现代数学基础

50

微分动力系统

文兰

高等教育出版社

现代数学基础

50

微分动力系统

文兰

WEIFEN DONGLI XITONG

高等教育出版社·北京

内容简介

本书讲述微分动力系统的基本理论，主线是结构稳定性和双曲性，包括双曲集的稳定流形族定理和结构稳定性定理的完整证明。本书用简单明了的方式，把这些重要内容严格地讲述出来，引导读者迅速进入微分动力系统的核心。

本书可供数学及相关专业的本科生、研究生和教师使用参考，也可供对动力系统感兴趣的数学爱好者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

微分动力系统 / 文兰 著 . — 北京 : 高等教育出版社，2015.1

ISBN 978-7-04-041223-9

I. ①微… II. ①文… III. ①微分方程 – 动力系统（数学） IV. ① O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 235628 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 赵阳 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	廊坊市文峰档案印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.75	版　　次	2015 年 1 月第 1 版
字　　数	160 千字	印　　次	2015 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00 元

物 料 号 41223-00

前　言

动力系统简单讲就是"流"或"迭代". 前者是连续 (时间) 系统, 后者是离散 (时间) 系统. 动力系统既有深厚的数学理论, 又有自然科学和工程技术的强烈背景和应用. 动力系统从 19 世纪末 H. Poincaré 创立微分方程定性论开始, 陆续形成了拓扑动力系统、遍历论、哈密顿动力系统、微分动力系统、复动力系统、随机动力系统等分支. 不过这些分支的界限并不严格, 常有交叉重叠. 微分动力系统一般是指 20 世纪 60 年代以来围绕结构稳定性、双曲性、通有性等问题发展起来的一个分支.

本书是一本关于微分动力系统的研究生教材. 为简单起见本书只讨论离散系统, 即微分同胚的迭代. 主要线索围绕**结构稳定性**和**双曲性**这两个概念展开. 如所周知, 一个周期轨道是结构稳定的当且仅当满足双曲性条件 (特征值模不为 1). 有限个周期轨道的情形类似. 但具有无穷多个周期轨道的系统是否可以结构稳定, 却一直很受怀疑. 20 世纪 60 年代初的一个历史性发现是 Smale 马蹄. 这个系统有无穷多个周期轨道, 却是结构稳定的. 这一重要发现成为现代动力系统兴起的标志. 连同随后发现的 Anosov 环面同构等重要系统, 这揭示了一个令人惊讶的事实: 动力行为高度复杂的、"混沌"的系统也可以是结构

稳定的. 保证这种复杂集合为结构稳定的分析条件将仍被称作 “双曲性”. 这就引发了**双曲集**的理论. Smale 的 Ω-稳定性定理则是基于这一理论的一个早期的整体性结果. 本课程试图循这一脉络展开, 于是含有如下五章内容.

第一章介绍动力系统的一些基本概念, 如极限集、非游荡集、极小集、传递集等, 以及拓扑共轭和结构稳定性的概念. 作为对这些概念的一个综合说明, 简要介绍了圆周自同胚的经典理论.

第二章对一个不动点的情形讨论双曲性. 内容有双曲不动点的稳定性, 双曲性在扰动下的保持, Hartman-Grobman 定理, 双曲不动点的稳定流形定理等. 这一章的内容是经典的, 但处理方式考虑到了第四章关于双曲集的一般情形的需要.

第三章介绍两个有历史意义的系统, Smale 马蹄和 Anosov 环面同构. 这两个系统引发了现代动力系统理论的诞生.

第四章将双曲性的概念, 从一个不动点的情形, 推广到一般的不变集的情形. 内容有双曲集的双曲性在扰动下的保持、双曲集的稳定流形族定理、双曲集的结构稳定性、伪轨跟踪等. 这一章构成了结构稳定性理论的分析基础, 也是整个课程技术上最复杂的部分.

第五章在双曲集理论的基础上介绍结构稳定性理论的一个方面: 双曲性蕴含结构稳定性. 高潮是 Smale 的 Ω-稳定性定理.

第一、三、五章是拓扑式的, 比较直观, 有各种各样的概念和例子, 内容比较广泛. 第二、四两章则是分析式的, 聚焦于稳定流形、结构稳定性等少数几个课题, 内容相当集中. 但就篇幅来讲, 第二章和第四章合起来却占了全书的五分之三以上. 这是因为, 这两章技术上比较复杂, 而本书又做了自给自足、原原本本的处理.

关于双曲集的第四章无疑是最值得说明的. 这一章与关于双曲不动点的第二章有许多平行之处, 但技术上复杂得多, 通常是课程的难点. 关于双曲集有两种处理方式. 一种是将问题转化为无限维空间的不动点问题而**应用**无限维情形关于不动点的**结论**. 另一种是直接处理

双曲集问题而**重复**有限维情形关于不动点的**证明**. 两者各有优点, 后一种方式对证明双曲集的稳定流形族定理特别方便. 本书采取后一种处理方式. 在这种方式下, 第四章的许多陈述在形式上与第二章十分相近. 第四章如果遇到什么困难, 最好的办法是查看第二章. 那里有相同的数学实质, 却简单易懂得多. 为便于查看对照, 本书对第四章的表述, 包括具体的符号乃至语句, 尽量做得与第二章相同. 这大概是本书一个很特别的地方. 作者相信, 数学的表述不同于文学艺术, 不需要避免形式上的雷同, 反倒是需要揭示表面差异之下的、本质上的一致. 第四章关于双曲集的内容重要而困难. 本书的愿望是, 用最简单、平实的方式, 把这些内容严格、彻底地讲述出来, 使读者迅速进入微分动力系统的核心.

阅读本书所需要的基础知识是数学分析、线性代数、点集拓扑, 以及泛函分析的一些原理. 微分流形的一些基本概念如切丛、切映射是需要的, 但并不深. 也许反而可以说, 本课程提供了理解和运用这些概念的一个适当的场所. 本书取材较少, 但在解说上却常常不吝篇幅. 本书附有若干插图, 虽然简单, 对课堂教学却颇有帮助.

本书末尾的参考文献中列举了与本书内容密切相关的一些著作. 其中两本大型专著 Katok-Hasselblatt [KH] 和 Robinson [R] 对动力系统做了全景式的介绍. 这些著作各有特点, 可以给读者许多启发. 作者个人还特别受益于张筑生的中文专著 [Z], 这本书在很长一段时间里是作者讲授这一课程所使用的主要参考书.

本书篇幅较小, 固然是作者本来希望的, 但也带来了一些缺点. 特别是未能对本书涉及的大量结果指明原始文献. 这方面 Robinson 的书 [R] 做了许多努力, 为读者提供了方便.

本书是作者在北京大学多次讲授微分动力系统研究生课程所使用的讲义, 课程为一学期, 每周 3 课时, 听众是有关方向的研究生和高年级本科生. 除北京大学外, 作者还在台湾大学 (2003) 和台湾静宜大学 (2004) 讲授过这一课程, 部分内容还在南开大学 (1989)、中山大学

(1990)、福州大学 (1995)、南京大学 (1998)、台湾理论科学中心 (1999)、中国科学技术大学 (2001)、吉林大学 (2007)、台湾交通大学 (2011)、韩国忠南大学 (2014) 作为短期课程讲授. 讲义也就一直在修改, 直到读者今天见到的样子. 作者借此机会对上述课程的听众表示感谢. 作者要特别感谢甘少波教授多年来的友好协作, 课程的许多微妙之处, 像图像变换的压缩性等, 都与他做过详细的讨论. 作者还要感谢文晓教授和杨大伟教授, 帮作者制作了精美的插图和很多有启发意义的习题. 文晓教授还与作者一起对本书一些新写的部分做了反复的推敲和修改. 这些年来不少同学帮作者找出了讲义中的笔误, 也借此机会一并致谢.

文兰　谨识

2014 秋于北京大学

目　录

第一章

动力系统初步

动力系统就是抽象的"流". 点的流动就形成了"轨道". 动力系统经典的例子是常微分方程 (或者说向量场) 给出的点随时间沿解曲线的流动. 为简单起见我们假定每条解曲线都定义在整个时间轴 $(-\infty, \infty)$ 上, 从而点流动起来不必担心"出界". 最特殊的轨道由一个点组成, 即向量场的"奇点", 也就是"流"的不动点, 比如常见的汇点、源点、鞍点. 如果附近的点以指数速度趋近或远离, 则称之为"双曲"奇点. 还有比较特殊的就是周期轨道. 如果附近的点以指数速度趋近或远离, 则称之为"双曲"周期轨道. 奇点和周期轨道是最简单且最重要的轨道.

每一个学科发展的背后都有许多故事. 动力系统也是这样. 上世纪 60 年代初 Peixoto 在 *Topology* 杂志上发表了一个定理. 这个定理说: 在可定向闭曲面上, 一个向量场为结构稳定当且仅当它是简单的. (这里"简单"是指只有有限个奇点和周期轨道, 每个是双曲的; 每个点正向或负向都趋于一个奇点或一个周期轨道; 没有鞍点连线.) 而且, 结构稳定向量场在全体向量场的空间里稠密.

这里, 称一个向量场为**结构稳定**的, 如果它"附近"的所有向量场

的轨道拓扑结构都与它相同. 不论从哪个角度看, 结构稳定性都是一个重要的概念. 但这个概念比较抽象, 涉及 "附近" 的所有向量场, 较难把握. 而上述定理提出的判别条件却只涉及一个向量场, 而且只涉及很少几条有关奇点和周期轨道的信息, 具体直观. 这个漂亮的整体性定理立刻吸引了众多数学家的注意, 其中就有年轻的 S. Smale. 他后来在一篇回忆文章 [Sm2] 中记下了下面这个有趣的故事.

Smale 起初猜测 Peixoto 定理对高维空间也成立, 但微分方程专家 Levinson 写信告诉他这不对, 说自己研究过一个 3 维的常微分方程, 有无穷多个周期轨道, 而且扰动不掉. Smale 半信半疑找出 Levinson 的文章来仔细揣摩, 天天带着一打纸和一支笔, 到里约热内卢的海滩上思索, 累了就游游泳. 他终于确信 Levinson 是对的. 实际上, Smale 从 Levinson 的文章中抽象出了如下的关键机理, 如图 1.1:

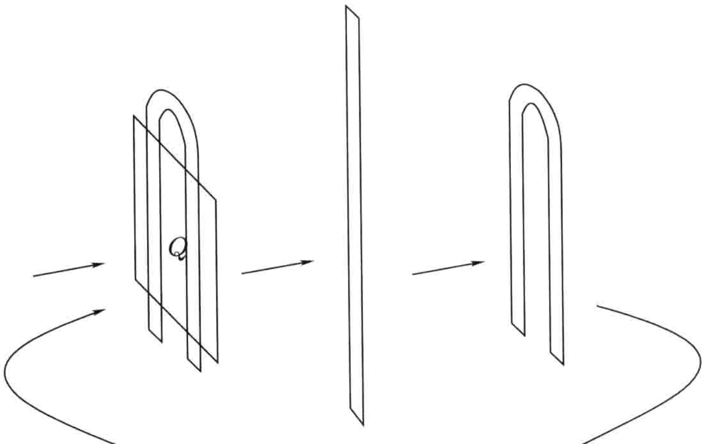

图 1.1　关键几何机理

这里 Q 是一个方形, 与流线方向横截. 在流动中, Q 渐渐变瘦变长, 并弯成马蹄的样子, 又转回来, 与 Q 自己相交, 如图 (这里把故事做了点简化). Smale 发现, 就是这个简单的机理, 蕴含了扰动不掉的无穷多个

周期轨道. 为了更简洁地说明问题, 他把这个 3 维流的问题约化为一个 2 维映射的问题, 即把流 "转一圈" 的过程记为一个映射 $f: Q \to \mathbb{R}^2$, 如图 1.2:

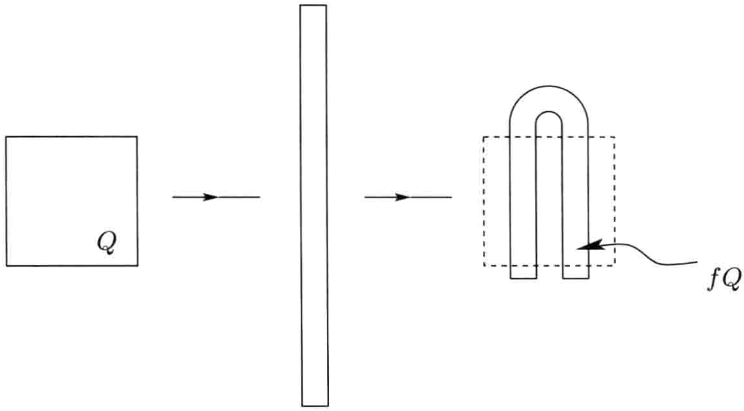

图 1.2　Smale 马蹄

这样, f 的一个不动点就对应于流的一个周期轨道. f 的一个 2-周期点也对应于流的一个周期轨道, 只是 "转了两圈". Smale 证明了 f 有无穷多个周期点, 而且扰动不掉. 这说明 Peixoto 定理在高维确实不成立. 也就是说, 在高维, 结构稳定性并不总表现为有限个周期轨道的简单形态, 而可能与高度的复杂形态 (后来被称为 "混沌") 共存. 这个重要的发现成为现代动力系统兴起的标志. 本书第三章将讲到这个 "马蹄" 映射.

Smale 很快发现, 这个问题有很深的历史渊源, 与 19 世纪末 Poincaré 研究天体力学时发现的 "横截同宿点" 现象有关, 也与 20 世纪前期 Birkhoff 的一些工作有关. 基于马蹄映射和随后 Anosov 的重要工作, Smale 提出了 "双曲集"的概念, 并和 Palis 一起提出了相当于 Peixoto 判别条件的高维形式, 即对整个学科产生很大影响的 "稳定性猜测". 这一猜测引发了包括他们自己和 Robinson, 廖山涛, Mañé 在内的许多学者的重要工作, 推出了动力系统的一个全盛期. 至于稠密

性, 则情况很不相同. Smale 以及后来的许多学者发现, 在高维, 结构稳定系统不稠密. 也就是说, 在高维系统组成的空间里, 存在这样的开集, 里面每个系统都不是结构稳定的. Bonatti 和 Diaz 甚至发现, 存在这样的开集, 里面每个系统的任意邻近, 可以在差一迭代的意义下出现任何系统! 世界的奥秘和神奇, 就这样被一代一代的探索者们一步步揭开 ……

本书讲述上述精彩领域的一个较为基础的部分. 为简单起见我们只讨论离散时间的系统, 即同胚的迭代.

§1.1　基本概念

命 X 为一紧致度量空间, $f: X \to X$ 为一同胚. f 生成一族**自复合**, 或称**迭代**

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}, \quad f^0 = id, \quad f^{-n} = (f^n)^{-1}.$$

显然, 对任意整数 n 和 m,

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}.$$

称这一族迭代 $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 f 生成的**动力系统**, 或简称 f 为一动力系统.

对任一 $x \in X$, 称集合 $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 x 在 f 下的**轨道** (见图 1.3), 记为 $\mathrm{Orb}(x, f)$ 或 $\mathrm{Orb}(x)$. 任二轨道或全同, 或不相交. 称集合 $\{x, fx, f^2x, \cdots\}$ 和 $\{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \cdots\}$ 分别为 x 的**正半轨**和**负半轨**, 记为 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 和 $\mathrm{Orb}^-(x)$. 称 x 为一**周期点**, 如果存在 $n \geq 1$, 使得

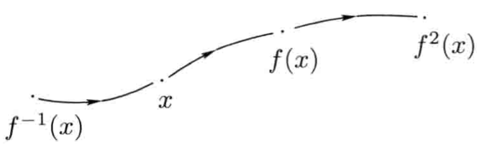

图 1.3　f 的轨道

$f^n(x)=x$. 使该等式成立的最小的正整数 n 称为 x 的**周期**. 周期为 1 的周期点即为不动点. 易见 x 为一周期点当且仅当 x 的轨道由有限个点组成. 记 f 的周期点的集合为 $\mathrm{P}(f)$, 不动点的集合为 $\mathrm{Fix}(f)$.

称 $\Lambda\subset X$ 为 f 的一个**不变集**, 如果 $f(\Lambda)=\Lambda$. 任一轨道为不变集. 易见 Λ 为不变集当且仅当 Λ 为一些 (有限个或无穷多个) 轨道的并集. $\mathrm{P}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 为不变集, 空集 $\emptyset$ 和全空间 X 总是不变集.

定理 1.1 若 Λ 为不变集, 则 $\overline{\Lambda}$, $\partial(\Lambda)$, $\mathrm{int}(\Lambda)$ 也是不变集.

证明 因 f 为同胚, 有 $f(\overline{\Lambda})=\overline{f(\Lambda)}=\overline{\Lambda}$. 另两式的证明留给读者. 定理 1.1 证完. ■

动力系统注重轨道的极限状态, 因而便于研究的是 (非空) 紧不变集. 全空间 X 总非空且紧致; 不动点集 $\mathrm{Fix}(f)$ 不一定非空, 但总紧致; 周期点集 $\mathrm{P}(f)$ 不一定非空, 也不一定紧致. 由此产生了许多复杂的动力现象.

一个点 $x\in X$ 的正半轨

$$x, fx, f^2x, \cdots$$

一般说来不收敛 (若收敛, 其极限必为不动点), 但总有许多子序列收敛. 称 $y\in X$ 为 x 的一个 ω-**极限点**, 如果有正整数的一个子序列 $n_i\to+\infty$ 使得 $f^{n_i}(x)\to y$. 称 x 的全体 ω-极限点的集合为 x 的 ω-**极限集**, 记为 $\omega(x)$ (见图 1.4). 反转时间则可定义 x 的 α-极限集. 确切地, 称 $y\in X$ 为 x 的一个 α-**极限点**, 如果有正整数的一个子序列

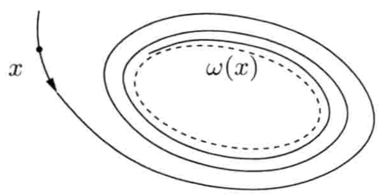

图 1.4 ω-极限集

$n_i \to +\infty$ 使得 $f^{-n_i}(x) \to y$. 称 x 的全体 α-极限点的集合为 x 的 **α-极限集**, 记为 $\alpha(x)$. 显然 $\alpha(x) = \omega(x, f^{-1})$. 故一般只陈述关于 $\omega(x)$ 的结果. 若 x 为周期点, 则

$$\omega(x) = \alpha(x) = \mathrm{Orb}(x).$$

定理 1.2 对任意 $x \in X$, $\omega(x)$ 为非空紧不变集, 且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f^n(x), \omega(x)) = 0.$$

证明 因 X 紧致, 知 $\omega(x)$ 非空且紧. 任取 $y \in \omega(x)$. 存在子序列 $n_i \to +\infty$ 使得 $f^{n_i}(x) \to y$. 故 $f^{n_i+1}(x) \to f(y)$. 因此 $f(y) \in \omega(x)$. 这证明 $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. 类似地, $f^{n_i-1}(x) \to f^{-1}(y)$, 故 $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$, 即 $f(\omega(x)) \supset \omega(x)$. 这证明 $\omega(x)$ 为不变集.

假设

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

不成立. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及一子序列 $n_i \to +\infty$, 使得对所有 i,

$$\mathrm{d}(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \varepsilon_0.$$

适当取子序列 n_{i_k} 可得 $f^{n_{i_k}}(x) \to z \notin \omega(x)$, 矛盾. 定理 1.2 证完. ■

周期轨道是最简单且最重要的轨道. 比周期性放宽一些的, 是各种 "回归性" 的概念. 比如称 $x \in X$ 为一个**正向回复点**, 如果 $x \in \omega(x)$. 换句话说, x 为正向回复的, 如果 x 的正半轨逼近到 x 自身. 类似地, 称 $x \in X$ 为一**负向回复点**, 如果 $x \in \alpha(x)$. 正向回复点和负向回复点统称为**回复点**. 可以证明回复点集一定非空, 但不一定闭. 更一般地有所谓 "非游荡" 的概念. 称 $x \in X$ 为一**非游荡点** (见图 1.5), 如果对 x 在 X 中的任意邻域 V, 存在 $n \geq 1$ 使得 $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. 换句话说, 对 x 在 X 中的任意邻域 V, 都有某个轨道穿过 V 至少两次. 非游荡点的集合称为**非游荡集**, 记为 $\Omega(f)$. 易见 $\Omega(f)$ 为非空紧不变集, 包含 f 的所有的周期点、回复点、ω- 和 α-极限点、以及它们的闭包点.

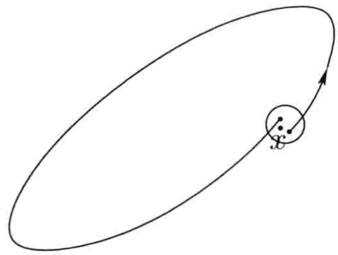

图 1.5 非游荡点

称 $\Lambda\subset X$ 为 f 一**极小集**, 如果 Λ 为 f 的非空紧不变集, 但 Λ 没有任何真子集是非空紧不变的. 一个不动点或一条周期轨道是极小集.

定理 1.3 任一非空紧不变集中必包含一个极小集.

证明 设 Γ 为 f 的任一非空紧不变集. 记 $\mathcal{C}$ 为 Γ 中 f 的所有非空紧不变集的集合. 包含关系 "$\subset$" 为 $\mathcal{C}$ 上一偏序. 易见在这一偏序下, $\mathcal{C}$ 的任一全序子集有下界. 由 Zorn 引理, $\mathcal{C}$ 有极小元 Λ, 即为 f 的一个极小集. 定理 1.3 证完. ■

下一定理说明, 极小性导致很强的 "回归性".

定理 1.4 Λ 为极小集当且仅当每一 $x\in\Lambda$ 的轨道在 Λ 中稠密.

证明 设 Λ 为 f 的极小集. 任取 $x\in\Lambda$. 则 $\overline{\mathrm{Orb}(x)}\subset\Lambda$ 是 f 的非空紧不变集. 由极小性, $\overline{\mathrm{Orb}(x)}=\Lambda$. 反之, 设 Λ 不是 f 的极小集, 则 Λ 有一真子集 Λ_1 为 f 的非空紧不变集. 取 $x\in\Lambda_1$. 则 $\overline{\mathrm{Orb}(x)}\subset\Lambda_1\neq\Lambda$. 定理 1.4 证完. ■

注 定理陈述中的 "轨道" 可以换成 "正半轨" 或 "负半轨".

定理 1.5 设 X 连通. 则 f 的任意极小集或为全空间 X, 或在 X 中无处稠密.

证明 设 Λ 为 f 的极小集. $\partial\Lambda$ 总是 f 的紧不变集. 若 $\partial\Lambda=\emptyset$, 则 $\Lambda=\mathrm{int}(\Lambda)$. 故 Λ 为 X 的开子集. 那么 Λ 既开又闭. 因 X 连通,

$\Lambda = X$. 若 $\partial\Lambda \neq \emptyset$, 则 $\partial\Lambda$ 为 f 的非空紧不变集. 但 Λ 为 f 的极小集, 故 $\partial\Lambda = \Lambda$, 即 Λ 在 X 中无处稠密. 定理 1.5 证完. ■

称 f 的紧不变集 $\Lambda \subset X$ 为**拓扑传递**的, 或简称**传递**的, 若存在 $x \in \Lambda$, 使得 $\omega(x) = \Lambda$. 显然一个传递集不能分解为两个互不相交的紧不变集的并. (当然有些不传递的集合也不能分解为两个互不相交的紧不变集的并. 例如由两个不动点和"连接"这两个不动点的一条轨道所组成的紧不变集.)

定理 1.6 (Birkhoff) 设 Λ 为 f 的紧不变集. 以下三条件等价:

(1) Λ 为传递;

(2) 对 Λ 的任意两个开子集 U 和 V, 存在 $n \geq 1$, 使得

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset;$$

(3) 存在 $x \in \Lambda$, 其正半轨在 Λ 中稠密.

证明 (1)$\Rightarrow$ (2) 的证明甚为简单, 略去. 我们来证 (2) $\Rightarrow$ (3). 取 Λ 一可数基 $V_1, V_2, \cdots$. 对每一 $i \geq 1$, 集合

$$\bigcup_{n\geq 1} f^{-n}V_i$$

为 Λ 的开子集. 不难看出也是稠子集. (实际上, 任取 Λ 一开子集 U, 由 (2), 存在 $n \geq 1$ 使得 $f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$. 从而 $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$.) 由 Baire 定理,

$$B = \bigcap_{i\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} f^{-n}V_i$$

非空 (实际上 B 在 Λ 中稠密). 任取 $x \in B$. 则对任意 $i \geq 1$, 存在 $n \geq 1$, 使得 $x \in f^{-n}V_i$, 即 $f^n x \in V_i$. 这证明 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 在 Λ 中稠密.

再证 (3) $\Rightarrow$ (1). 设存在 $x \in \Lambda$ 使得 $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. 则 $f^{-1}(x) \in \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. 若 $f^{-1}(x) \in \mathrm{Orb}^+(x)$, 则 x 为周期点, 故 $\Lambda = \omega(x)$. 若 $f^{-1}(x) \notin \mathrm{Orb}^+(x)$, 则易见 $f^{-1}(x) \in \omega(x)$. 故 $\mathrm{Orb}(x) \subset \omega(x)$. 故 $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \subset \omega(x)$. 从而 $\Lambda = \omega(x)$. 定理 1.6 证完. ■