

# 考研数学 三部曲

之

# 大话高等数学

潘鑫 著



初中数学基础 + 认真阅读本书 = 满分 (不是梦)  
 新锐考研数学传奇教练巅峰之作

清华大学出版社





清华大学出版社

## 内 容 简 介

本书以“盖楼”为大的背景。读者每阅读完一章，就是盖完了大楼的一层。而每层中又分为“砖”和“房间”两部分，先运来“砖”再搭建“房间”。这种安排内容的方式使得全书充满了趣味性。本书的特色除了趣味性之外，还有三个“非常”。语言非常通俗易懂，逻辑非常清晰，例题非常丰富。本书的这四个特色使得本书区别于市场上的同类图书。

本书的主要内容包括：数列的极限的定义，函数的极限的定义，数列的极限的基本计算方法，函数的极限的基本计算方法，函数的连续性，等价无穷小，保号性及其推论，可导的定义，可导的等价定义，常用的导数公式，求曲线的渐近线，分段函数求导，求函数的高阶导数，求函数在某区间的最值，求两条曲线的交点个数，求一个方程的实根个数，证明恒等式，证明不等式，证明零点问题，不定积分的定义，不定积分的计算，定积分的计算，反常积分的计算，定积分的几何应用，微分方程的定义，求一阶微分方程的通解的方法，求二阶常系数齐次线性微分方程通解的方法，求二阶常系数非齐次线性微分方程通解的方法，二元函数的定义，求二元函数的极限的方法，二元函数的连续性，求二元函数的极值、条件极值、最值，二重积分的定义，二重积分的直角坐标系算法，二重积分的极坐标系算法，利用二重积分求形心，二重积分的对称性，二重积分的轮换对称性，常数项级数的定义，常数项级数的分类，求幂级数的收敛域的方法，求幂级数的和函数的方法等。

以下三类读者最适合阅读本书：正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）；正在准备学校期末考试的本校大学生（无论读者是什么样的基础）；工作后需要补学或温习高等数学的读者（无论读者是什么样的基础）。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

考研数学三部曲之大话高等数学 / 潘鑫著. —北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-38675-9

I. ①考… II. ①潘… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 283771 号

责任编辑：栾大成

封面设计：杨玉芳

责任校对：胡伟民

责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>，<http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，[c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈：010-62772015，[zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 刷 者：清华大学印刷厂

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：188mm×260mm 印 张：49.25 插 页：1 字 数：1260 千字

版 次：2015 年 3 月第 1 版 印 次：2015 年 3 月第 1 次印刷

印 数：1~4000

定 价：89.00 元

# 前 言

## 我的创作初衷

大家好，我叫潘鑫，江湖人称老潘，网络盛传：考研信老潘，就这么简单！

在我自己准备硕士研究生入学统一考试数学科目的过程中，买过不少辅导书。我想大家应该听说过李永乐老师的《考研数学复习全书》以及陈文灯老师的《考研数学复习指南》吧。这两本书的确是写得非常的好，对我帮助很大。然而，当时我的身边有很多数学基础很一般的准备考研的同学，他们谈到由于自己的基础一般，因此对于这两本书中所讲的内容并不能完全看懂。当时我就在想，对于这部分考生来讲，他们最需要的是这样一本书：既能完全达到考研数学的难度，同时全书的表达方式又能充分照顾到毫无基础的初学者。那时，我开始有了写这样一本考研数学辅导书的想法。

在我研究生开学之前，我同时在五个考研辅导机构担任讲师，主讲高等数学，线性代数和概率论与数理统计。由于我讲课时逻辑清晰，语言通俗，而且每讲一个知识点后我都会大量举例，从而使得就算是零基础的考生也能够听懂，我也因此很荣幸地受到了学员的一致好评。很快，我开始大班授课。在 2013 年的全国硕士研究生入学统一考试的考场内，坐着我的很多位学员。半年多以前据学员反馈，我所有的学员中(无论基础好坏)有 80% 的学员考研数学考到了 100 分以上，50% 的学员考研数学分数在 120 分以上。他们反馈给我成绩的同时，不约而同地提出我应该把所讲的内容编写成书籍，好让更多的学员受益。于是我写书的想法被更进一步地激发。

研究生开学后，清华大学的很多老师都提到了“创新”这个词。的确，创新是一个民族的灵魂。当时我立刻想到了写书的事情，知识是固定的，教学模式则是可以创新的。目前国内还没有一本既能达到考研难度又能使得无论什么基础的考生都能看懂的考研数学教辅书。老师的话使得我的想法更加坚定：我要写书。

最后，借用一句在我写书过程中对我帮助很大的超级畅销书《大话设计模式》的作者程杰的话：现实总比理想来得更“现实”。的确，写书不是一件容易的事情，有很多很多的困难需要我去克服。同学们，在你们的考研复习的道路上更是充满荆棘，困难重重。金鳞岂是池中物，一遇风云便化龙，希望本书能够帮助你们在通往成功的道路上一路披荆斩棘，帮助你们逢山开路，遇水搭桥，最终在考研中取得好成绩。

## 本书定位

本书的定位是：一本适合读者自学高等数学的书籍（无论读者基础如何）。本书与传统教材大不相同，本书的语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，本书中所涉及的每个知识点

(无论多简单的知识点)几乎都有举例,这“三斧子”使得您完全不用担心有看不懂的地方。所以,本书定位为自学用书。

所谓教材,是老师上课时所使用的书籍。大多数教材不会把每个知识点都讲解得非常细,目的是要在课堂上给学生留有充分的思考空间,锻炼同学们的思维;而教辅书呢,顾名思义,是辅助教材而使用的书籍。教辅书不能脱离教材,如果一个基础很薄弱的学生直接看教辅书也是会很吃力的;而本书既非教材,也非教辅,是一本十分“纯正”的自学用书。为了能让读者实现真正的自学,书中每一个细节也不放过,每个知识点和例题都配有非常通俗易懂的解释(甚至书中所写的很多话都是读者自己很自然可以想到的),这样一来就可以保证无论什么基础的读者,都能够看懂本书。同时本书又是针对考研数学高等数学的,因此逻辑上也是非常清晰的。相信读者阅读本书后会有一种爱不释手的感觉。

## 本书特色

### 1. 充满趣味

本书以“盖楼”为大的背景。读者每阅读完一章,就是盖完了大楼的一层。而每层中又分为“砖”和“房间”两部分,先运来“砖”再搭建“房间”。这种安排内容的方式使得全书充满了趣味性。

### 2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍,都是十分规范化的。有点像古代的“八股文”,读者需要一个个字地去琢磨。而最为高级的表达方式就是:用最能让人理解的文字,去讲解最难让人理解的知识,而不需要读者再去琢磨如此规范化的语言到底是什么意思。这正是本书的最大亮点。本书的所有语言,从定义定理的解释,到例题的解析,再到每章习题的解析,都非常地通俗易懂,让人感觉就像是在读一本童话故事或者武侠小说。这样一来,读者不仅能看懂本书的所有内容,更乐于去阅读本书,从而使得读者不仅掌握了相应的知识也节省了时间。

### 3. 逻辑非常清晰

本书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说,本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点,并且几乎所有题目的每一步解答都详细注明了来源(如:这一步是根据第一章的第五车砖)。另外,大家知道,做一道题可以会同时用到很多个不同章节的知识点。我见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象:讲完知识点一了,然后下面有配套的例题,而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一,而且还用到了没讲的知识点二(题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二)。这样一来,许多读者就不明白了,思考了很长时间,以为是之前的某个知识点自己忘了,后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间,而本书在这一点上高度重视,全书的所有习题中极少存在上述现象(全书也就一两道题存在上述现象,并且题中都做了说明)。

总结来说,本书所谓的“逻辑非常清晰”体现在如下三个方面:

- (1) 本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点。
- (2) 本书的所有题目的每一步解答都详细注明了来源。
- (3) 本书的所有题目均与知识点完全对应。

#### 4. 例题非常丰富

本书的例题非常丰富。丰富到什么程度呢？就是说其实很多例题按理说根本就没有必要的（因为知识点太简单了，而且讲解知识点的语言又特别的通俗易懂，根本不需要再有例题了），但本书还是写了。这是为什么呢？因为我在教学的过程中，发现了这样一种现象：就算知识点再简单，讲解得再明白，不举例的话，学生心里还是多少会有一些不踏实。基于此，本书所涉及的知识点（无论再简单的知识点）几乎都有配套的例题。

## 本书内容

本书是按照教育部考试中心公布的考研大纲的要求来组织内容的。

本书的主要内容包括：数列的极限的定义，函数的极限的定义，数列的极限的基本计算方法，函数的极限的基本计算方法，函数的连续性，等价无穷小，保号性及其推论，可导的定义，可导的等价定义，常用的导数公式，求曲线的渐近线，分段函数求导，求函数的高阶导数，求函数在某区间的最值，求两条曲线的交点个数，求一个方程的实根个数，证明恒等式，证明不等式，证明零点问题，不定积分的定义，不定积分的计算，定积分的计算，反常积分的计算，定积分的几何应用，微分方程的定义，求一阶微分方程的通解的方法，求二阶常系数齐次线性微分方程通解的方法，求二阶常系数非齐次线性微分方程通解的方法，二元函数的定义，求二元函数的极限的方法，二元函数的连续性，求二元函数的极值、条件极值、最值，二重积分的定义，二重积分的直角坐标系算法，二重积分的极坐标系算法，利用二重积分求形心，二重积分的对称性，二重积分的轮换对称性，常数项级数的定义，常数项级数的分类，求幂级数的收敛域的方法，求幂级数的和函数的方法等。

## 本书读者

以下三类读者最适合阅读本书：

- (1) 正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）。
- (2) 正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）。
- (3) 工作后需要补学或温习高等数学的读者（无论读者是什么样的基础）。

## 感谢

此书能够和大家见面，我本人做了很多努力。但如果只靠我一个人的努力，这本书是

根本不能顺利出版的。并非是客套话，而是事实的确如此。

首先要感谢我的父亲潘建平对我写作本书期间的全力支持。为了帮助我尽快地完成书稿，他经常和我一起熬夜到很晚。所以，可以这么说，如果没有他的贡献，就没有本书的出版。

超级畅销书《大话设计模式》的作者程杰也给了我非常大的帮助。我创作本书的灵感就来源于程杰的那本《大话设计模式》，程杰本人也给我提了很多的宝贵意见，并且我与清华大学出版社的缘分也是来自程杰。在此，我对程杰表示由衷的感谢。

大家都知道，只有作者是无法完成一本书的出版的。一本书的出版与策划编辑的辛勤劳动是分不开的，本书更是如此。从我与清华大学出版社签订出版合同到书名的敲定再到书中很多细节的修改，我都得到了清华大学出版社的栾大成编辑（也是本书的责任编辑）的鼎力相助。在此我要对栾编辑表达我深深的谢意。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

# 目 录

第 0 章 超级导读 (必看)	1
0.1 考研数学高等数学部分其实就是一座大楼	2
0.2 我帮你盖楼	4
0.3 第 1 章到第 8 章的内容	4
0.4 你最后要这样才行	5
0.5 送给大家的话	6
第 1 章 第一层——极限与连续	7
1.1 第一车砖——极限长什么样	8
1.2 第二车砖——极限的计算方法	8
1.2.1 函数的极限的计算方法	8
1.2.2 数列的极限的计算方法	89
1.3 第三车砖——三个小技巧	119
1.3.1 第一个小技巧	119
1.3.2 第二个小技巧	121
1.3.3 第三个小技巧	125
1.4 第四车砖——极限的定义	127
1.4.1 数列的极限的定义	127
1.4.2 趋于无穷大时函数的极限的定义	131
1.4.3 趋于定点时函数的极限的定义	135
1.5 第五车砖——函数的连续性与间断点	138
1.5.1 函数的连续性	138
1.5.2 函数的间断点	148
1.6 第六车砖——无穷小、同阶无穷小、等阶无穷小、高阶无穷小、低阶无穷小、 $k$ 阶无穷小	154
1.6.1 无穷小	154
1.6.2 同阶无穷小	155



1.6.3 等价无穷小 .....	156	1.6.5 低阶无穷小 .....	159
1.6.4 高阶无穷小 .....	157	1.6.6 $k$ 阶无穷小 .....	159
1.7 房间 101——两个常用的结论 .....	160		
1.8 房间 102——函数的极限存在性 .....	162		
1.8.1 函数和差的极限存在性 .....	163	1.8.2 函数乘积的极限存在性 .....	164
1.9 房间 103——已知一极限求另外一极限 .....	166		
1.10 房间 104——求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式 .....	176		
1.11 房间 105——函数极限的保号性 .....	187		
1.11.1 趋于无穷型的函数极限的 保号性 .....	187	1.11.3 趋于定点型的函数极限的 保号性 .....	189
1.11.2 趋于无穷型的函数极限的 保号性的推论 .....	188	1.11.4 趋于定点型的函数极限的 保号性的推论 .....	191
1.12 房间 106——函数极限与数列极限的相互转化 .....	193		
1.12.1 函数极限转化为数列极限 .....	193	1.12.2 数列极限转化为函数极限 .....	200
1.13 本章小结 .....	203		
<b>第 2 章 第二层——导数与微分</b> .....	<b>205</b>		
2.1 第一车砖——可导的定义 .....	206		
2.1.1 函数在某一点处可导的定义 .....	206	2.1.3 函数在某区间可导的定义 .....	232
2.1.2 函数在某一点处左/右可导的 定义 .....	215		
2.2 第二车砖——常用的导数公式 .....	235		
2.2.1 基本初等函数的导数公式 .....	236	2.2.3 复合函数的导数公式 .....	238
2.2.2 导数的四则运算法则 .....	237	2.2.4 幂指函数求导 .....	240
2.3 第三车砖——可微的定义 .....	241		

2.4	第四车砖——可微、可导、连续三者的关系	243
2.5	房间 201——很重要的四个知识点	247
2.5.1	第一个知识点	247
2.5.2	第二个知识点	247
2.5.3	第三个知识点	259
2.5.4	第四个知识点	264
2.6	房间 202——高阶导推低阶导	265
2.7	房间 203——求某函数的高阶导数的方法	266
2.8	房间 204——求曲线的渐近线	272
2.9	房间 205——分段函数求导	279
2.10	本章小结	287
<b>第 3 章</b>	<b>第三层——微分中值定理及其应用</b>	<b>289</b>
3.1	第一车砖——求函数在给定区间的单调性	290
3.2	第二车砖——求函数的单调区间	291
3.3	第三车砖——求函数的极值点与极值	293
3.4	第四车砖——求函数在给定区间的凹凸性	297
3.5	第五车砖——求函数的凹凸区间	299
3.6	第六车砖——求函数的拐点	301
3.7	第七车砖——与极值点和拐点有关的一个重要结论	307
3.8	房间 301——求函数在给定区间的最值	310
3.9	房间 302——求两个函数的交点个数或求一个方程的实根个数	319
3.10	房间 303——证明恒等式	324
3.11	房间 304——证明不等式	334
3.12	房间 305——证明零点问题	347

3.13 本章小结.....	369
<b>第4章 第四层——一元函数积分学</b> .....	<b>371</b>
4.1 第一车砖——原函数与不定积分.....	372
4.1.1 原函数.....	372
4.1.2 不定积分.....	372
4.2 第二车砖——不定积分长什么样.....	373
4.3 第三车砖——定积分和反常积分长什么样.....	374
4.4 房间 401——不定积分和定积分的计算方法.....	376
4.4.1 不定积分的计算方法.....	376
4.4.2 定积分的计算方法.....	432
4.5 房间 402——反常积分的计算方法.....	439
4.6 房间 403——定积分的应用.....	453
4.6.1 利用定积分求面积.....	453
4.6.2 利用定积分求旋转体的体积.....	463
4.7 房间 404——求被积函数中含绝对值的定积分与反常积分.....	486
4.8 房间 405——两个重要知识点.....	488
4.8.1 原函数的存在性.....	488
4.8.2 对称区间上奇偶函数的定积分 与反常积分.....	495
4.9 本章小结.....	501
<b>第5章 第五层——微分方程</b> .....	<b>503</b>
5.1 第一车砖——微分方程长什么样.....	504
5.2 第二车砖——微分方程的阶.....	505
5.3 第三车砖——微分方程的解.....	506
5.4 第四车砖——微分方程的通解.....	508
5.5 第五车砖——微分方程的初始条件与微分方程的特解.....	509

5.6 房间 501——求一阶微分方程的通解的方法	510
5.6.1 可分离变量法	510
5.6.2 换元法	513
5.6.3 公式法	518
5.6.4 伯努利法	523
5.6.5 变量代换法	527
5.7 房间 502——求二阶常系数线性微分方程的通解的方法	528
5.7.1 求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法	529
5.7.2 求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法	531
5.8 房间 503——求二阶变系数微分方程的通解的方法	536
5.8.1 求不含 $y$ 的二阶变系数微分方程的通解的方法	536
5.8.2 求不含 $x$ 的二阶变系数微分方程的通解的方法	537
5.9 房间 504——线性微分方程解的性质与结构	538
5.10 本章小结	541
第 6 章 第六层——多元函数微分学	543
6.1 第一车砖——什么叫多元函数	544
6.2 第二车砖——二元函数的极限计算方法	544
6.3 第三车砖——二元函数的连续性	554
6.4 第四车砖——可偏导的定义	558
6.4.1 函数在某一点处可偏导的定义	558
6.4.2 函数在某区间可偏导的定义	565
6.5 房间 601——利用公式求 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$	567
6.5.1 当“ $\Delta$ ”是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	567
6.5.2 当“ $\Delta$ ”不是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	590
6.6 房间 602——分段函数求偏导	599

6.7	房间 603——抽象函数求偏导	610
6.8	房间 604——二元函数的极值、最值、条件极值	621
6.8.1	二元函数的极值	621
6.8.2	二元函数的最值	625
6.8.3	条件极值	627
6.9	房间 605——求空间曲线的切线与法平面以及求曲面的法线与切平面	631
6.9.1	求空间曲线的切线与法平面	631
6.9.2	求曲面的法线与切平面	635
6.10	本章小结	639
<b>第 7 章</b>	<b>第七层——二重积分</b>	<b>641</b>
7.1	第一车砖——二重积分长什么样	642
7.2	第二车砖——当被积函数为 1 时二重积分的意义	643
7.3	第三车砖——二重积分的计算方法	646
7.4	第四车砖——二重积分三条性质	682
7.5	房间 701——二重积分是一个数	689
7.6	房间 702——求解被积函数中含绝对值的二重积分	690
7.7	房间 703——二重积分的对称性	704
7.8	房间 704——二重积分的轮换对称性	711
7.9	房间 705——“先 $x$ 后 $y$ 型”二重积分与“先 $y$ 后 $x$ 型”二重积分的相互转化	713
7.10	房间 706——计算二重积分时的小技巧	717
7.11	房间 707——均匀薄片的形心	719
7.12	本章小结	721

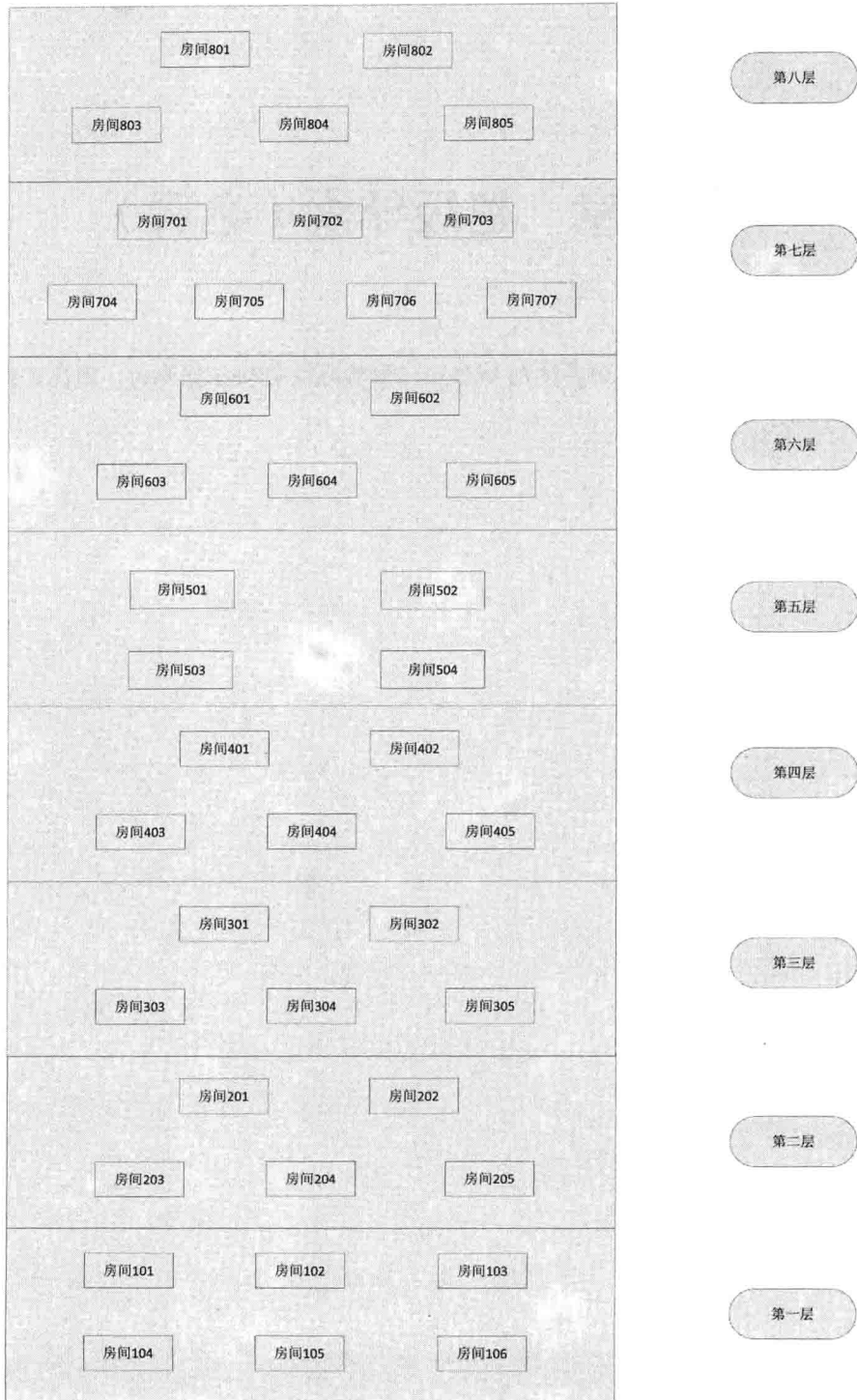
第 8 章 第八层——无穷级数	723
8.1 第一车砖——什么叫常数项级数	724
8.2 第二车砖——常数项级数的分类	725
8.3 第三车砖——常数项级数的收敛与发散	731
8.4 第四车砖——常数项级数的六个重要性质	731
8.5 第五车砖——什么叫幂级数	736
8.6 第六车砖——幂级数的收敛域与和函数	736
8.6.1 幂级数的收敛域	736
8.6.2 幂级数的和函数	737
8.7 房间 801——正项级数的敛散性判别	739
8.8 房间 802——交错级数的敛散性判别	751
8.9 房间 803——一般级数的敛散性判别	756
8.10 房间 804——求幂级数的收敛域	758
8.11 房间 805——求幂级数的和函数	768
8.12 本章小结	773



## 第0章 超级导读（必看）

本书共8章，此章虽不讲具体的知识点，但其地位是相当重要的。因此，强烈建议大家阅读本章的内容。

# 0.1 考研数学高等数学部分其实就是一座大楼





图中是一座大楼，这座大楼共八层。第1层有六个房间，第2层有五个房间，第3层有五个房间，第4层有五个房间，第5层有四个房间，第6层有五个房间，第7层有七个房间，第8层有五个房间。你是一名工人，房地产开发商要求你在一片空地上盖这么一座大楼，并且你和开发商签了合同，合同中规定了停工日期。只要到了停工日期，无论你盖完没盖完，你都不能再盖了，必须接受开发商的检查。开发商比较懒，他并不真正来工地一个一个门牌号的依次检查，而是把你叫到办公室，然后问你关于其中几个房间的构造是什么样的。比如，你到了他办公室后，他可能会问三个问题（当然有可能问更多的问题）。

- 你介绍一下房间 202 和房间 103 的构造；
- 你介绍一下房间 304 的构造；
- 你介绍一下房间 501 和房间 602 的构造。

这三个问题如果你都答得让他满意，他会认为你已经把大楼完全盖好了，于是他会给你三十万元作为奖励；如果你其中一个问题没有答出来，只答出了两个问题，他会给你二十万元；如果你只答出了一个问题的话，他就只给你十万元；如果你一个问题都没答出，他会非常生气，认为你根本没盖，一分钱也不给你。

以上这段话我想说什么呢，请继续往后看。

大楼：考研数学高等数学这个学科；

大楼的每层：指考研数学高等数学这个学科的每一章；

每层的房间数量：每一章的考点数量；

房地产开发商：考研数学高等数学部分的命题人；

工人：你自己；

停工日期：考试的日期；

开发商的办公室：考研考场；

开发商问你的问题：考研数学高等数学部分的题目；

开发商给你的钱：考研数学高等数学部分的得分。

有了这些对应关系后，我把前面的一大段话换一种方式叙述一遍。

考研数学高等数学部分的知识可以分为 8 章。第 1 章有六个考点，第 2 章有五个考点，第 3 章有五个考点，第 4 章有五个考点，第 5 章有四个考点，第 6 章有五个考点，第 7 章有七个考点，第 8 章有五个考点。考研命题人规定了考研的日期。日期一到，不管你有没有复习完，都要去考场参加考试。在考试中，你也许会在卷子上遇到三道（当然，有可能更多）高等数学的题，比如：

第一题：考到的是第 2 章的考点 2 和第一章的考点 3；

第二题：考到的是第 3 章的考点 4；

第三章：考到的是第 5 章的考点 1 和第六章的考点 2。

这三个问题你如果都答对了，你就得满分。否则你将会被扣掉相应的分。