解题思路与方法

与导数、微分、连续概念有关的命题，一种是以选择题的形式考查特定函数在一点的可导性或可微性，另外一种就是判断函数的增量、导数与微分的关系. 下面将各自的判定方法总结如下：

(1) 判断函数在一点的可导性，可以利用导数的定义，通常情况下也就是看是否能由已知条件凑成导数定义中极限式子的等价形式.

(2) 判断分段函数的分段点处的可导性，通常利用左导数和右导数的定义.

(3) 判断函数的增量、导数与微分的关系时，通常根据它们的几何意义，利用数形结合的方法进行分析.

真题再现

1. [2013，二(3)，4 分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\pi,\\ 2, \quad \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则 (　　)

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

2. [2013，二(10)，4 分] 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=0}=$ ________.

3. [2012，一(2)/二(2)/三(2)，4 分] 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ (　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n\cdot n!$

4. [2011，二(2)/三(2)，4 分] 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ (　　)

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$　　(C) $f'(0)$　　(D) 0

5. [2007，一(4)/二(4)/三(2)/四(2)，4 分] 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是 (　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

6. [2006，二(9)，4 分] 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于 (　　)

(A) $\ln3-1$　　(B) $-\ln3-1$　　(C) $-\ln2-1$　　(D) $\ln2-1$

7. [2005，一(7)/二(7)，4 分] 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 (　　)

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

8. [2004，三(11)/四(11)，4 分] 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是 (　　)

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

题型二 一元函数导数的几何应用——平面曲线的切线与法线问题

解题思路与方法

导数在几何上的应用主要是求曲线在某点的切线方程与法线方程.

(1) 用显式方程来表示的平面曲线的切线：

设平面曲线C的方程是$y=f(x)$，若$y_0=f(x_0)$，且$f(x)$在x_0可导，则曲线C在点$M_0(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

若$f(x)$在x_0连续，但$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$，则曲线$C$在点$M_0$处的切线方程为$x=x_0$.

(2) 当$f'(x_0)\neq 0$时，存在法线方程：

$$y=y_0-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\qquad (f'(x_0)\neq 0)$$

真题再现

9. [2013，二(12)，4 分] 曲线$\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于$t=1$点处的法线方程为________.

10. [2010，二(3)，4 分] 曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，则$a=$ (　　)

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

11. [2009，二(9)，4 分] 曲线$\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$在点(0,0)处的切线方程为________.

12. [2008，一(10)/二(11)，4 分] 曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点(0,1)处的切线方程是____________.

题型三　求各类一元函数的导数与微分

解题思路与方法

考试中主要涉及的一元函数有：复合函数、隐函数、反函数、变限积分函数、分段函数以及由参数方程所确定的函数. 现将各自的求导方法总结如下：

1. 用导数定义求函数在某点处的导数

(1) 若函数表达式中含有抽象函数符号，且仅知其连续，不知其是否可导，求其导数时必须用导数定义；

(2) 求分段函数在分段点的导数时，必须用导数的定义. 特别是分段点的左、右两侧函数表达式不一样时，一定要用左、右导数的定义来完成.

2. 复合函数求导

复合函数求导的关键是搞清楚函数的复合关系，从外层到内层逐层求导，既不能重复，也不能遗漏. 当所给函数既有四则运算又有复合运算时，应根据所给函数表达式的结构，决定先用导数的四则运算法则还是先用复合函数的求导法则. 对于某些形式较复杂的复合函数，还可以利用微分形式的不变性求导.

3. 由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=f(x)$的求导方法

(1) 方程两边同时对x求导数，注意把y看做x的函数求导，然后解出y'.

(2) 利用隐函数存在定理，直接用公式：$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

(3) 利用一阶微分形式不变性，求出含$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}y$的关系式后，解出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$.

4. 反函数求导

函数$y=f(x)$的反函数求导公式为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

5. 变限积分函数求导

(1) 若变限积分的积分变量不为x，且被积函数中不含有x，则可直接利用变限积分求导公式：

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x),$$

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x).$$

(2) 若变限积分变量不为x，而被积函数中含有x时，可以分为以下两种情况：

① 被积函数中含x的部分可以提到积分号外，如

$$\begin{aligned}\left[\int_a^x g(x)f(t)\mathrm{d}t\right]'&=\left[g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+g(x)\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+g(x)\cdot f(x).\end{aligned}$$

② 被积函数中含x的部分不可以直接提到积分号外，如

$$\begin{aligned}\left[\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]'&\xlongequal[u\in[x,0]]{\text{令}t=x-u}\left[\int_x^0 f(u)\cdot\mathrm{d}(x-u)\right]'=\left[-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u\right]'\\&=\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]'=f(x).\end{aligned}$$

6. 分段函数求导

(1) 对于分段函数，若函数在每小段的开区间内可导，则按导数的运算法则求导即可；而在分段点处的导数必须用导数的定义，特别是分段点的左、右两侧函数表达式不一样时，一定要用左、右导数的定义来完成.

(2) 若函数表达式中含有抽象函数，并且不知该抽象函数是否可导，求具体点处的导数时，必须用导数的定义来完成.

7. 由参数方程所确定的函数的导数

由参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$所确定的函数$y=y(x)$的求导公式为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}.$$

真题再现

13. [2013,一(11),4 分] 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t 为参数),则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

14. [2012,三(10),4 分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f[f(x)]$,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$ ________.

15. [2009,二(12),4 分] 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数,则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

16. [2006,二(5),4 分] 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

17. [2005,二(1),4 分] 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $dy\big|_{x=\pi}=$ ________.

18. [2004,二(2),4 分] 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为______.

题型四　求函数的高阶导数

解题思路与方法

高阶导数的求法大致有以下四种:

(1) 利用泰勒公式中 n 次项的系数与 n 阶导数的关系:

$$f^{(n)}(x_0)=n!\cdot a_n.$$

(2) 利用莱布尼兹公式:

① 如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数,那么显然 $u(x)+v(x)$ 及 $u(x)-v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数,且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};$$

② 乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 的 n 阶导数

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

(3) 用数学归纳法:

第一步,先求出一阶、二阶、三阶等导数;

第二步,从中归纳出 n 阶导数的通用表达式;

第三步,用数学归纳法证明所得到的表达式是正确的.

(4) 分解后利用公式法:把所求的函数分解成已知高阶导数的函数组合,然后按照求导法则,把这些函数的高阶导数代入即可.常用的高阶导数表达式有:

① 设 $y=x^\alpha$,则 $y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;

设 $y=x^n$,则 $y^{(n)}=n!$(n 是正整数);

② 设 $y=a^x$,则 $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$;

设 $y=e^{ax}$,则 $y^{(n)}=a^ne^{ax}$;

③ 设 $y=\ln(1+x)$,则 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$;

设 $y=\ln(ax+b)$,则 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$;

④ 设 $y=\sin x$,则 $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

设 $y=\sin(ax+b)$,则 $y^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$;

⑤ 设 $y=\cos x$,则 $y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

设 $y=\cos(ax+b)$,则 $y^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$;

⑥ 设 $y=\frac{1}{ax+b}$,则 $y^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

真题再现

19. [2010,二(11),4 分] 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

20. [2007,二(13)/三(12)/四(12),4 分] 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

21. [2006,三(2)/四(2),4 分] 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=e^{f(x)}$,$f(2)=1$,则 $f'''(2)=$ ________.

题型五　函数与导函数的零点是否存在的证明

解题思路与方法

1. 证明存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$

方法:利用零点定理(或介值定理):若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.若 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调,则 $f(x)$ 在(a,b)内最多只有一个零点.

2. 证明存在一点 ξ,使得 $f^{(n)}(\xi)=0(n=1,2,\cdots)$

方法一:验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件,由该定理即可得到命题的结论.

方法二:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内 n 阶可导,且在区间$[a,b]$上存在 $C_i(i=0,1,2,\cdots,n-1,n)$ 满足 $f(C_0)=f(C_1)=\cdots=f(C_n)$,则由罗尔定理可知存在 $\eta_j\in(C_{j-1},C_j)$,使得 $f'(\eta_j)=0,j=1,2,\cdots,n$.同理,存在 $\xi_k\in(\eta_k,\eta_{k+1})$,使得 $f''(\xi_k)=0,k=1,2,\cdots,n-1$.反复使用罗尔定理,最终可证得存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

方法三：验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的极值点，用费马定理即得结论.

简言之，证明函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间$[a,b]$内存在零点的基本工具是罗尔定理.

3. 证明存在一点 ξ，使得 $G(\xi,f(\xi),f'(\xi))=0$

这类题目的证法通常是先构造辅助函数，然后利用罗尔定理证明，大致步骤如下：

(1) 构造辅助函数.

常见的辅助函数构造方法有：

① 原函数法：先将 ξ 化为 x，然后将式子恒等变形以便有利于积分，按照常微分方程求解后，所得式子 $F(x,f(x))=C$，则 $F(x,f(x))$ 即为所需的辅助函数.

② 常数比值法：它适用于常数已分离的命题.

③ 观察要证明的结论形式，如果与以下等式的右边式子较为类似，则往往可以直接写出辅助函数：

$$[xf(x)]'=f(x)+xf'(x);$$

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2};$$

$$[e^xf(x)]'=[f'(x)+f(x)]e^x;$$

$$[e^{-x}f(x)]'=[f'(x)-f(x)]e^{-x}.$$

(2) 验证辅助函数 $F(x,f(x))$ 满足罗尔定理.

(3) 由罗尔定理的结论得命题的证明.

真题再现

22. [2013，一(18)/二(18)，10 分] 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

23. [2011，二(3)，4 分] 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ( )

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

24. [2009，一(18)/二(21)/三(18)，11 分] (Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

25. [2008，二(1)，4 分] 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为 ( )

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

26. [2007，一(19)/二(21)/三(19)/四(19)，11 分] 设函数 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$. 证明：

(Ⅰ) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；(数三、四)

(Ⅱ) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.(数一、二、三、四)

27. [2005，一(18)/二(19)，12 分] 已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(Ⅱ) 存在两个不同的点 $\eta,\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

题型六　讨论函数的零点个数

解题思路与方法

讨论函数在给定区间的零点个数时，要先确定函数在这个区域上的单调区间，再利用零点定理确定每个单调区间上零点的存在性，以此确定该函数的零点个数. 具体有两种：

(1) 确定函数 $f(x)$ 的零点个数及每个零点所在区间的方法：

① 求 $f(x)$ 的定义域，并将其定义域分为单调区间.

② 确定 $f(x)$ 在其每个单调区间两端点处是否反号，若反号，则 $f(x)$ 在该区间内存在唯一零点，否则 $f(x)$ 在该单调区间内无零点.

(2) 确定方程 $F(x,k)=0$ 的根的个数与参数 k 取值的关系：

① 把方程 $F(x,k)=0$ 同解变形为 $f(x)=k$ 的形式.

② 确定函数 $f(x)$ 的单调性、极值及其值域，并由此作出 $y=f(x)$ 的简图.

③ 考查直线 $y=k$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数如何随参数 k 的改变而变化，即可得出所需结论.

真题再现

28. [2011，三(18)，10 分] 证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

29. [2005，三(7)/四(7)，4 分] 当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点 ( )

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)8

30. [2003，二(17)，12 分] 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数.

题型七　利用洛必达法则计算函数的极限

解题思路与方法

求函数极限在客观题、解答题中均有出现，主要是求七种未定式的极限. 这七种未定式是：$\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型、$0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、1^∞ 型、∞^0 型和 0^0 型.

(1) 洛必达法则是求 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的重要工具. 但在用洛必达法则解题时，为了避免复杂的计算，提高效率，减少错误，应尽可能综合应用以下方法：

① 函数的连续性与极限的四则运算法则.

② 适当的恒等变形(如：分子或分母有理化，三角恒等式等).

③ 利用两个重要公式和等价无穷小替换.

④ 利用换元法(即复合函数求极限的法则).

(2)$0\cdot\infty$ 型未定式,要先转化成$\frac{0}{0}$ 型和$\frac{\infty}{\infty}$ 型,再利用求$\frac{0}{0}$ 型和$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的方法,求此极限.

(3)$\infty-\infty$ 型未定式也要先转化成$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式再求解,其方法有:

① 若是分式函数之差的 $\infty-\infty$ 型未定式,通分可将其化为$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

② 若是与根式函数的和、差有关的 $\infty-\infty$ 型未定式,有理化、提取公因式等方法可将其转化为$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

③ 若是多项式或其他函数之差的 $\infty-\infty$ 型未定式,提取公因式或变量替换可将其转化为$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

(4) 求 1^{∞} 型、0^0 型和 ∞^0 未定式的极限.

① 根据指数和底数的变化趋势可以将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限分为 1^{∞} 型、0^0 型和 ∞^0 型. 由于 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$,故$\lim f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$. 将幂指函数的未定式转化为 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限,最后再化为求$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限.

② 对于 1^{∞} 型未定式,拆底数、配指数可利用第二个重要极限公式,有

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)\cdot g(x)}=\mathrm{e}^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

真题再现

31. [2012,三(15),10 分] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

32. [2011,一(15),10 分] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

33. [2010,三(15),10 分] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

34. [2009,二(15),9 分] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

35. [2008,一(15)/ 二(15),9 分] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

36. [2007,二(11),4 分] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ______.

题型八 不等式的证明

解题思路与方法

1. 利用函数的单调性证明不等式

欲证在区间$[a,b]$上,$f(x)<g(x)$,可作辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$.

(1) 若 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上单调增加,且 $F(b)<0$,则结论得证.

(2) 若 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上单调减少,且 $F(a)<0$,则结论得证.

2. 利用函数的极值和最值证明不等式

(1) 根据函数最值的定义,如果函数在一个区间上仅在某一点取得最大值(或最小值),那么函数在这个区间上的任何一点的函数值都小于(或大于)这点的函数值.

(2) 根据函数极值的定义,如果一点是函数在一个小区域内的极大值点(或极小值点),那么函数在这个小区域内的任何一点的函数值都不大于(或不小于)这点的函数值.

3. 利用凹凸弧的几何特征证明不等式

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 是区间$[a,b]$上的凸弧,则对 $\forall x\in[a,b)$,有

$$f(x)>\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 是区间$[a,b]$上的凹弧,则对 $\forall x\in(a,b)$,有

$$f(x)<\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 是区间 I 上的凸弧,则 $\forall x,x_0\in I$ 且 $x\neq x_0$,有

$$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

(4) 若曲线 $y=f(x)$ 是区间 I 上的凹弧,则对 $\forall x,x_0\in I$,且 $x\neq x_0$,有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

【注】 在(3)、(4) 中 I 可以是闭区间$[a,b]$,也可以是开区间,或者也可以是无穷区间.

4. 常值不等式的证明,通常是作辅助函数转化为函数不等式进行证明

5. 若需证明的不等式中有函数的差值出现时,常用拉格朗日中值定理证明

6. 若要证明的不等式中有函数的差值之比出现时,常用柯西中值定理证明

真题再现

37. [2012,三(18),10 分] 证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

38. [2004,一(15)/ 二(19),12 分] 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$,证明 $\ln^2b-\ln^2a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

题型九 有关函数的单调性的问题

解题思路与方法

函数的单调性经常会与其他知识点相结合,尤其是导数相结合. 现将函数的单调性判定方法总结如下:

(1) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上任意两点