九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版同济大学数学系编

教你用更多的自信面对未来！

高等数学
（第七版·上册）
同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

一书两用
同步辅导+考研复习

新版

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第七版·上册）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版的，同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版·上册）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

《高等数学》（第七版·上册）共有7章，分别介绍函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习导引，知识要点及常考点，本节考研要求，题型、真题、方法，课后习题全解五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《高等数学》（第七版·上册）课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第七版·上册）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2014.10

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5170-2622-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第240328号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学（第七版·上册）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　苏志平　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	148mm×210mm　32开本　13.5印张　465千字
版　次	2014年10月第1版　2014年10月第1次印刷
印　数	0001—13000册
定　价	17.80元

前言

同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版 · 上册)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学(第七版 · 上册)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《高等数学》(第七版 · 上册)这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. 学习导引。介绍要求掌握的知识点，以及本章的主要内容。

2. 知识要点及常考点。对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

3. 本节考研要求。明确考研的学习任务。

4. 题型、真题、方法。按照本章的知识要点划分题型，通过例题和真题的详细解答，引导学生思考问题，开拓广大同学的解题思路，使其能更好地掌握高等数学的基本内容和解题方法。

5. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2014 年 09 月

目录

第一章　函数与极限

学习导引

函数是高等数学的研究对象，极限的方法是研究函数的基本方法，本章主要学习函数及其相关概念，函数的基本性质和常见初等函数，函数极限，无穷小与无穷大等.本章是初等数学到高等数学的过渡篇，是高等数学的基础.

第一节　映射与函数

知识要点及常考点

1. 函数

(1) 定义：设有两个变量x和y，变量x的变域为D，如果对于D中的每一个x值，按照一定的对应法则，变量y有一个确定的值与之对应，则称变量y为变量x的函数，记作$y=f(x)$，其中x是自变量，y是因变量，变域D为定义域，记作D_f，变量y的取值的集合称为函数的值域，记作Z_f.

注　函数概念的两要素：① 定义域：自变量x的取值范围(若函数是用解析式表示的，则定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合). ② 对应法则：给定x值，求y值的方法.

当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数，否则表示两个不同的函数.

(2) 高等数学中研究的对象是函数.函数概念的实质是变量之间确定的对应关系.变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应法则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被唯一确定，前者是一元函数，后者是多元函数.

(3) 常量与变量、自变量与因变量是相对的.一个量在某个过程中是常量，在另一过程中可以是变量，一个量在某个过程中是自变量，在另一过程中可以是因变量，这一点既简单又重要.

(4) 函数表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y = f(x)$ 与 $g = f(t)$ 表示同一函数，此为函数表示法的"无关性".

2. 反函数

(1) 定义：设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为：$x = \varphi(y)$，其中 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

(2) 性质：①$y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合；$y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数.

③ 严格单调函数必有反函数，且严格递增(减)的函数的反函数也必严格递增(减). 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数.

3. 复合函数

(1) 定义：设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D$ 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

(2)g 与 f 能构成复合函数 $f^\circ g$ 的条件：函数 g 在 D 上的值域 Z_g 必须含在 $f(x)$ 的定义域 D_f 中，即 $Z_g \cap D_f$.

(3) 结合律成立，$(f^\circ g)^\circ h = f^\circ(g^\circ h)$，但没有交换律，即 $f^\circ g \neq g^\circ f$.

4. 分段函数

(1) 定义：在自变量不同变化范围内，对应法则不同，即用不同式子来表示同一个函数称作分段函数.

(2) 常见的分段函数：

① 符号函数　$y = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$

②y 是 x 的最大整数部分，记为 $y = [x]$.

③ 狄利克雷函数　$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}; \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$

5. 初等函数

(1) 定义：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数.

(2) 基本初等函数包括五类函数：幂函数：$y = x^\mu (\mu \in R)$；指数函数 $y = a^x (a >$

0 且 $a \neq 1$)；对数函数：$y = \log_a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$；三角函数：如 $y = \sin x, y = \cos x$，$y = \tan x$ 等；反三角函数：如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

6. 函数的基本性质

(1) 单调性

定义：设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若 $\forall_{x_1,x_2} \in D$，有 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 单调上升，若 $\forall_{x_1,x_2} \in D$，有 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 单调下降.

注　若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降).

(2) 奇偶性

① 定义：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

常考点　偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

② 常见的奇函数和偶函数：

偶函数：$C, x^2, x^{2n}, |x|, \cos x, \sec x, e^{x^2}, \sin x^2$.

奇函数：$x, x^3, x^{2n+1}, \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x}, \sin x, \tan x, \cot x, \arcsin x, \arctan x$.

③ 奇偶函数的运算性质：

(ⅰ) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(ⅱ) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(ⅲ) 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

(3) 有界性

① 定义：设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于一切 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界；若不存在这样的 $M > 0$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注　函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

② 六个常见的有界函数：

$|\sin x| \leqslant 1, |\cos x| \leqslant 1, (-\infty, +\infty)$

$|\arcsin x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, |\arccos x| \leqslant \pi, [-1,1]$

$|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x| < \pi, (-\infty, +\infty)$

(4) 周期性

① 定义：设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使对于任一 $x\in X$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，把满足上式的最小正数 T 称为函数的最小正周期.

易错点　①(ⅰ)周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数.

(ⅱ)定义中，并不要求函数的定义域有界.

② 常见的周期函数：

(ⅰ)$y=\sin x, y=\cos x$，最小正周期为 2π；

(ⅱ)$y=\tan x, y=\cot x$，最小正周期为 π.

③ 周期函数的运算性质：

(ⅰ)若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(ⅱ)若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(ⅲ)若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1\neq T_2$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$，是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

(ⅳ)若 $f(x)$ 为周期函数，则复合函数 $g[f(x)]$ 也是周期函数.

本节考研要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

题型、真题、方法

题型 1　判断函数的等价性

题型分析　当且仅当给定的两个函数其定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才表示同一函数，否则表示不同的函数.

例 1 判断下列各组函数是否相等：

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$，$g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

思路点拨　当且仅当给定的函数其定义域和对应法则完全相同时，这些函数才表示同一函数，否则表示不同的函数.

解　(1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故 $f(x) \neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$、$g(x)$ 和 $h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$，故 $f(x) = g(x) = h(x)$.

例 2 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$；　(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$.

思路点拨　通过定义域和对应法则是否相同.

解　(1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$；$y = 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \mid x \geqslant 0\}$；$y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

现学现练　$y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$ 是否等价.（是）

题型 2　求函数的定义域

题型分析　求函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零；② 偶次根式的被开方数大于等于零；③ 对数的真数大于零；④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x \mid |x| \leqslant 1\}$；⑤ $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$；⑥ $\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y = \ln(x+1) + 2^{\frac{1}{x-1}}$；　　(2) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$.

思路点拨　求函数的定义域时，一般主要针对一些基本形式来确定其定义域，然后再综合考虑. 基本形式可分为 $\sqrt{A}$，$\dfrac{1}{A}$，$\ln A$，$\arcsin A$，$\arccos A$ 等，其相应的定义域为 $A \geqslant 0$，$A \neq 0$，$A > 0$，$|A| \leqslant 1$ 等.

解　(1) $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) $\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|,\\ x\neq -1,\end{cases}$ 定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

例 4 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.（考研题）

思路点拨　先确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 由 $f[\varphi(x)]=1-x$，有 $e^{[\varphi(x)^2]}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$.

现学现练　求 $\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.（$1\leqslant x\leqslant 4$）

题型 3　求函数的表达式

题型分析

1. 观察法和变量代换法是解简单函数方程最基本的两种方法.

2. 利用函数表示法的“变量无关性”判断：当两个函数定义域相同且对应法则一致时，这两个函数表示同一个函数.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$，则 $f(f(x))$ 等于(　　).（考研题）

(A)0.　　　　(B)1.

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

解 由题可知，$|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f(f(x))=1$，则 $f(f(f(x)))=f(1)=1$. 故选(B).

题型 4　函数的奇偶性

题型分析

1. 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数既不是奇函数也不是偶函数. 在判断函数奇偶性之前应先检查函数的定义域.

2. 利用 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系来判断函数的奇偶数. 若 $f(-x)=f(x)$，为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则为奇函数.

例 6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = e^{x^2}\sin x$；　(2) $y = \log_a(x + \sqrt{1+x^2})$，$(a > 0, a \neq 1)$.

思路点拨　先判断定义域是否对称，然后按定义判定奇偶性.

解 (1) 因为 $\sin x$ 为奇函数，x^2 为偶函数，所以 $y = e^{x^2}\sin x$ 为奇函数.

$$(2) f(-x) = \log_a(-x + \sqrt{1+x^2}) = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\log_a(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

所以原函数为奇函数.

例7 $f(x) = |x\sin x| e^{\cos x}$，$-\infty < x < +\infty$ 是(　　)(考研题)

(A) 有界函数．　(B) 单调函数．　(C) 周期函数.　(D) 偶函数.

解 $f(-x) = |-x\sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x\sin x| e^{\cos x} = f(x)$，可见 $f(x)$ 为偶函数，故应选(D).

现学现练　判定 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 的奇偶性．(奇函数)

题型5　函数的单调性和有界性

题型分析　(1) 函数单调性的判断：若 $f(x)$ 在区间 x 上没有告知可导，则其单调性用定义判别；若 $f(x)$ 在区间 x 上可导，则利用导数判别更简便.

(2) 证明函数有界的方法：

① 利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理.

② 采用导数求最值的方法.

③ 根据连续函数的性质证明.

例8 指出下面两个函数是否有界？

(1) $y = \dfrac{1}{x^2}$，$a \leqslant x \leqslant 1$(其中 $0 < a < 1$)；

(2) $y = x\cos x$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

思路点拨　利用函数有界性的定义判断.

解 (1) 因为 $a \leqslant x \leqslant 1$，

所以 $a^2 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$，$\left(0 < a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} > 1\right)$

即 $y = \dfrac{1}{x^2}$，当 $x \in [a,1]$ 时有界，$\dfrac{1}{a^2}$ 是一个上界.

(2) 对 $\forall M > 0$，取 $x = (2[M]+1)\pi$($[M]$ 表示取 M 的整数部分)，

则 $\cos x = -1$.

此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$,
由定义可知当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时 $y=x\cos x$ 无界.

例9 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小,证明:对任意两点 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

思路点拨　$\dfrac{f(x)}{x}$ 单调是唯一的条件,因此要从 $\dfrac{f(x)}{x}$ 出发,逐步构造和结论联系的桥梁.

解　不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$,故有 $\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$,

即 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$,又因为 $x_2<x_1+x_2$,则 $\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

得 $x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2[f(x_2)+f(x_1)]$,
即 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

现学现练　证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

题型6　反函数的求法

题型分析　反函数求法比较固定,具有很强的程序性,步骤如下:
(1) 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出.
(2) 把刚才所得到的表达式中 x 与 y 对换,即可得到反函数 $f^{-1}(x)$.
(3) 对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

例10 求函数 $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$ 的反函数.

思路点拨　把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出,然后变换 x,y.

解　当 $x\neq 0$ 时,将原式变形为 $y(10^{2x}-1)=10^{2x}+1+(10^{2x}-1)$

即 $(y-2)10^{2x}=y$,解得 $x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{y}{y-2}$,

故反函数为 $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{x-2}$.

题型7　复合函数的求法

题型分析　(1) 代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法称为代入法,适用于初等函数或抽象函数的复合.

(2) 分析法：所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

例11 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(f(x))]$；$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

思路点拨　将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替.

解 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}(x\neq 0)$，

$$f[f(f(x))]=f(\frac{x-1}{x})=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x,$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{x}(x\neq 0).$$

题型8　周期函数的计算

题型分析　判定函数为周期函数的主要方法：

1. 从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$.
2. 利用周期函数的运算性质证得.

例12 设 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称($a<b$)，求证：$y=f(x)$ 是周期函数并求其周期.

思路点拨　关键是构造 T，使 $f(x+T)=f(x)$.

解　对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$\begin{aligned}f(x+2b-2a)&=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))\\&=f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

现学现练　已知 $y+|\sin x|+|\cos x|$ 是周期函数，求其最小周期．$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

课后习题全解

习题1－1全解

1. 分析　利用所求函数的各个简单函数的定义域求交集．