北大燕园

2014年 李正元·李永乐

考研数学 5

数学 历年试题解析

数学二

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐

中国政法大学出版社

北大燕园

2014年李正元·李永乐考研数学⑤

数学

数学二

历年试题解析

主编　北京大学　李正元
清华大学　李永乐

编者　（按姓氏笔画）
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京大学　刘西垣
北京大学　范培华

中国政法大学出版社

2013·北京

图书在版编目(CIP)数据

2014年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学二/李正元,李永乐主编．—北京：中国政法大学出版社,2013.2

ISBN 978-7-5620-4668-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①高等学校-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第023653号

书　　名	2014年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学二 2014NIAN LIZHENGYUAN · LIYONGLE KAOYANSHUXUE SHUXUELINIANSHITIJIEXI SHUXUEER
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路25号) 北京100088信箱8034分箱　邮编100088　fada. sf@ sohu. com http://www. cuplpress. com (网络实名:中国政法大学出版社) (010)58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　1/16
印　　张	19.75
字　　数	520千字
版　　本	2013年2月第1版　　2013年2月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5620-4668-4/O
定　　价	30.00元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1999 年～2013 年全国硕士研究生入学统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了1998年（含）以前数学二相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读**《考研数学复习全书》（数学二）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2～3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2013年2月

目　　录

第一篇　2013 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　1999 ~ 2012 年考研数学二试题

第三篇　1999 ~ 2012 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2013 年考研数学二试题及答案与解析

2013 年考研数学二试题

12.30 . 8.30

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$,则当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是

(A) 比 x 高阶的无穷小.　　(B) 比 x 低阶的无穷小.

(C) 比 x 同阶但不等价的无穷小.　　(D) 与 x 等价的无穷小.

【 C 】

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right] =$

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) −1.　　(D) −2.

【 A 】

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,则

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　$[0,\pi)$ $F(x)=\int_0^x \sin t\,dt = -\cos t\big|_0^x = -\cos x + 1$

(B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.　$[\pi,2\pi]$ $F(x)=\int_0^\pi \sin t\,dt + \int_\pi^x 2\,dt = -\cos t\big|_0^\pi + 2t\big|_\pi^x$

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导.　$= -\cos\pi + \cos 0 + 2(x-\pi)$

(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.　$= 1+1+2x-2\pi = 2x-2\pi+2$

$f'(x)=\sin x$　　$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=2$　$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=2$　　【 C 】

$f'(x)=2$

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant e. \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛,则

$\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx + \int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx = \int_1^e (x-1)$

(A) $\alpha < -2$.　$0<\alpha-1<1$　　(B) $\alpha > 2$.　$= \frac{1}{2-\alpha}(x-1)^{2-\alpha}\Big|_1^e$

(C) $-2 < \alpha < 0$.　　(D) $0 < \alpha < 2$.

$I_1 = \int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^{\alpha+1}x}d\ln x = (\ln x)^{-\alpha}\Big|_e^{+\infty} \Rightarrow -\alpha<0 \therefore \alpha>0$　　【 D B 】

(5) 设 $z = \frac{y}{x}f(xy)$,其中函数 f 可微,则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$

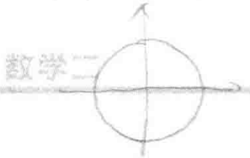
(A) $2yf'(xy)$.　(B) $-2yf'(xy)$.　(C) $\frac{2}{x}f(xy)$.　(D) $-\frac{2}{x}f(xy)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f + \frac{y^2}{x}f'$　$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + \frac{y}{x}xf'$　$= -\frac{1}{x}f + yf' + \frac{1}{x}f + yf'$　　【 A 】

(6) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\,dxdy$ $(k = 1,2,3,4)$,则

(A) $I_1 > 0$.　(B) $I_2 > 0$.　(C) $I_3 > 0$.　(D) $I_4 > 0$.

$I_1 = \iint\limits_{D_1}(y-x)dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sin x - \cos x)r\,dr$　　【 B 】



$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1(\sin x - \cos x)\,dr$　✓

$R(A)=R(C)$

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价．　$AX=C$

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价．

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价．

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价．

$|2E-A|=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\-1&-a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\0&-2a&0\end{vmatrix}$　【 B 】

$=-2a[2-b-a^2]=0$

(8) 矩阵 $\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为　$a=0$ 或 $a^2+b=2$

(A) $a=0,b=2$．　$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&1\\0&b&a\\0&0&0\end{vmatrix}$

(B) $a=0,b$ 为任意常数．

(C) $a=2,b=0$．

(D) $a=2,b$ 为任意常数．

$|bE-A|=\begin{vmatrix}b-1&-a&-1\\-a&0&-a\\-1&-a&b-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&-a&-1\\0&0&-a\\-b&-a&b-1\end{vmatrix}$　【 B 】

$=a\begin{vmatrix}-ab&-ab\end{vmatrix}=0$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ $2e^{\frac{1}{2}}$．

这 (10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ 0．

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是 $\frac{\pi}{12}$．

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^{2}}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 $y+4x-\ln^2+\pi=0$．

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ $2Ce^{x}+2Ce^{3x}+Cxe^{-2x}$．

X (14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式．若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ 0．

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^{n} 为等价无穷小，求 n 与 a 的值．

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积．若 $V_y=10V_x$，求 a 的值．

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_{D}x^{2}\,dx\,dy$．

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta \in (-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求此极限.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$.

(Ⅰ)求 L 的弧长;

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x=1, x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形. 求 D 的形心的横坐标.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$. 当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2013 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 由题意知当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x)$ 是无穷小,即 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

因此 $\alpha(x)$ 与 x 是同阶但不等价的无穷小. 故选(C).

(2)【分析】 函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，并满足 $f(0)=1$，将方程两边对 x 求导得

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}y'-1=0.$$

上式令 $x=0,y=1\Rightarrow y'(0)=1$．于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=2f'(0)=2.$$

故选(A)．

(3)【分析一】 先求出 $F(x)$．

当 $0\leqslant x<\pi$ 时，$F(x)=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_0^x=1-\cos x$;

当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$F(x)=\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}t=2+2(x-\pi)$，

于是 $$F(x)=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 2x-2(\pi-1), & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续，但

$$F'_-(\pi)=(1-\cos x)'\big|_{x=\pi}=0,$$
$$F'_+(\pi)=[2x-(2\pi-1)]'\big|_{x=\pi}=2,$$

由于 $F'_+(\pi)\neq F'_-(\pi)$，故 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导．因此选(C)．

【分析二】 不必求出 $F(x)$．因 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可积，故 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续．

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，由

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad F'_-(\pi)=\left(\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\right)'\Bigg|_{x=\pi}=\sin\pi=0.$$

当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，由

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad F'_+(\pi)=\left(\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}t\right)'\Bigg|_{x=\pi}=2.$$

由于 $F'_+(\pi)\neq F'_-(\pi)$，故 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导．因此选(C)．

(4)【分析】 由于

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^{\alpha+1}x},$$

? 而 $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$；$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}$ 收敛 $\Leftrightarrow\alpha+1>1$ 即 $\alpha>0$．

因此 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow 0<\alpha<2$．故选(D)．

(5)【分析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x}f'(xy)\cdot y-\dfrac{y}{x^2}f(xy)=\dfrac{y^2}{x}f'(xy)-\dfrac{y}{x^2}f(xy)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}f(xy)=yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy),$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\left[yf'(xy)-\frac{1}{x}f(xy)\right]+yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy)=2yf'(xy).$$

故选(A).

---

(6)【分析】 被积函数 $f(x,y)=y-x$ 在每个 $D_k(k=1,2,3,4)$ 均连续. 当 $(x,y)\in D_2=\{(x,y)\mid x\leqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 时 $f(x,y)\geqslant 0$, $\not\equiv 0$,于是 $\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$. 故选(B).

评注 D_1 与 D_3 均关于直线 $y=x$ 对称,于是 $\iint\limits_{D_k}y\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_k}x\mathrm{d}\sigma(k=1,3)\Rightarrow\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}\sigma=0(k=1,3)$. 在 D_4 时 $f(x,y)\leqslant 0$, $\not\equiv 0\Rightarrow\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}\sigma<0$.

---

(7)【分析】 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,那么对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即
$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\cdots\cdots\\\boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出.

由向量组等价的定义可知,应选(B).

或者,可逆矩阵可表示成若干个初等矩阵的乘积,于是 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换化为 $\boldsymbol{C}$,而初等列变换保持矩阵列向量组的等价关系. 故选(B).

---

(8)【分析】 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$,考察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$ 的条件.

首先,显然 $|\boldsymbol{A}|=0$,因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

其次,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=2+b$,因此如果 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 b 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值. 于是"充要条件"为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\-1&-a&1\end{vmatrix}=-4a^2=0\Rightarrow a=0.$$

因此充要条件为 $a=0$,b 为任意常数,故应选(B).

二、填空题

(9)【分析一】 这是求 1^{∞} 型极限.

$$I \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}} = e^{A},$$

其中 $$A = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

因此 $I = e^{\frac{1}{2}}$.

【分析二】 $I = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]} = e^{A}$,其中

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]\text{(等价无穷小因子替换)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}\text{(同【分析一】)}.$$

因此 $I = e^{\frac{1}{2}}$.

---

(10)【分析】 $y = \int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt = 0 \Leftrightarrow x = -1$,由

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^{x}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{x}}},$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-e^{x}}}\right|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}} = \sqrt{\frac{e}{e-1}}.$$

---

(11)【分析】 L 所围平面图形的面积是

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(1+\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\sin 6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

或 $$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

---

(12)【分析】 $t = 1$ 时对应曲线上的点 $M_0(\arctan 1, \ln\sqrt{1+1})$ 即 $M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\ln 2\right)$.先求出曲线在 M_0 处的切线的斜率

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = \left.\frac{y'_t}{x'_t}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=1} = 1,$$

于是曲线在点 M_0 处的法线的斜率为 -1.因此曲线在点 M_0 处的法线方程是

$$y = \frac{1}{2}\ln 2 - \left(x-\frac{\pi}{4}\right),\text{即 } y + x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = 0.$$

---

(13)【分析】 由二阶线性微分方程解的性质知

$$y_1 - y_3 = e^{3x},\quad y_2 - y_3 = e^{x}$$

是该二阶常系数线性非齐次方程相应的齐次方程的两个解，显然它们线性无关.

再由二阶线性微分方程的通解的结构知，该方程的通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} - xe^{2x}\text{，其中 } C_1, C_2 \text{ 为两个任意常数.}$$

从而 $y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} - (1+2x)e^{2x}$，由 $y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 1$ 可定出 $C_1 = 1, C_2 = -1$，于是

$$y = e^{3x} - e^{x} - xe^{2x}.$$

---

(14)【分析】 题设条件“$a_{ij} + A_{ij} = 0$”即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}^*$，于是 $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|^2$，可见 $|\boldsymbol{A}|$ 只可能是0或 -1. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(-\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 只可能为3或0. 而 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 不能为0，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，$|\boldsymbol{A}| = -1$.

或，用特例法. 取一个行列式为 -1 的正交矩阵满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}^*$.

三、解答题

(15)【分析与求解一】 $I \xlongequal{\text{记}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x+\cos x\cos 2x-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{ax^n} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{ax^n} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{ax^n} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{ax^n}$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 2, \\ \infty, & n > 2, \\ \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{9}{2}\right), & n = 2. \end{cases}$$

由题设，$I = 1 \Leftrightarrow n = 2, \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{9}{2}\right) = 1$，即 $n = 2, a = 7$.

【分析与求解二】 用泰勒公式.

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

$$\cos x\cos 2x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3),$$

$$\cos x\cos 2x\cos 3x = 1 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - 7x^2 + o(x^2),$$

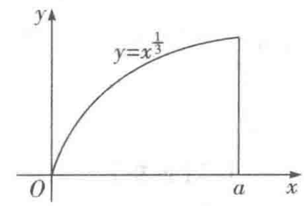
于是

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1-[1-7x^2+o(x^2)]}{ax^n} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2+o(x^2)}{ax^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{ax^n}[7+o(1)] = \begin{cases} 0, & n < 2, \\ \infty, & n > 2, \\ \dfrac{7}{a}, & n = 2. \end{cases}$$

由题设，$I = 1 \Leftrightarrow n = 2, \frac{7}{a} = 1$，即 $n = 2, a = 7$.

(16)【分析与求解】 D 如图所示，按旋转体体积公式有



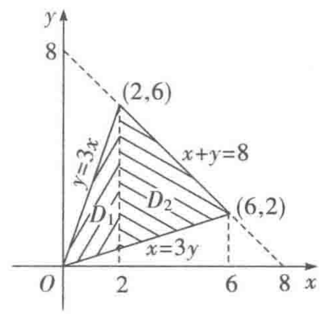
$$V_x = \pi\int_0^a y^2 dx = \pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \cdot \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a = \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y = 2\pi\int_0^a xy(x) dx = 2\pi\int_0^a x x^{\frac{1}{3}} dx = 2\pi \cdot \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a = \frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}},$$

按题意 $\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = 7$，即 $a = 7^{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{7}$.

(17)【分析与求解】 这些直线的交点除点(0,0)外还有(2,6),(6,2)，平面区域 D 如图所示. D 的边界是分段表示的，要用分块积分法. 将 D 分为 $D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1: 0 \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{3}x \leqslant y \leqslant 3x; \quad D_2: 2 \leqslant x \leqslant 6, \frac{1}{3}x \leqslant y \leqslant 8 - x.$$



于是
$$I \xlongequal{\text{记}} \iint_D x^2 dxdy = \iint_{D_1} x^2 dxdy + \iint_{D_2} dxdy$$
$$= \int_0^2 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{3x} x^2 dy + \int_2^6 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} x^2 dy$$
$$= \int_0^2 \frac{8}{3}x^3 dx + \int_2^6 x^2\left(8 - \frac{4}{3}x\right)dx$$
$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}x^4\Big|_0^2 + \frac{8}{3}x^3\Big|_2^6 - \frac{4}{3}\frac{1}{4}x^4\Big|_2^6$$
$$= \frac{8 \cdot 4}{3} + \frac{8 \cdot 6^3}{3} - \frac{8 \cdot 8}{3} - \frac{8 \cdot 2 \cdot 3^4}{3} + \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{416}{3}.$$

(18)【分析与证明】 (Ⅰ) 由 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(0) = 0$.

方法 1° 在[0,1]上，由拉格朗日中值定理知，$\exists \xi \in (0,1)$ 使得

$$f'(\xi) = f(1) - f(0) = f(1) = 1.$$

方法 2° 转化为证明 $f'(x) - 1 = [f(x) - x]'$ 在(0,1)∃ 零点.

令 $F(x) = f(x) - x \Rightarrow F(x)$ 在[0,1]可导且

$$F(0) = f(0) = 0, \quad F(1) = f(1) - 1 = 0,$$

于是由罗尔定理知，$\exists \xi \in (0,1)$ 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0, \text{ 即 } f'(\xi) = 1.$$

(Ⅱ) **方法 1°** 即证明

$$f''(x) + f'(x) - 1 \text{ 在}(-1,1)\exists \text{ 零点}$$

$$\Leftrightarrow \quad [f'(x) + f(x) - x]' \text{ 在}(-1,1)\exists \text{ 零点}.$$

令 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$，则 $F(x)$ 在[-1,1]可导，又

$$F(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1),$$
$$F(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(-1),$$

这里 $f(x)$ 在[-1,1]为奇函数，又 $f(1) = 1 \Rightarrow f(1) - 1 = 0, f(-1) + 1 = -f(1) + 1 = 0$. 又 $f'(x)$ 在[-1,1]为偶函数，$f'(-1) = f'(1)$，于是 $F(1) = F(-1)$.

因此对 $F(x)$ 在[-1,1]上用罗尔定理得，$\exists \eta \in (-1,1)$ 使得

$$F'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0,\text{即}f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

方法 2° 即证明

$f''(x)+f'(x)-1$ 在 $(-1,1)$ $\exists$ 零点

$\Leftrightarrow$ $e^x[f''(x)+f'(x)-1]$ 在 $(-1,1)$ $\exists$ 零点

$\Leftrightarrow$ $[e^x(f'(x)-1)]'$ 在 $(-1,1)$ $\exists$ 零点.

令 $F(x)=e^x[f'(x)-1]$,则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 可导,由题(Ⅰ),$\exists\xi\in(0,1)$,$f'(\xi)=1$,于是 $F(\xi)=0$. 又因 $f'(x)$ 为偶函数,$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$,于是 $F(-\xi)=0$.

$[-\xi,\xi]\subset(-1,1)$,由罗尔定理知,$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使得

$$F'(\eta)=0,\text{即}f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

---

(19)**【分析与求解一】** 记曲线上点 (x,y) 到原点的距离的平方为 $f(x,y)=x^2+y^2$,则问题转化为求 $f(x,y)$ 在条件 $x^3-xy+y^3-1=0$ 下的最大值与最小值.

用拉格朗日乘子法. 令 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$.

求驻点:解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)=0, \quad ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda(-x+3y^2)=0, \quad ②$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0, \quad ③$$

将 ① $\times y^2$ − ② $\times x^2$ 得

$$2xy(y-x)+\lambda(x-y)(x^2+xy+y^2)=0.$$

由此得 $x=y$,以 $y=x$ 代入 ③ 得

$$x^3-x^2+x^3-1=0,$$

改写成 $x^2(x-1)+(x-1)(x^2+x+1)=0$,即 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$,

解得 $x=1$,得唯一驻点 $(1,1)$. 又曲线是含端点的曲线段,端点为 $(0,1)$ 与 $(1,0)$. 现比较函数值

$$f(0,1)=1,\quad f(1,0)=1,\quad f(1,1)=2.$$

因实际问题存在最长与最短距离,故最长距离为 $\sqrt{2}$,最短距离为 1.

【分析与求解二】 由于曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 关于直线 $y=x$ 对称,故只需考察 $y=x$ 的上方部分. 曲线与 $y=x$ 的交点是 $(1,1)$,现考察

$$f(x)=x^2+y^2(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1),$$

其中 $y(x)$ 是由方程 $x^3-xy+y^3=1$ 确定的隐函数.

$$f'(x)=2x+2yy', \quad ①$$

将曲线方程两边对 x 求导得

$$3x^2-y-xy'+3y^2y'=0,\text{解得 }y'=\frac{y-3x^2}{3y^2-x}. \quad ②$$

将 ② 式代入 ① 式得

$$f'(x)=2\left[x+\frac{y(y-3x^2)}{3y^2-x}\right]=\frac{2(3y^2x-x^2+y^2-3x^2y)}{3y^2-x^2}$$

$$=\frac{2[3xy(y-x)+y^2-x^2]}{3y^2-x^2}>0(x>0,y>x,\text{在 }y=x\text{ 上方满足 }y>x).$$

于是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调上升,最小值为 $f(0)=0+y^2(0)=1$,最大值为 $f(1)=1^2+y^2(1)=1+1=2$. 因此最短距离为 1,最长距离为 $\sqrt{2}$.

---

(20)【分析与求解】 （Ⅰ）函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 考察 $f(x)$ 的单调性：

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\begin{cases}<0, & 0<x<1,\\ =0, & x=1,\\ >0, & x>1\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1]\searrow$，在 $[1,+\infty)\nearrow\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 取最小值 $f(1)=1$.

（Ⅱ）即证明 $\{x_n\}$ 单调有界. 已知 $x_n>0$，则有

$$\ln x_n<\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$$

$\Rightarrow 0<x_n<\mathrm{e}$，从而 $\{x_n\}$ 有界.

由题（Ⅰ）知 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$，即 $1-\ln x\leqslant\frac{1}{x}\ (x\in(0,+\infty))$，又 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，因此

$$\frac{1}{x_{n+1}}<1-\ln x_n\leqslant\frac{1}{x_n}\ (n=1,2,3,\cdots)，从而\ x_{n+1}>x_n\ (n=1,2,3,\cdots).$$

可见 $\{x_n\}$ 是单调上升的. 因为 $\{x_n\}$ 单调有界，所以存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\overset{记}{=\!=}a$. 因 $x_n>0$，$\nearrow\Rightarrow a>0$. 由

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$$

令 $n\to\infty$ 取极限得 $\ln a+\frac{1}{a}\leqslant 1$. 由题（Ⅰ）可知，当 $a>0, a\neq 1$ 时

$$\ln a+\frac{1}{a}>1，因此\ a=1，即\ \lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

---

(21)【分析与求解】 （Ⅰ）由 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\ (1\leqslant x\leqslant\mathrm{e})\Rightarrow$

$$y'=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),\quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+1}{2x}.$$

于是曲线 L 的弧长为

$$\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2+1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1).$$

（Ⅱ）按形心公式，D 的形心的横坐标为 $\bar{x}=\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}}xy(x)\,\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}}y(x)\,\mathrm{d}x}$，其中

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}xy(x)\,\mathrm{d}x&=\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4^2}x^4\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x^2\\&=\frac{1}{4^2}(\mathrm{e}^4-1)-\frac{1}{4}x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}}x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4^2}(\mathrm{e}^4-1)-\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3}{4^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}y(x)\,\mathrm{d}x&=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{12}(\mathrm{e}^3-1)-\frac{1}{2}\mathrm{e}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)=\frac{1}{12}(\mathrm{e}^3-7),\end{aligned}$$

因此 $\bar{x}=\dfrac{3}{4}\dfrac{\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^3-7}$.
