



线性代数(第二版)

同步学案

◎主 编 王希云

线性代数(第二版)同步学案

Xianxing Daishu (Di-er Ban) Tongbu Xuean



主 编 王希云

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与王希云主编的《线性代数》(第二版)相配套的同步学案,涵盖了教材的前六章内容,包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型等。本书将线性代数的每章进行了“碎片化”处理,即按照教材中每节的知识点进行划分,每个知识点所对应的学案包括两部分:阅读导航与练一练。每章后都有练一练的参考答案,便于学生自判。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第2版)同步学案 / 王希云主编. -- 北京:高等教育出版社, 2015.2
ISBN 978-7-04-042054-8

I. ①线… II. ①王… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 023053 号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 杨 帆 封面设计 张申申 版式设计 余 杨
责任校对 刘春萍 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市密东印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	5	版 次	2015 年 2 月第 1 版
字 数	120 千字	印 次	2015 年 2 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	9.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 42054-00

前 言

本书是与王希云主编的《线性代数》(第二版)相配套的同步学案。所谓“学案”是指学生课前预习的学习方案。为了帮助学生课前阅读教材,培养学生的学习能力,提高课堂的听课效率,编者参照《线性代数》(第二版)的前六章内容编写了相应的学案。学案内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量及二次型,适用于工科高等学校的学生。

本书特点及使用指南:

1. 本书将线性代数的每章进行了“碎片化”处理,即按照教材中每节的知识点进行划分,每个知识点所对应的学案包括两部分:阅读导航与练一练。学生可以在“阅读导航”的帮助下有目的地阅读教材,帮助学生理解教材中的内容,学生阅读结束后可立即完成第二部分“练一练”的内容。“练一练”中习题比较基础,这些习题较教材中每节后的习题容易,一般的学生可以通过自学教材独立完成。

2. 为了便于学生保存学案,减少学生抄题的负担,本书装订成学生作业练习本的形式。学生可以在学案上直接完成作业。

3. 本书的每章均有答案,便于学生自判。

4. 课后作业以完成配套教材中的习题为主。

5. 教师可以要求学生课前完成相应学案的内容,结合线性代数课程各类网络教学资源,采取翻转课堂的教学模式,使学生掌握课堂的主动权,提高课堂教学的效果。

本书由王希云主编并统稿。第一章由王欣洁编写,第二章由崔学英编写,第三章由王银珠编写,第四章由陈培军编写,第五章由麻晓波编写,第六章由黄丽编写。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,恳请同仁及使用者不吝赐教,编者不胜感激。

编 者
2014.11

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 n 阶行列式的定义	1
1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式	1
1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式	1
1.1.3 全排列及其逆序数	1
1.1.4 n 阶行列式的定义	2
1.2 n 阶行列式的性质	5
1.3 n 阶行列式的展开	7
1.4 n 阶行列式的计算	7
1.5 克拉默 (Cramer) 法则	9
第 1 章练一练答案	10
第 2 章 矩阵	12
2.1 矩阵的概念	12
2.1.1 引例	12
2.1.2 矩阵的概念	12
2.1.3 几种常用的特殊矩阵	12
2.2 矩阵的运算	13
2.2.1 矩阵的线性运算	13
2.2.2 矩阵的乘法	13
2.2.3 方阵的幂	14
2.2.4 方阵的多项式	15
2.2.5 矩阵的转置	15

2.2.6 方阵的行列式	16
2.2.7 共轭矩阵	17
2.3 可逆矩阵	17
2.3.1 可逆矩阵的概念	17
2.3.2 矩阵可逆的条件	18
2.3.3 逆矩阵的运算性质	19
2.3.4 矩阵方程	19
2.4 初等变换与初等矩阵	20
2.4.1 矩阵的初等变换	20
2.4.2 初等矩阵	21
2.4.3 求逆矩阵的初等变换法	22
2.5 矩阵的秩	23
2.5.1 矩阵的秩的概念	23
2.5.2 用初等变换求矩阵的秩	24
2.6 分块矩阵及其运算	25
2.6.1 分块矩阵的概念	25
2.6.2 分块矩阵的运算	25
第 2 章练一练答案	26
第 3 章 向量	30
3.1 n 维向量	30
3.1.1 n 维向量的概念	30
3.1.2 向量的线性运算	30
3.2 向量组的线性相关性	31

3.2.1 向量的线性组合	31	4.3.1 非齐次线性方程组有解的判别定理	50
3.2.2 向量的线性相关与线性无关	31	4.3.2 非齐次线性方程组解的结构	52
3.3 向量组的秩	32	4.4 齐次线性方程组的一个应用	53
3.3.1 向量组间的线性表示	32	第4章练一练答案	54
3.3.2 向量组的极大线性无关组	33	第5章 方阵的特征值与特征向量	58
3.3.3 向量组的秩	34	5.1 特征值与特征向量的概念	58
3.3.4 向量组的秩与矩阵秩之间的关系	34	5.1.1 特征值与特征向量的概念	58
3.4 向量空间	34	5.1.2 特征值与特征向量的性质	59
3.4.1 向量空间的概念	34	5.2 相似矩阵与方阵的对角化	60
3.4.2 向量空间的基与维数	35	5.2.1 相似矩阵的概念及性质	60
*3.4.3 基变换与坐标变换	36	5.2.2 矩阵相似于对角矩阵的条件	60
3.5 向量的内积与正交	36	5.3 实对称矩阵的对角化	61
3.5.1 向量的内积	36	5.3.1 实对称矩阵的特征值与特征向量	61
3.5.2 向量的长度与夹角	37	5.3.2 化实对称矩阵为相似标准形	62
3.5.3 正交向量组	37	第5章练一练答案	62
3.5.4 标准正交基	38	第6章 二次型	65
3.5.5 正交矩阵与正交变换	38	6.1 二次型及其矩阵表示	65
第3章练一练答案	39	6.2 二次型的标准形	67
第4章 线性方程组	42	6.2.1 用配方法化二次型为标准形	67
4.1 线性方程组的消元法	42	6.2.2 用正交变换化二次型为标准形	68
4.1.1 线性方程组的几种表达形式	42	6.2.3 用初等变换化二次型为标准形	68
4.1.2 线性方程组的解	43	6.3 惯性定理和二次型的规范形	69
4.1.3 解线性方程组的消元法	45	6.4 正定二次型和正定矩阵	70
4.2 齐次线性方程组	47	6.4.1 二次型的分类	70
4.2.1 齐次线性方程组有非零解的判别定理	47	6.4.2 正定二次型的判别	71
4.2.2 齐次线性方程组解的结构	49	6.4.3 其他有定二次型的判别	71
4.3 非齐次线性方程组	50	第6章练一练答案	72

第1章 行列式

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

一、阅读导航

1. 二阶行列式,与二阶线性方程组的关系;
2. 二阶行列式的代数表达式;
3. 二阶行列式的主对角线;
4. 二元线性方程组的系数行列式.

二、练一练

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ 的系数行列式为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 其解为 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

一、阅读导航

1. 三阶行列式,与三阶线性方程组的关系;
2. 三阶行列式的代数表达式(对角线法则);
3. 二阶、三阶行列式的共性,利用对角线法则计算三阶行列式.

二、练一练

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 三阶行列式的展开式共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 项.

1.1.3 全排列及其逆序数

一、阅读导航

1. 全排列、逆序、逆序数、奇排列、偶排列的概念,逆序数的记号;
2. 对换、对换的性质;

3. 奇排列与偶排列的关系.

二、练一练

1. $\sigma(43152) = \underline{\hspace{2cm}}$, 该排列为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 排列.

2. $\sigma(51423) = \underline{\hspace{2cm}}$, 该排列为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 排列.

3. 排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 下列命题错误的是().

(A) 对换改变排列的奇偶性

(B) n 个不同数字的全排列中, 奇偶排列各占一半

(C) 交换排列 4321 中任意两个元素的位置都可以得到一个奇排列

(D) 排列 $n(n-1)\cdots 21$ 为偶排列

1.1.4 n 阶行列式的定义

一、阅读导航

1. 三阶行列式的特点(项数、每项的构成(除正负号)、每项的正负号);

2. 三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 一般项的形式;

3. 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (用 Σ 、逆序数及三阶

行列式的一般形式表示);

4. n 阶行列式的两种定义;

5. 三种特殊的行列式: 对角行列式、上三角行列式、下三角行

列式的特点.

二、练一练

1. 下列命题错误的是().

(A) 三阶行列式可以借助对角线法则记忆

(B) 三阶行列式的展开式共有 6 项

(C) 三阶行列式的展开式各项的符号中正号、负号各占一半

(D) 对角线法则仍适用于高阶行列式

2. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 项.

3. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的一般项为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (行标按自然顺序排列)可

表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (列标按自然顺序排列)可

表示为_____.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 23 \\ 10 & 1 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(8) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(9) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(10) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(11) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(12) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

1.2 n 阶行列式的性质

一、阅读导航

1. 行列式的转置;
2. 行列式的性质(转置、对换、数乘、倍加、加法);
3. 行列式为零的条件.

二、练一练

1. 下列命题错误的是().

- (A) 行列式中行与列具有同等的地位
- (B) 对换行列式的两行(列),行列式变号
- (C) 若行列式中两行(列)成比例,则行列式等于零
- (D) 将行列式某一行(列)的各个元素乘同一数,其值不变

2. 下列命题错误的是().

- (A) 若行列式中某行(列)元素全为零,则行列式为零
- (B) 若行列式中两行(列)对应元素相同,则行列式为零
- (C) 若行列式中两行(列)对应元素成比例,则行列式为零

(D) 若行列式主对角线元素全为零, 则行列式为零

3. 根据行列式的性质 1.1(转置), 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (用 } D \text{ 表示)}.$$

4. 根据行列式的性质 1.2(对换), 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (用 } D \text{ 表示)}.$$

5. 根据行列式的性质 1.3(倍乘), 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (用 } D \text{ 表示)},$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (用 } D \text{ 表示)}.$$

6. 根据行列式的性质 1.4(加法),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_1 & a_{22} + b_2 & a_{23} + b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. 根据行列式的性质 1.5(倍加),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{11} & a_{22} + 2a_{12} & a_{23} + 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 20 & 24 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

1.3 n 阶行列式的展开

一、阅读导航

1. 行列式元素的余子式,代数余子式,余子式与代数余子式的关系;

2. 行列式按一行(列)展开定理;

3. k 阶子式;

4. 子式的余子式,代数余子式;

5. 行列式按若干行(列)展开定理(Laplace 定理).

二、练一练

1. 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, 则 $M_{32} =$ _____, $A_{13} =$ _____

(用行列式表示).

2. 四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 可按照第二行展开为 _____, 按照第三列展开为 _____.

3. 若 $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, 则 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} =$ _____.

4. 若 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, 则二阶子式 $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的余子式为 _____.

代数余子式为 _____.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & g & 3 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 1 \\ s & h & m & 0 & 2 & u \\ z & x & r & 3 & v & t \end{vmatrix} =$ _____.

6. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & g & 3 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & u & s & h & m \\ 3 & v & t & z & x & r \end{vmatrix} =$ _____.

1.4 n 阶行列式的计算

一、阅读导航

1. 行列式的计算方法;

2. “两条线型行列式”的计算;

3. “箭形行列式”的计算;

4. “三对角行列式”的计算;

5. “Hessenberg 型行列式”的计算;

6. 范德蒙德(Vandermonde)行列式的形式及计算.

二、练一练

$$1. (1) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ c & 0 & 0 & d \\ e & 0 & 0 & f \\ 0 & g & h & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$$

2. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.5 克拉默(Cramer)法则

一、阅读导航

1. 克拉默生平简介

克拉默(Gabriel Cramer, 1704年7月31日—1752年1月4日), 瑞士数学家, 生于日内瓦, 卒于法国塞兹河畔巴尼奥勒. 早年在日内瓦读书, 1724年起在日内瓦加尔文学院任教, 1734年成为几何学教授, 1750年任哲学教授. 他自1727年进行为期两年的旅行访学. 在巴塞尔与约翰·伯努利(Johann Bernoulli)、欧拉(Euler)等人学习交流, 结为挚友. 后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家, 回国后在与他们的长期通信中, 加强了数学家之间的联系, 为数学宝库留下大量有价值的文献. 他一生未婚, 专心治学, 平易近人且德高望重, 先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员.

他的主要著作是在1750年出版的《代数曲线的分析引论》, 首先定义了正则曲线、非正则曲线、超越曲线和无理曲线等概念, 第一次正式引入坐标系的纵轴(y 轴), 然后讨论曲线变换, 并依据曲线方程的阶数将曲线进行分类. 为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数, 应用了著名的“克拉默法则”(Cramer Rule), 即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式. 该法则于1729年由英国数学家麦克劳林(Maclaurin)得到, 1748年发表, 但克拉默的优越符号使之流传. 书中还讨论了麦克劳林注意到的一个曲线相交的悖论, 给出与欧拉在1748年得到的相同解释, 后人称之为“克拉默悖论”(Cramer Paradox). 此外, 他还留下若干数学史笔记, 提出应用于数理经济和概率论的“数学效益”概念.

2. Cramer法则的内容: 一个条件, 三个结论;
3. Cramer法则的证明思路;
4. n 阶齐次线性方程组的解的情况;
5. n 阶齐次线性方程组只有零解的充要条件, n 阶齐次线性方程组只有非零解的充要条件.

二、练一练

1. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

则下列说法错误的是().

- (A) 若线性方程组(1.1)的系数行列式不为零, 则(1.1)有唯一解
- (B) 若线性方程组(1.2)的系数行列式不为零, 则(1.2)有唯一解
- (C) 若线性方程组(1.2)的系数行列式不为零, 则(1.2)只有零解
- (D) 若线性方程组(1.2)有非零解, 则(1.2)的系数行列式不为零

2. 用 Cramer 法则解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

3. 已知齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则 $\lambda =$ _____ 或 $\mu =$ _____.

第 1 章练一练答案

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

1. -1. 2. $ad - bc$. 3. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 4. $b_1a_{22} - a_{12}b_2$.
5. $a_{11}b_2 - b_1a_{21}$.
6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, 1, 1$.

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

1. -27. 2. 6.

1.1.3 全排列及其逆序数

1. 6, 偶. 2. 6, 偶. 3. $\frac{n(n-1)}{2}$. 4. D.

1.1.4 n 阶行列式的定义

1. D. 2. $n!$.
3. $(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 或 $(-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11} a_{i_22} \cdots a_{in n}$.
4. $\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$.
5. $\sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11} a_{i_22} \cdots a_{in n}$.
6. 400. 7. 180. 8. 180. 9. 0.
10. (1) -40; (2) -25; (3) 0; (4) 2 520; (5) 56; (6) 56;
(7) 1 800; (8) 56; (9) 1 800; (10) -54; (11) -54; (12) -27.

1.2 n 阶行列式的性质

1. D. 2. D. 3. D. 4. -D. 5. kD, k^3D .

6. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 或者 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & a_{22} & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等 8 种情况.

7. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 8. 0. 9. 0.

1.3 n 阶行列式的展开

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.
2. $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}, a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} +$