

李成辉
●
编

振动理论与 分析基础

与

ZHENDONG LILUN YU
FENXI JICHU



西南交通大学出版社

振动理论与分析基础

李成辉 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内容提要

本书简明系统地讲解了线性振动基本概念、基本理论和基本分析方法。内容包括单自由度系统振动、多自由度系统振动、连续系统振动和随机振动理论基础。考虑到高效的振动计算和分析商用软件的广泛应用,因此本书淡化了振动微分方程建立、求解和分析技巧。本书可作为工科院校研究生和本科生振动理论教材,也适合从事结构振动分析的工程技术人员,特别是道路与铁道工程的工程技术人员作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

振动理论与分析基础 / 李成辉编. —成都: 西南
交通大学出版社, 2015.1

ISBN 978-7-5643-3507-6

I. ①振… II. ①李… III. ①振动理论 IV. ①O32

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第246229号

振动理论与分析基础

李成辉 编

*

责任编辑 张 波

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

四川省成都市金牛区交大路146号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564

<http://www.xnjdcbs.com>

成都中铁二局永经堂印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 170 mm × 230 mm 印张: 9.75

字数: 174千字

2015年1月第1版 2015年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5643-3507-6

定价: 22.00元

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

振动表现为往复运动，是力学中的一类特殊运动。振动现象是自然界和人类活动的普遍现象，在工程技术领域也处处可见。如土木建筑物房屋、桥梁和道路，交通运输工具车、船和飞机，机械工程各种机床、车床和设备等，一般都在振动状态下工作。随着工程技术和结构工艺的发展，更需要深入了解结构的振动特性。

振动的理论和应用技术，已有大量的研究工作，特别是电子技术和计算手段的发展，大大促进了振动理论，特别是计算分析和应用技术方面的快速发展。到目前为止，不但有较多的出版物全面、系统地介绍了振动的理论、测试分析及各行各业的应用技术，而且关于振动理论分析、参数识别、振动测试、故障诊断等也已有大量成熟的商用软件，并在各行各业广泛应用。

商用软件强大的计算、分析功能，使得很多不从事基础研究的工程技术人员只需要了解振动的基本理论、基本概念和基本分析方法就可以结合自己的专业处理好相对复杂的振动问题，而不必要深入地全面和系统掌握振动理论，特别是理论方面的严密性及复杂问题的分析理论与方法。

因此，本书针对不从事基础理论的工程技术人员和工科院校的本科生和研究生，着重介绍振动理论与分析的基础性知识，力求简明和通用。同时，也考虑到一般工程技术人员不讨论非线性问题的稳定性，所以本书只介绍了线性振动和随机振动基础知识。

本书编写过程中，公式和图录入及习题得到了我 2005 级以来的研究生们的大力帮助，本书得以出版离不开西南交通大学出版社的支持和鼓励，以及责任编辑张波的辛勤劳动，在此致以衷心的感谢。

李成辉
2015 年 1 月

目 录

1 绪 论	1
1.1 基本概念	2
1.2 振动研究内容	5
1.3 力学模型	6
1.4 振动微分方程	9
1.5 本书内容	9
2 单自由度系统振动	11
2.1 振动微分方程	11
2.2 无阻尼自由振动	14
2.3 有阻尼自由振动	16
2.4 单自由度系统的强迫振动及解的结构	20
2.5 简谐激励的稳态响应	25
2.6 冲击、单位脉冲响应和任意激励的响应	30
2.7 傅里叶级数及傅里叶变换、频率谱	35
2.8 传递函数	41
3 多自由度系统振动	47
3.1 振动微分方程	47
3.2 无阻尼自由振动	51
3.3 振型的正交性	56
3.4 振型的叠加法	60
3.5 多自由度传递函数	63

4 连续系统的振动	72
4.1 概 述	72
4.2 弦和杆振动微分方程	72
4.3 弦和杆振动的固有频率和振型	77
4.4 弦和杆强迫振动响应	81
4.5 梁的横向振动	84
4.6 固有频率和振型	86
4.7 梁的横向强迫振动（振型叠加法）	94
4.8 弹性地基梁振动	98
5 随机振动基础	103
5.1 随机过程及统计特征	103
5.2 平稳、各态历经过程及统计特征	106
5.3 各态历经过程的时间域统计特征	108
5.4 功率谱密度函数	110
5.5 空间谱	117
5.6 单自由度系统随机振动	119
5.7 多自由度系统随机振动	124
习 题	129
习题参考答案	141
参考文献	149

1 绪 论

在自然界和人类活动中有很多物理量总是在某个值附近波动，如气温的高低、电流的大小、声音的强弱等。不同的专业对这种现象有不同的术语，在力学范畴我们把这种现象叫作振动。振动表现为往复运动，是力学中的一类特殊运动。

振动是普遍的，也是绝对的，只是其强度并非总是达到我们关心或能感受到的程度。振动现象随处可见，如地震引起的建筑物甚至山体摇晃；工程机械工作时的晃动和震颤，人们在乘坐汽车、火车时感受到的颠簸；飞机在空中飞行时与气流相互作用发生的震颤等。此外，物体的振动还是声音产生的根源。

在平衡状态下，工程结构物所受的力（力、力矩、应力）和位移（位移、速度、加速度、应变）等是不变的恒定值；但发生振动时，工程结构物在平衡位置附近做往复运动，力和位移都在平衡值附近往复变化。振动使工程结构物在平衡状态基础上产生了动力和动位移，并处于交变受力状态，这不但增加了工程结构物的荷载水平，还使得结构物发生疲劳破坏。

振动既存在有害的一面，也有为生产和生活服务有利的一面。如地震引发的振动使土体液化，导致工程结构物基础下沉，进而损毁道路、破坏房屋；但在土建施工中常利用振动使路基压实、在浇灌混凝土时利用振动使其流动和均匀、在铁路维修时利用振动捣固道床、在采矿业时利用振动筛选矿石等，甚至音箱也是利用振动来放大声音。

一般来说，工程结构物是由很多部分、多种材料组成的复杂系统。虽然系统中的每一部分有相对独立性，但分析其振动特性还是非常复杂而且困难的。为了利用或控制振动，必须掌握振动的基本概念、基本理论和分析方法，以便充分了解工程结构物的振动。

1.1 基本概念

系统能够振动的内因是系统各部分有质量和抵抗变形的弹性。系统的质量和弹性使得系统平衡状态一旦被打破,就会产生保持运动状态的惯性力和始终指向平衡位置的恢复力,进入往复运动状态。系统的“惯性力”来自于系统各部分的质量,其大小是质量与加速度的乘积。当系统振动时,各部分获得加速度,从而产生惯性力。恢复力来自各部件抵抗变形的弹性(如弹簧、扭转弹簧、弹性模量、抗弯刚度、抗扭刚度)或重力,它总是指向平衡位置。只有在惯性力和恢复力的共同作用下系统各部件才有可能做往复运动,所以,质量和弹性是振动系统的基本要素。

弹性(或刚度)是工程结构物或部件广义力和广义位移之间关系的反映,如弹簧的胡克定律、弹性力学中反映应力-应变关系的物理方程(广义胡克定律)等。在振动分析时这些关系用弹性元件来反映。弹性元件是联系力与位移的部件,是对系统各部件弹性的抽象,表现为弹簧,扭转弹簧或者具有某种刚度(如弹性模量、抗弯刚度、抗扭刚度等)的梁、板、块体等。

广义力和广义位移之间的关系一般都是非线性的,在小幅振动时可以将其简化为线性的。简单的弹簧如图 1.1 (a) 所示:通常假定弹簧是没有质量的,因而,作用于弹簧两端的力大小相等但方向相反。在力 F_s 作用下,弹簧长度变化,它的长度变化量等于两端位移 x_2 与 x_1 之差。图 1.1 (b) 是表示力与弹簧长度变化量的函数关系典型曲线。若当长度变化量增大时,力增大的比例逐渐减小,此弹簧称为“软弹簧”;力逐渐增大的比例逐渐增大,则弹簧称为“硬弹簧”;如果长度变化量增大与力 F_s 增长成正比,则弹簧是线性弹簧。“软弹簧”和“硬弹簧”都是非线性弹簧。

在线性范围内,可以认为力与长度变化量成正比,比例常数为斜率 k ,称为弹簧常数或弹簧刚度,其单位为 N/m 。而在非线性时,斜率 k 不再是常数,而是长度变化量的函数。

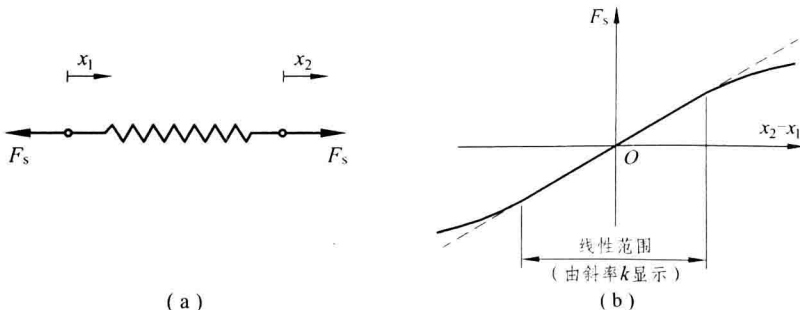


图 1.1 弹簧及特性

在振动过程中，除了结构物的弹性和质量外，通常还要涉及阻尼。阻尼是阻碍振动，并把振动能量转化为热能或其耗散能量的量化表征。阻尼并不是振动的基本要素，因为振动的发生可以没有阻尼，但在振动过程中阻尼是客观存在的。阻尼来自于系统部件之间或系统与外界的摩擦力、部件材料内部摩擦力以及系统或部件与外部介质（空气、液体）黏滞阻力。阻尼将振动能量转换为热能或辐射能量（声、波）等耗散掉，使得振动系统若无能量补充将逐渐减弱直至停止。

一般我们把内摩擦阻尼和黏滞阻尼简化为与振动速度成比例、其方向与振动速度相反的力——阻尼力 F_d ，如图 1.2 所示。阻尼一般是非线性的，所以阻尼力也是非线性的。当振动量很小时可将阻尼可简化为线性的。本书用 c 表示黏性阻尼系数， c 的单位为 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。

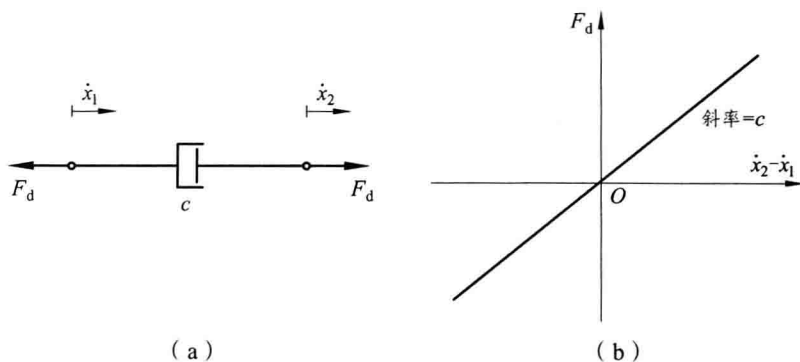


图 1.2 阻尼及特性

当物体在另一个物体干燥表面滑动时的相互作用叫作干摩擦，摩擦系数与材料及表面光滑程度有关。干摩擦产生的摩擦力与滑动面平行，大小取决于摩擦系数与表面正压力，是一个常量，但与运动方向相反（图 1.3）。当系统的惯性力和恢复力大于静摩擦力时，系统开始运动，此时阻碍运动的摩擦力叫动摩擦力，它比静摩擦力小。当系统的惯性力和恢复力小于动摩擦力时，运动将停止。显然，干摩擦问题中摩擦力是非线性的。

由于阻尼总是消耗能量，实际振动总是衰减的，除非有持续激励补充能量。另外，如果阻尼足够大，偏离平衡位置的物理量未

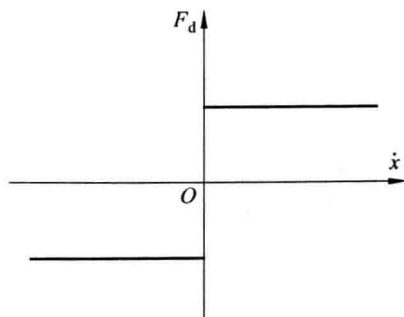


图 1.3 干摩擦阻力

回到平衡位置就将能量耗尽，不能形成往复运动——振动，我们把这种运动形式叫流变。因而只有当阻尼比较小时，系统才可能振动。若阻尼的大小刚好使系统能最快地回到平衡位置而不振动，我们把其值叫临界阻尼。显然，临界阻尼决定了系统运动现象是流变还是振动。

虽然阻尼是客观存在的，但有些情况阻尼很微小或不考虑阻尼时，我们可假设系统是无阻尼的，同时无阻尼系统的分析也有其理论意义。无阻尼系统振动一旦开始就不会停止。

系统能够振动的外因是系统初始时平衡状态的改变或持续作用到系统的外部激励。系统的初始状态是指系统开始振动时的位置和速度，前者反映了系统振动开始前相对平衡位置的偏离程度，后者是振动开始前部件速度的大小。系统的外部激励是指持续作用于研究对象的外力。注意我们说激励是“持续”的而不是“连续”的，这就意味着激励可以是连续的也可以是间断的，如机器工作时旋转部分质量偏心引起的作用力、机车车辆在不平顺的轨道上行驶时轮轨相互作用力、汽车在不平的道路行驶时轮胎与路面的相互作用力等都是外部激励。若分析车辆引起的振动，对路面某一点而言，车轮通过时才有力的作用，激励是持续的而不是连续的。

我们把仅由初始状态引发的振动叫作自由振动，把激励作用引起的振动叫作强迫振动（受迫振动）。例如我们使钟摆偏离平衡位置（最低位置）后放手，钟摆将往复摆动，但在振动过程中没有外部激励，其振动是自由振动；汽车在不平的道路行驶时，由于路面不平顺是持续的，汽车受到的外部激励也是持续的，振动是强迫振动。

在工程实际中，有些振动过程可划分为自由振动和强迫振动两个阶段。了解这一点对理论分析特别是振动测试有非常重要的意义，因为我们往往需要通过自由振动测试分析结构物的振动特性。如列车通过桥梁时，桥梁的振动是强迫振动；但列车刚通过后一段时间内桥梁还会振动，此时桥梁上不再有荷载作用，桥梁的振动相当于以列车通过后瞬时的振动位移和速度为初始条件的自由振动。同样，建筑物在地震激励下振动可分为两个阶段：原来静止的建筑物在地震激励下开始振动，并在地震持续过程中一直受地震激励继续振动，这个时段建筑物的振动是强迫振动；地震结束后，建筑物的振动并不立即停止，因为地震结束时建筑物还可能有振动位移和速度，还会继续振动，但因为这段时间的振动没有外部激励，是以地震结束时的位移与速度为初始条件的自由振动。

1.2 振动研究内容

振动研究的对象可以是一台机器、一个工程结构物或一个部件，我们需要根据工程实际问题选取适当的研究对象——系统。我们把系统在激励作用下的反应叫作响应，则振动问题实质上是系统在外部激励下（输入）产生振动响应（输出）的问题。系统、激励和响应三者之间的关系可以用图 1.4 表示。从数学上看，系统相当于一个变换，响应是经过系统这个变换后的激励。对于线性系统，这个变换是线性的，可以应用叠加原理。

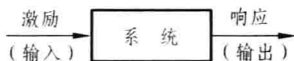


图 1.4 系统、激励和响应关系示意图

工程结构物的振动一般都是非线性的，并具有不确定性。非线性可分为物理非线性和几何非线性：前者是源自材料的弹性和阻尼参数的非线性；后者是因为结构物大的位移或变形。振动的不确定性来自材料参数的不确定性和系统外部激励的不确定性。所以实际的振动一般都是随机的、非线性的。

振动系统可以按描述它们的数学表达式性态划分为线性系统与非线性系统。我们往往把振幅较小的微小振动简化为线性振动，多大振动算微小振动并没有明确的界限，只能对具体问题做具体的分析和判断。非线性振动的微分方程种类多，还没有普遍的经典解法。在非线性振动中，没有解的叠加原理，没有振幅和频率的明确特性，并且解也没有唯一性。好在很多工程应用中的非线性问题一般都是在稳定平衡位置附近的微小振动，可以不讨论解的稳定性，借助于计算机和各种商用软件，求解各种工程结构物的非线性振动的响应已不再困难，本书不介绍。

一个简单的基本振动由 3 个参数完全确定：振幅、频率和开始时间。振幅和频率是工程应用中最关心的两个量。振幅是振动的幅值，反映了振动量偏离平衡位置的程度，也就是振动的强度。频率是振动量变化快慢的量，在工程上用每秒的振动次数来描述，其单位为赫兹 Hz (1/s)。振动的时间起点主要用以分析比较系统各部分振动或激励之间的时间差，在参数识别中很有用。在用三角函数描述振动时，时间差表现为相位不同，所以振动分析中常用相位表示。

研究振动问题，主要是从频率域和时间域了解系统特性、激励和响应以及三者之间关系，以便充分利用和控制振动。对线性振动问题的研究是已知激励、系统、响应 3 个部分中的 2 个求第 3 个，组合起来有 3 种情况。最简单的是已

知激励、系统求系统动力响应并分析参数的影响，或已知响应、系统求激励，前者应用较多。已知激励和响应求系统的问题相对复杂，多应用于参数识别和故障诊断，涉及较多的数学、力学基础理论。不过无论是理论计算还是试验分析，目前已经有多种成熟的商用软件。

系统动力响应是工程中最基本和最常见的问题。对于已有的工程结构物，我们需要了解外部激励引起的工程结构物的动力响应（如变形、位移、应力等）是否满足预定的要求，该问题中系统和激励是已知的。求出的动力响应是随时间变化的曲线，清楚地反映了系统各部件在给定激励时的振动强度，属于由因求果的正问题。

工程结构物都有不随外部条件变化的固有频率，对于不同频率的激励“放大”程度不同，且当外部激励频率与固有频率接近时，结构物振动强烈（共振）。因此频率也是振动的重要技术指标。我们只有充分了解激励和系统的频率特性后，才能更有效地减振、隔振或放大振动。因而只分析振动响应是远远不够的，还必须深入了解振动的频率特性。其次，频率分析还是振动参数识别的重要基础。系统的响应直接给出了振动强度——振幅，虽然频率方面的信息也已包含在内，但除了简单的单自由振动系统外，一般都不能从响应曲线中得到频率信息，需要进一步在频率域分析才能全面了解。

系统参数识别往往要通过试验来完成，是振动的逆问题。对于已有的实际“系统”，由于种种原因，难以用理论分析的方法掌握它的振动固有特性时，就把实际存在的系统仍然作为未被认识的“黑箱”或未被完全认识的“灰箱”，激振该系统并记录响应，然后结合振动理论知识从时间域和频率域两个方面，分析输入和输出之间的关系，可以求出系统的有关参数，如质量、刚度、阻尼系数等，为设计和动力修正提供理论基础。参数识别需要结合振动特性和数值分析方法进行，它也是故障诊断的基础。

1.3 力学模型

虽然建立振动分析力学模型不是本书的任务，但工程问题的振动分析首先需要根据工程实际问题分析影响范围，确定研究对象，然后对实际工程问题进行分析、抽象和归纳建立力学模型。力学模型的选取和建立与其说是力学问题，还不如说是专业工程师应该考虑的问题。

近年来基于有限单元法和数值计算技术的商用软件广泛应用，商用软件强

大的前处理功能和计算能力大大地提高了计算分析能力，但同时诱使人们放弃对力学模型的选取和建立，而是直接根据工程结构形状，建立考虑尽可能大的影响范围、更多影响因素的“大系统”和更接近真实的有限元模型。虽然建立的模型与工程结构物实际情况下更接近，但未必能得到满意的结果。

(1) 虽然自然界的事物都是相互关联、相互影响的，但各因素的影响程度不同，对有些影响因素的规律还认识不足；

(2) 参数误差可能影响计算结果正确性。特别是土木工程问题，结构由多种材料组合而成，其中散体材料自身的参数离散性很大；

(3) 除了参数的影响外，太复杂的大系统大大增加的计算工作量可能导致计算累积误差增大；

(4) 太复杂的大系统大量的输出数据既增加数据分析难度，还有可能掩盖主要原因；

(5) 建立力学模型的过程也是对工程结构物振动特性进行定性分析的过程，建立合理的力学模型有利于对计算结果理解和分析。

因此，深入分析工程实际问题，选取并建立能反映所感兴趣问题的研究对象和合理简化力学模型是非常必要的。研究对象确定后，需要根据工程实际简化力学模型。力学模型的建立过程也是一个对工程实际问题进行定性分析的过程，需要丰富的专业知识、工程经验和力学基础。为了方便分析计算或突出问题的主要方面，我们常对系统的部件进行必要的简化。也就是从质量、弹性和阻尼 3 个方面考虑，将各部件简化为质点、刚体和力学意义上的弦、杆、柱、梁、板、壳、块和无质量的弹性元件与阻尼元件等；确定系统的边界条件、初始条件和激励，根据部件之间连接状态确立相互关系；确定全部计算参数。只有在深入分析的基础上，建立的模型才能突出影响问题的主要因素，使计算结果既能反映实际问题的重要特性，又有清楚的物理意义。

在振动过程中，任何部件都是有质量、弹性和阻尼的，并且都是连续分布的。如工程中的弦、杆、柱、梁、板、壳和块等。因为连续质量系统中各质量点是连续分布的，其运动状态在振动过程变化是不同的，为了描述连续系统的运动状态，需要用连续函数来描述系统。这些函数不但是时间的函数，还是各质量点位置的函数，计算量和难度相对较大。

但有些情况，这些连续体自身的变形可以不考虑，它们可以简化为刚体，除了质量外既没阻尼也没弹性。如我们分析车辆作用下道路的振动特性时，往往因为车箱自身变形对道路振动的影响较小可以忽略而将其简化为刚体。当然在分析车辆自身的振动特性时这样的简化是不合理的。刚体在空间有 6 个自由

度；若转动也不考虑，可简化为质点，在空间有 3 个自由度。

我们把力学模型中参数连续分布的振动系统叫作分布系统或连续系统；由刚体和质点组成的振动系统叫作集总系统或离散系统。一般情况下模型中既有参数连续分布的部件，也有参数集总的部件，我们把它叫作混合系统。显然对同一个工程问题，集总参数系统自由度少，计算相对简单，但这些是以牺牲问题的次要因素为代价换取的，并且需要丰富的工程经验和力学基础才能保证分析的正确。

把参数“集总”化方法之一是直接忽略一些部件的质量，得到无质量的弹簧和阻尼。例如对于细长杆件，若相对其他部件质量较小，在工程振动分析中常忽略其质量，将主要受轴向力杆件简化为无质量的杆或拉压弹簧；主要受弯曲的杆件简化为无质量的梁，其作用等效于无质量弹簧。

把参数“集总”化的另一种方法就是将部件划分成小块体，将每一块体的质量集中到块体的中心，从而将连续质量系统转化为多个“集总”质量并由多个无质量的弹性和阻尼元件联结，形成多“集总”质量组成的离散系统。虽然按这种方式得到的离散系统与连续系统的处理上存在着明显的差异，但它们之间也存在着内在的联系，其差异是表面的而不是实质的。因为当划分的小块逼近无穷小时，两种数学表达表示同一个物理系统。

离散系统由用弹簧和阻尼联结的质点和刚体组成。描述空间质点的运动要 3 个独立坐标，描述空间刚体运动要 6 个独立坐标。离散系统往往要很多独立坐标描述，描述系统所需要的独立坐标数叫系统的自由度数。用一个独立坐标描述的系统叫单自由度系统，当描述系统的独立坐标数大于等于 2 时，所用的分析理论和方法都是同样的，叫作多自由度系统。根据自由度的概念，我们把连续系统又称为无限自由度系统。

“有限元素方法”是分析复杂的连续系统和混合系统振动的有效而广泛应用的数值方法。有限元素方法不是简单的将连续系统离散化为“离散”系统，而是将力学模型中的连续部件分成单元，如空间的四面体、六面体单元，平面的矩形、三角形单元和杆件的一维单元。用满足相应单元微分方程的振形函数表达单元内部的特性，并将质量、弹性和阻尼及力等分布参数“集总”到单元的节点上，建立起单元节点广义力和广义位移关系，最后把在给定区域求满足微分方程、边界条件和初始条件的连续系统振动问题转化为求有限个节点的广义力或广义位移问题，使之适于数值计算。值得注意的是，有限元素方法只是将连续系统振动问题的计算转化数值计算，并不是将系统简单的“集总”成离散系统，系统的连续特性已在转化过程中得到了反映。

1.4 振动微分方程

力学模型将工程问题转化为力学问题，振动微分方程就是将力学问题转化为数学问题。振动是动力学中的一类只做往复运动的特殊问题，因此振动微分方程也只是动力学方程中的一种特殊类型。动力学中的力学原理都可以用以建立振动微分方程。如动力学理论中的牛顿第二定律、动量（矩）定理、达朗贝尔原理、动能定理、虚位移原理和拉格朗日方程、哈密顿原理等。

力学模型决定了数学分析方法。分析离散系统、连续系统和混合系统振动的数学工具各不相同。离散系统的振动问题是用常微分方程（组）来描述，振动问题转化为在给定初始条件下求解微分方程（组）；连续系统要用偏微分方程（组）来描述。振动微分方程建立以后，振动问题转化为在给定初始条件和边界条件下求解微分方程（组）。一般地说，离散系统的分析要比连续系统简单得多。

虽然对振动问题都可建立微分方程，但除简单问题外，一般都得借助计算机用数值方法求解。线性 N 个自由度系统振动对应的线性微分方程组，求解时转化为特征值问题——一元 N 次方程。除了计算工作量相当大外，当 N 大于 3 时，一元 N 次方程求解没有公式法，必须用数值方法；虽然单个杆件的连续系统有解析解，但更高阶振动的分析还是编程用计算机数值计算更高效；对于“混合质量”系统的分析就只有依靠于数值方法了。

有了力学模型后，振动微分方程的建立似乎已经没有必要了。借助于计算机和数值计算理论、方法而开发的商用有限元软件已使复杂的振动分析变得简单，并具有前后处理功能和编程功能。无论多复杂的系统都可以建立力学模型，用一些带参数的命令建立起有限元计算模型并进行计算、输出结果。

1.5 本书内容

离散系统的最简单情况是单自由度线性系统，它可以用一个常系数二阶常微分方程来描述。对于一般较复杂的系统来说，这种模型往往只能非常粗略地近似。因此，我们可能认为其重要性是有限的。但采用了模态分析方法以后，许多线性多自由度的离散系统和连续系统，都可以简化为一组互不相关的二阶微分方程，其中每一个都类似于单自由度系统的方程。因而，单自由度线性系统在振动力学中是非常重要的理论基础。

本书将第 2 章系统地介绍单自由度系统振动的自由振动的基本理论和概念, 以及频率分析的基本方法。通过单自由度系统振动的学习, 掌握频率、周期、固有频率、阻尼比、共振等基本概念, 掌握求解和参数识别的基本方法。

离散系统一般是由刚体、质点和弹簧阻尼组成的, 是需要多个独立坐标来描述的多自由度系统。 N 个自由度系统可建立 N 个微分方程, 一般都是耦合的。一般情况下, N 个自由度系统有 N 个固有频率。在振动过程中, 对应同一个固有频率, 各独立坐标的变化量之间有固定的数量关系, 叫作振形或模态。不同固有频率对应有不同的振型, 而且振型之间是正交的。利用振型正交性可将多自由度系统转化为多个相互独立的单自由度系统分析, 它们是参数识别及故障诊断的理论基础。这些基本内容将在第 3 章介绍。

杆件系统是连续系统中比较简单的一类, 涉及的基础理论在材料力学课程中已经学过。虽然数值方法的应用使得用经典理论计算分析单个杆件的振动显得多余, 但除了学习基本概念外, 这些经典理论还是有限单元法的基础, 所以本书第 4 章还是详细地介绍了弦、杆轴向、杆横向和梁横向振动。此外还介绍了土木工程特别是道路与铁道工程中常见的弹性地基梁振动和移动荷载作用下梁振动等。

系统的参数和荷载具有随机性, 例如我们在振动试验中测试振动, 得到的试验数据一般都不可重复。除了引起振动的激励有不确定性外, 系统的参数也有不确定性。例如, 路面不平顺的随机性引起的行驶在公路的汽车的振动; 地震激励的随机性引起的地面结构物振动。实际上, 工程结构物的材料的各种参数并不是确定的, 我们常常使用的是一个统计值。特别是散体材料, 离散性很大, 这使得振动系统是不确定的。因此, 工程中实际系统的振动一般都是非确定性的。研究不确定性振动的理论叫随机振动。随机振动是以概率统计方法为基础研究振动, 本书将在第 5 章介绍线性随机振动的基本理论和概念。

由于线性振动理论只研究平衡位置附近的运动, 所以振幅反映的量只是相对平衡位置的动力和动位移增量。在对结构物进行整体受力分析时, 还需要叠加上平衡状态时的力和位移。

2 单自由度系统振动

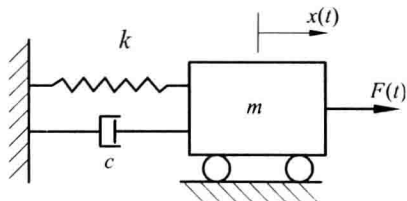
单自由度系统不但包含振动理论的重要基础,而且工程上有许多问题都可以简化为单自由度系统并得到满意的结果。此外,应用坐标变换或振型叠加法,多自由度系统和连续系统的振动可以转化为单自由度系统进行分析。因此,单自由度系统分析理论还是进一步研究复杂振动的基础。

2.1 振动微分方程

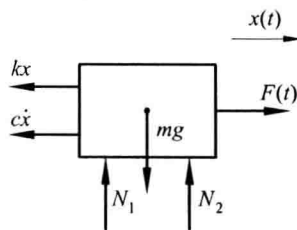
单自由度系统由质量、弹簧及阻尼组成,一般受外部激励作用。图 2.1 (a) 即为一简单的单自由度弹簧-阻尼器-质量系统,单自由度系统振动微分方程是一个二阶常系数微分方程。下面就通过几个例题来说明振动微分方程的建立方法。

[例 2.1] 简单弹簧质量系统

如图 2.1 (a) 所示:一单自由度弹簧-阻尼器-质量系统。该系统受激励 $F(t)$ 作用,质量、弹簧刚度和阻尼分别为 m 、 k 和 c ,弹簧无初始变形。



(a) 力学模型



(b) 受力图

图 2.1 简单弹簧质量系统