2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（二）

真题精讲与热点分析（2006~2015）

考研辅导名师 陈启浩 编著

名师权威解析

高频考点强化

考必做真题

真题都一样，解答真不一样

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（二）

真题精讲与热点分析

（2006～2015）

考研辅导名师　　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是全国硕士研究生入学统一考试备考用书．主要内容包括2006年到2015年十年的考研数学二的真题及其精讲，以及对考试热点问题的讨论．

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学二”的同学阅读，也可作为教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（二）真题精讲与热点分析：2006～2015/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015．3

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-49735-6

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第056723号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：孟令磊　责任编辑：孟令磊　汤　嘉

封面设计：路恩中　责任校对：郑　玫

责任印制：乔　宇

北京机工印刷厂印刷　（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2015年4月第2版第1次印刷

184mm×260mm·14.25印张·342千字

标准书号：ISBN 978-7-111-49735-6

定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　网络服务

服务咨询热线：010-88361066　机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294　机工官博：weibo.com/cmp1952

010-88379203　金书网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版　教育服务网：www.cmpedu.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由考研辅导名师陈启浩教授编写的全国硕士研究生入学统一考试备考用书．

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对参加数学二考试的包括四本书，分别是：

《2016 考研数学（二）真题精讲与热点分析（2006～2015）》（简称《真题精讲》）

《2016 考研数学（二）典型题 660》（简称《典型题 660》）

《2016 考研数学（二）高分突破 135》（简称《高分突破》）

《2016 考研数学（二）名师精选全真模拟冲刺题 10 套》（简称《全真模拟》）

本套丛书是在陈启浩教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲深入研究和对历届考研真题精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶．

本套丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率．这套丛书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书．

机械工业出版社

前　　言

参加考研的同学，一定要练习一下近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2006 年至 2015 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2016 考研数学（二）真题精讲与热点分析（2006～2015）》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精讲

C. 热点分析

“十年真题精讲”是对每一道真题通过“分析”“精讲”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精讲”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**．

“热点分析”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用．在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，通过比对和总结，内化为自己的能力．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

目　　录

B　十年真题精讲

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

一、选择题

(1)

分析　逐一判断各个选项中的反常积分的收敛性，直到得到收敛积分为止，如果前三个选项都不正确，则直接选(D)

精解　对于选项(A)，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_2^A$$
$$=\lim_{A\to+\infty}(2\sqrt{A}-2\sqrt{2})=+\infty,$$

所以，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散.

对于选项(B)，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\ln^2x\Big|_2^A$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln^2A-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)=+\infty,$$

所以 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

对于选项(C)，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^A$$
$$=\lim_{A\to+\infty}(\ln\ln A-\ln\ln 2)=+\infty,$$

所以 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散.

因此本题选(D).

附注　选项(D)确实是正确的，具体计算如下：

由于 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A xe^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}(-x-1)e^{-x}\Big|_2^A$

$$=\lim_{A\to+\infty}[(-A-1)e^{-A}-(-2-1)e^{-2}]=3e^{-2},$$

所以，$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2)

分析　先写出 $f(x)$ 的表达式，确定有无间断点. 如果有间断点，再确定其是可去的，跳跃的或是无穷的.

精解　当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 不存在，

当 $x\neq0$ 时，$\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}\ln\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{x^2}{t}\cdot\frac{\sin t}{x}\right)}=e^x,$$

所以，$f(x)$ 有间断点 $x=0$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$，所以点 $x=0$ 是可去间断点.

因此本题选(B)

附注 $x\neq0$ 时的 $f(x)$ 表达式也可用以下方法计算：

$$f(x)=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim_{t\to0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{x\sin t}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x\sin t}{t}}=e^x.$$

(3)

分析 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时，$f'(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$. 由此即可确定 α，β 应满足的关系式.

精解 要使 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}$ 存在，必须有

$$\alpha-1>0.$$

要使 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}\right)=0$，必须有

$$\alpha-\beta-1>0.$$

由此可知，当 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$ 时，α，β 必须满足

$$\begin{cases}\alpha-1>0,\\ \alpha-\beta-1>0,\end{cases}\text{ 即 }\alpha-\beta>1.$$

因此本题选(A)

附注 题解中使用了以下结论：对于正数 α，β，

要使 $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}$ 存在，或 $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}$ 存在，必须 $\alpha>0$.

(4)

分析 从 $f''(x)$ 的图像寻找 $f''(x)$ 的零点与不存在的点入手.

精解 由于 $f(x)$ 是连续函数，且从 $f''(x)$ 的图像可知，$f''(x)$ 有两个零点，记为 x_1，x_2，则 $x_1<0<x_2$. 此外，$f''(0)$ 不存在，所以曲线只有 3 个可能的拐点：$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$，$(0, f(0))$.

在点 $x=x_1$ 的两侧邻近，$f''(x)$ 不变号，所以 $(x_1, f(x_1))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 在点 $x=x_2$ 与点 $x=0$ 的两侧邻近，$f''(x)$ 都变号，所以 $(x_2, f(x_2))$，$(0, f(0))$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，即曲线 $y=f(x)$ 有两个拐点.

因此本题选(C).

附注　设 $f(x)$ 是连续函数，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点可按以下步骤寻找：

（1）计算 $f''(x)$ 的零点与不存在点，设为 x_1，x_2，…，x_n.

（2）逐一判断，在各个点 x_i 的两侧邻近，考察 $f''(x)$ 是否变号. 如果变号，则 $(x_i, f(x_i))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；否则 $(x_i, f(x_i))$ 不是拐点.

（5）

分析　由 $\begin{cases} u=x+y, \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases}$ 将所给方程改写成 $f(u, v)=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$. 由此即可得到 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$.

精解　由 $\begin{cases} u=x+y, \\ v=\dfrac{y}{x}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{u}{1+v}, \\ y=\dfrac{uv}{1+v}, \end{cases}$ 将它代入 $f\left(x+y, \dfrac{y}{2}\right)=x^2-y^2$ 得

$$f(u, v)=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{2u(1-v)}{1+v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{-2u^2}{(1+v)^2}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}.$$

因此本题选(D).

附注　本题也可以按如下方法计算

由于 $\begin{cases} u=x+y, \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases}$，所以所给方程两边分别对 x，对 y 求偏导数得

$$\begin{cases} f'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x, \\ f'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y, \end{cases} \text{即} \begin{cases} f'_u-f'_v\cdot\dfrac{y}{x^2}=2x, \\ f'_u+f'_v\dfrac{1}{x}=-2y. \end{cases}$$

将 $u=1$，$v=1$，即 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ 代入上式得

$$\begin{cases} f'_u(1, 1)-2f'_u(1, 1)=1, \\ f'_u(1, 1)+2f'_v(1, 1)=-1. \end{cases}$$

解此方程组得 $f'_u(1, 1)=0$，$f'_v(1, 1)=-\dfrac{1}{2}$.

（6）

分析　画出 D 的图像，即可得到 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在极坐标系中的表示式.

精解　D 如图 B-15-6 的阴影部分所示，在极坐标系下

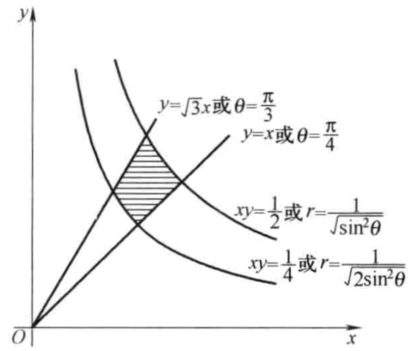

图 B-15-6

$$D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}.$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r.$$

因此本题选(B).

附注 当直角坐标系中的二重积分化为极坐标系中的二重积分时，应注意 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，而不是 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

(7)

分析 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<n$(其中 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵)，由此即可得到正确选项.

精解 对 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&3&a^2-1&d^2-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{array}\right).$$

由此可知，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$ 的充分必要条件是 a 为 1 或 2，且 d 为 1 或 2，即 $a\in\Omega$，$d\in\Omega$. 从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 $a\in\Omega$，$d\in\Omega$.

因此本题选择(D).

附注 应记住非齐次线性方程组有解、无解的判断方法：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<n$；线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=n$；线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})>r(\boldsymbol{A})$.

(8)

分析 由题设可知，$\boldsymbol{Ae}_1=2\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{Ae}_2=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{Ae}_3=-\boldsymbol{e}_3$. 由此即可得到在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$

下，$f(x_1, x_2, x_3)$的标准形.

精解　由题设知，

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}，\text{即 }\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

所以有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3$. 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{e}_3)=-(-\boldsymbol{e}_3)，\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2，$$

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$. 由此得到

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

从而，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1, x_2, x_3)$的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

因此本题选(A).

附注　本题也可按以下方法计算：

由题设知，

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}, \tag{1}$$

并且$(\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，所以由式(1)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1, x_2, x_3)$的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

二、填空题

(9)

分析　先按$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$算出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，然后按$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$算出$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即可得到$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

精解 由$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2.$$

所以$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.12t(1+t^2)^2\right|_{t=1}=48.$

附注 本题的$\frac{d^2y}{dx^2}$应按$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$或$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$计算，而$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}$是错误的.

(10)

分析 分$n=1$及$n>1$两种情形计算.

精解 由$f'(x)=2x\cdot 2^x+x^2\cdot 2^x\ln 2$得$f'(0)=0$.

当$n>1$时，由

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=(x^22^x)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^2)^{(i)}(2^x)^{(n-i)}\\&=C_n^0x^2(2^x)^{(n)}+C_n'(x^2)'(2^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''(2^x)^{(n-2)}\\&=x^2\cdot 2^x(\ln^2)^n+2nx\cdot 2^x(\ln^2)^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^x(\ln^2)^{n-2}\end{aligned}$$

得$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln_2)^{n-2}$.

附注 应先计算$f'(0)$，然后利用公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[u(x)]^{(i)}[v(x)]^{(n-i)}$$

算出$f^{(n)}(x)(n>1)$，即得到$f^{(n)}(0)(n>1)$.

(11)

分析 将$\varphi(x)$写成$x\int_0^{x^2}f(t)dt$，算$\varphi'(x)$，然后由$\varphi(1)$及$\varphi'(1)$的值即可得到$f(1)$.

精解 显然$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt$及$\varphi(x)=x\int_0^{x^2}f(t)dt$. 于是

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2).$$

令$x=1$得$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=\varphi(1)+2f(1)$，所以

$$f(1)=\frac{1}{2}[\varphi'(1)-\varphi(1)]=\frac{1}{2}(5-1)=2.$$

附注 要计算$\int_a^{u(x)}f(t;x)dt$(其中，对于固定的x，$f(t;x)$是t的连续函数，$u(x)$可导)关于x的导数，应先将$f(t;x)$中的x移入积分上限(下限)或移到积分号外.

(12)

分析 先算出所给微分方程的通解，然后利用 $y(0)=3$，$y'(0)=0$ 算出 $y(x)$.

精解 所给微分方程的特征方程

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

有两个根 $\lambda=-2,1$，所以通解为

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^x, \tag{1}$$

且

$$y'(x)=-2c_1e^{-2x}+c_2e^x. \tag{2}$$

由于 $y(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值 3，所以有 $y(0)=3$，$y'(0)=0$. 将它们代入式(1)与式(2)得

$$\begin{cases}3=c_1+c_2,\\0=-2c_1+c_2,\end{cases}\quad 即\ c_1=1,\ c_2=2.$$

代入式(1)得 $y(x)=e^{-2x}+2e^x$.

附注 顺便把题中的微分方程换成 $y''-2y'+y=0$，其他条件不变，重新求解，具体如下：

由于 $y''-2y'+y=0$ 的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 有二重根 $\lambda=1$，所以它的通解为

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^x, \tag{3}$$

且

$$y'(x)=(c_1+c_2+c_2x)e^x. \tag{4}$$

将 $y(0)=3$，$y'(0)=0$ 代入式(3)与式(4)得

$$\begin{cases}3=c_1,\\0=c_1+c_2,\end{cases}\quad 即\ c_1=3,\ c_2=-3.$$

将它们代入式(3)得 $y(x)=3(1-x)e^x$.

(13)

分析 对所给方程两边求全微分，并将 $x=y=0$ 代入即可算得 $dz\big|_{(0,0)}$.

精解 所给方程两边求全微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0,$$

即 $(1-xyz)(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0$. 所以

$$[3(1-xyz)+xy]dz=(xyz-1)(dx+2dy)-yzdx-xzdy.$$

将 $x=y=0$ 代入上式得

$$3dz\big|_{(0,0)}=-dx-2dy,\ 即\ dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy.$$

附注 本题也可以通过计算 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 算出 $dz\big|_{(0,0)}$，具体如下：

所给方程两边对 x 求偏导数得

$$e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ 即(1-xyz)\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

将 $x=y=0$ 代入上式得

$$1+3\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0,\ 即\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}.$$

所给方程两边对 y 求偏导数得

$$(1-xyz)\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $x=y=0$ 代入得

$$2+3\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}=0,\ 即\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}.$$

于是 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$

(14)

分析 算出 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值即可得到 $|\boldsymbol{B}|$.

精解 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值为 2，-2，1，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值为

$$\mu_1=2^2-2+1=3,\ \mu_2=(-2)^2-(-2)+1=7,\ \mu_3=1^2-1+1=1.$$

从而，$|\boldsymbol{B}|=\mu_1\mu_2\mu_3=3\times7\times1=21.$

附注 设 A 是 n 阶矩阵，其有特征值 λ 及与 λ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$；又设 m 次多项式 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$，则矩阵 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E}_n$ 有特征值 $f(\lambda)$ 及与 $f(\lambda)$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$. 记住这一结论.

三、解答题

(15)

分析 写出 $f(x)$ 的带佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式，即可由 $f(x)\sim g(x)(x\to0)$，算出 a，b，k 的值.

精解
$$\begin{aligned}f(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x\\&=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx(x+o(x^2))\\&=(1+a)x+\left(-\frac{a}{2}+b\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

所以，由 $f(x)\sim g(x)=kx^3(x\to0)$ 得

$$\begin{cases}1+a=0,\\-\dfrac{a}{2}+b=0,\\\dfrac{a}{3}=k,\end{cases}\ 即\ a=-1,\ b=-\frac{1}{2},\ k=-\frac{1}{3}.$$

附注 本题也可用洛必达法则计算，具体如下：

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\\&\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

由此得到 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=0$，即 $a=-1$.

将 $a=-1$ 代入式(1)得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+(b\sin x+bx\cos x)(1+x)}{3k(1+x)x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b\sin x+bx\cos x+bx\sin x+bx^2\cos x}{3kx^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}+\frac{b}{3k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{b\sin x}{x}+b\cos x}{3kx}+\frac{2b}{3k}. \tag{2}$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{b\sin x}{x}+b\cos x\right)=0$，即 $b=-\frac{1}{2}$.

将 $b=-\frac{1}{2}$ 代入式(2)得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{2x}-\frac{1}{2}\cos x}{3kx}-\frac{1}{3k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x-x\cos x}{3kx^2}-\frac{1}{3k}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x+x\sin x}{6kx}-\frac{1}{3k}=-\frac{1}{3k}，\text{即 } k=-\frac{1}{3}.$$

(16) **分析**　先算出 V_1 与 V_2，然后令 $V_1=V_2$ 即可算出 A 的值.

精解
$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\sin x)^2\mathrm{d}x=\pi A^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}A^2,$$
$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot A\sin x\mathrm{d}x=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x$$
$$=-2\pi A\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)=2\pi A.$$

于是，由 $V_1=V_2$ 得 $\frac{\pi^2}{4}A^2=2\pi A$. 所以由 $A>0$ 得 $A=\frac{8}{\pi}$.

附注　设 D 是由直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)(0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b)$ 围成，则 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

设 D 是由直线 $x=a$，$x=b(0<a<b)$ 及曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)(0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b)$ 围成，则 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_y=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$.

(17) **分析**　先由题设算出 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 及 $f(x,y)$，然后按二元函数极值计算方法算出 $f(x,y)$ 的极值.

精解　对 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$ 关于 y 积分得

$$f'_x(x,\ y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)\ (\varphi(x)\text{是待定函数}).\tag{1}$$

将 $y=0$ 代入式(1)，并利用 $f'_x(x,\ 0)=(x+1)\mathrm{e}^x$ 得 $\varphi(x)=x\mathrm{e}^x$. 将它代入式(1)得

$$f'_x(x,\ y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x.\tag{2}$$

对式(2)关于 x 积分得

$$f(x,\ y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x+\psi(y)\ (\psi(y)\text{是待定函数}).\tag{3}$$

将 $x=0$ 代入式(3)，并利用 $f(0,\ y)=y^2+2y$ 得 $\psi(y)=-2$. 将它代入式(3)得

$$f(x,\ y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x-2,$$

于是，$f'_y(x,\ y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$.

由 $\begin{cases}f'_x(x,\ y)=0,\\ f'_y(x,\ y)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(y+1)^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=0,\\ 2(y+1)\mathrm{e}^x=0\end{cases}$ 得唯一解 $x=0,\ y=-1$.

由于 $$f''_{xx}(0,\ -1)=\left[(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x\right]\Big|_{x=0,y=-1}=1>0,$$

$$f''_{yy}(0,\ -1)=2\mathrm{e}^x\Big|_{x=0,y=-1}=2,$$

$$f''_{xy}(0,\ -1)=0,$$

所以由 $\Delta=f''_{xx}(0,-1)\cdot f''_{yy}(0,-1)-f''_{xy}(0,-1)=2>0$ 知 $f(0,-1)=-1$ 是 $f(x,y)$ 的极小值，但 $f(x,y)$ 无极大值.

附注 当 $f'(x)=\varphi(x)$ 时有 $f(x)=\Phi(x)+c$（其中 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的一个原函数，c 是任意常数）；

当 $f'_x(x,\ y)=\varphi(x,\ y)$ 时，有 $f(x,\ y)=\Phi(x,\ y)+c(y)$.（其中 $\Phi(x,\ y)$ 是 y 任意固定时 $\varphi(x,\ y)$ 关于 x 的一个原函数，$c(y)$ 是 y 的任意函数）.

(18) **分析** 画出 D 的简图，按照对称性化简 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 后计算.

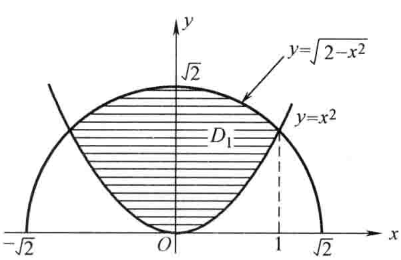

图 B-15-18

精解 D 的图形如图 B-15-18 的阴影部分所示.

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 D 关于 y 轴对称，在对称点处 x^2 的值彼此相等，但 xy 的值互为相反数，所以

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{其中 }D_1\text{ 是 }D\text{ 的位于 }y\text{ 轴右边部分})$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\mathrm{d}y=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\xlongequal{\text{令 }x=\sqrt{2}\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22t\mathrm{d}t-\frac{2}{5}\xlongequal{\text{令 }u=2t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u\mathrm{d}u-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

附注 在二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$f(x,\ y)$ 是二元连续函数）的具体计算之前，应做好两件事：